۲- الکترواستاتیک

۲-۱-۱ پیشگفتار

بنیادی‌ترین پرسش پیش روی نظریه الکترومغناطیس محاسبه‌ی نیرویی است که یک بار الکتریکی یا مجموعه‌ای از بارهای الکتریکی به نام **بارهای چشمه** بر بار الکتریکی دیگری (**بار آزمون**) وارد می‌کند.

بارهای چشمه‌ای $q_۱,q_۲,\cdots$ را در نظر بگیرید. این بارها چه نیرویی به بار آزمون Q وارد می‌کنند؟ به بیان دیگر موقعیت بارهای چشمه به صورت تابعی از زمان $w(t)$ داده شده‌اند. می خواهیم مسیر بار آزمون را بیابیم. پاسخ پرسش های بالا در حالت کلی چندان آسان نیست؛ زیرا نیروی وارد به بار Q نه تنها به فاصله‌ی میان Q و بارهای چشمه‌ای وابسته است، بلکه در حالت عمومی، تابع سرعت و شتاب بارهای چشمه‌ای q_i نیز است.

هنگامی‌که بار آزمون Q نیرویی را احساس می‌کند، این نیرو حامل اطلاعاتی در باره‌ی اندازه، مکان، سرعت و شتاب بارهای چشمه در لحظه‌ی ارسال آنها به بار Q است. اگر چه این اطلاعات از نوع الکترومغناطیسی اند و با سرعت نور حرکت می‌کنند، اما هنوز هم بازه‌ی زمانی هر چند کوتاه Δt بین ارسال خبر و دریافت آن لازم است. در این فاصله‌ی زمانی، مکان بارهای چشمه تغییر می‌کند. بنابراین، در لحظه‌ای که بار Q این اطلاعات را دریافت می‌کند، آنها مربوط به زمانی پیش‌تر و در نتیجه «کهنه» اند. بنابراین، اگر چه پرسش بنیادی ساده به نظر می‌رسد، اما پاسخ آن مشکل می‌نماید و نیازمند بسط ریاضی نظریه‌ی الکترومغناطیس است. ما نخست حالت خاصی از پرسش بنیادی بالا را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم تمامی بارهای چشمه، $q_۱,\cdots q_i$ ساکن اند. (بار آزمون می‌تواند حرکت کند). با اعمال این محدودیت الکترودینامیک به **الکتروستاتیک** تبدیل می‌شود. کاربردهای علمی و عملی پدیده‌های الکتروستاتیک در اشکال هندسی متفاوتی از مواد رسانا و نارسانا فراوان اند. این پدیده ها با بار، میدان، پتانسیل، نیرو، گشتاور و ظرفیت سرو کار دارند. شیوه‌ی عمومی یافتن ارتباط میان این کمیت ها برای هندسه‌های گوناگون در فصل‌های آینده بررسی خواهد شد. به طور کوتاه، این شیوه عبارت از یافتن پاسخی به یک معادله‌ی دیفرانسیل بنام معادله‌ی **لاپلاس** است که در شرایط مرزی صدق کند. این روش را در مورد پدیده‌های الکتروستاتیک بکار خواهیم بست، ولی در دیگر شاخه‌های فیزیک مانند جریان، گرما، ترمودینامیک و جریان الکتریکی نیز کاربرد دارد. شیوه‌ی عمومی بر پایه‌ی یک مفهوم ساده‌ی فیزیکی استوار است. این مفهوم، بدون اثبات آن، عبارت از این است که خطهای پیوسته‌ی شار را در فضای خالی می‌توان چنان رسم کرد که در هر نقطه‌ی فضا، چگالی و جهت این خطها نماینده شدت و جهت میدان باشند. پیش از آنکه ما مفهوم شار و میدان را روشن کنیم لازم است به پرسش بنیادی الکتروستاتیک برگردیم.

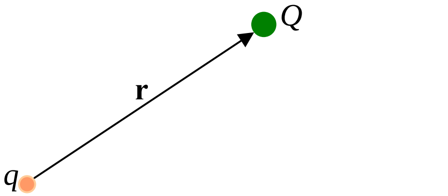
۲-۱-۲ قانون کولمب

ما در فصل ۱ به قانون کولمب پرداختیم. نیرویی که بار نقطه‌ای ساکن q به بار نقطه‌ای Q دیگری در فاصله‌ی r از خود وارد می‌کند، با قانون کولمب تعیین می‌شود:

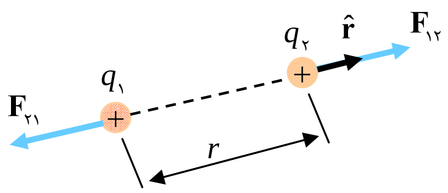
$$\mathbf{F}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{qQ}{\mathbf{r}^۲}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۲-۱)$$

رابطه‌ی بالا بیان ریاضی قانون کولمب است. این قانون تجربی است و تنها در مورد بارهای نقطه‌ای درست است. نیروی وارد بر بار Q با حاصل‌ضرب بارها متناسب است و با مجذور فاصله‌ی بین دو بار نسبت معکوس دارد. $\mathbf{r}$ برداری است از بار q

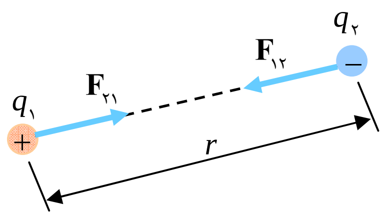
به بار آزمون Q و در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. ثابت $\varepsilon_۰$ **گذردهی** فضای تهی است. در یکاهای SI مقدار آن $\varepsilon_۰ = ۸٫۸۵۴\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{C^۲/N.m^۲}$ است. $\hat{\mathbf r}=\mathbf r/r$ بردار یکه‌ای از q به Q است. چون بارهای الکتریکی ممکن است هم علامت باشند و یا علامتشان مخالف هم باشد، نیروی $\mathbf F_{۱۲}$ بین‌شان ممکن است رانشی یا ربایشی باشد. در شکل (۲-۲) نیروی بین دو بار هم علامت $q_۱$ و $q_۲$ نشان داده شده است. این نیرو رانشی است. شکل (۲-۳) نیروی ربایشی بین دو بار با علامت‌های مخالف را نشان می‌دهد. این نیرو، ربایشی است.



شکل ۲-۱ بردار بین دو بار نقطه‌ای



شکل ۲-۲ نیروی رانشی بین دو بار



شکل ۲-۳ نیروی ربایشی بین دو بار

اگر به جای بار q مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای $q_۱,q_۲,\cdots$ وجود داشته باشد، با استفاده از قانون کولمب و **اصل برنهی**، می‌توان نیروی این مجموعه‌ی بار را بر روی Q حساب کرد: بنا به اصل برنهی، برهم‌کنش میان دو بار متاثر از حضور بارهای دیگر نیست. این بدان معنی است که برای محاسبه‌ی نیرویی که از طرف مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای به بار Q وارد می‌شود، نخست نیروی $\mathbf F_۱$ ناشی از بار $q_۱$ را بدون در نظر گرفتن بقیه‌ی بارها محاسبه کنیم و سپس نیروی $\mathbf F_۲$ ناشی از بار $q_۲$ را به دست آوریم و الاخر .... و سرانجام این نیروها را به طور برداری جمع کنیم. آنگاه، $\mathbf F=\mathbf F_۱=\mathbf F_۲+\cdots$ نیروی وارد به بار Q از طرف مجموعه‌ی بارهای نقطه‌ای را به‌دست خواهد داد.

$$\mathbf F=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{q_۱\hat{\mathbf r}_۱}{r_۱^۲}+\frac{q_۱\hat{\mathbf r}_۲}{r_۲^۲}+\frac{q_۱\hat{\mathbf r}_۲}{r_۲^۲}+\cdots\right) \qquad (۲-۲)$$

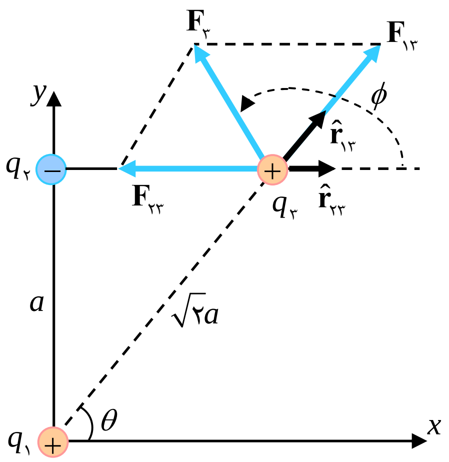
ما توجه خواننده را به نقش مهم اصل برنهی جلب می‌کنیم. اصل برنهی و قانون کولمب تنها اصولی اند که همه‌ی الکتروستاتیک برپایه‌ی آنها استوار است.

مثال ۲-۱ سامانه‌ای با سه بار: سه بار نقطه‌ای $q_۱$، $q_۲$ و $q_۳$ برابر شکل (۲-۴) چیده شده اند. $q_۱$ در مبداء مختصات، $q_۲$ در $(۰,a)$ و $q_۳$ در نقطه‌ی (a,a) قرار دارند. اگر $q_1=-q_2$ باشد، چه نیرویی به بار $q_۲$ وارد می‌شود؟

حل: با استفاده از اصل برنهش، داریم

$$\mathbf F_۲=\mathbf F_{۱۲}+\mathbf F_{۲۳}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{q_۱q_۲}{r_{۱۲}^۲}\hat{\mathbf r}_{۱۲}+\frac{q_۲q_۳}{r_{۲۳}^۲}\hat{\mathbf r}_{۲۳}\right) \qquad (۲-۳)$$

توجه کنید که چون $q_۲$ منفی است، جمله‌ی دوم هم منفی است. جهت بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf r}_{۱۲}$ و $\hat{\mathbf r}_{۲۳}$ متفاوت اند. برای محاسبه‌ی این جمع برداری، می‌توان بردارهای یکه را برحسب مولفه‌های کارتزی آن‌ها نوشت و سپس نیروها را به طور برداری با هم جمع کرد. از شکل (۲-۴) پیداست که بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf r}_{۱۲}$ را می‌توان به صورت زیر



شکل ۲–۴ سامانه‌ای با سه بار الکتریکی

$$\hat{\mathbf{r}}_{۱۳}=\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (۲–٤)$$

نوشت. همچنین، بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}_{۲۳}=\hat{\mathbf{i}}$ است. بنابراین، نیروی کل وارد به بار q_3 به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_۳&=\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{q_۱q_۳}{r_{۱۳}^۲}\hat{\mathbf{r}}_{۱۳}+\frac{q_۲q_۳}{r_{۲۳}^۲}\hat{\mathbf{r}}_{۲۳}\right)\\&=\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{q_۱q_۳}{\left(\sqrt{۲}a\right)^۲}\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}\right)+\frac{(-q_۱)q_۳}{a^۲}\hat{\mathbf{i}}\right)\\&=\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۱q_۳}{a^۲}\left[\left(\frac{\sqrt{۲}}{٤}-۱\right)\hat{\mathbf{i}}+\frac{\sqrt{۲}}{٤}\hat{\mathbf{j}}\right]\end{aligned} \qquad (۲–۵)$$

اندازه و جهت نیروی $\mathbf{F}_۳$ عبارتند از

$$F_۳=\frac{q_۱q_۳}{٤\pi\varepsilon_۰a^۲}\left[\left(\frac{\sqrt{۲}}{٤}-۱\right)^۲+\left(\frac{\sqrt{۲}}{٤}\right)^۲\right]^{۱/۲}=\frac{q_۱q_۳}{٤\pi\varepsilon_۰a^۲}(۰,۷۳۷)\ \mathrm{N} \qquad (۲–٦)$$

زاویه‌ای که این نیرو با محور x می‌سازد، و در نتیجه، جهت آن عبارت است از

$$\phi=\tan^{-۱}\left(\frac{F_{۳,y}}{F_{۳,x}}\right)=\tan^{-۱}\left[\frac{\sqrt{۲}/٤}{-۱+\sqrt{۲}/٤}\right]=۱۰۱,۳^\circ \qquad (۲–۷)$$

توجه کنید که معادله‌ی بالا دو پاسخ دارد. پاسخ دوم، $\phi=-۲۸,۷^\circ$ ، پذیرفتنی نیست؛ چون در این صورت مولفه‌ی $\hat{\mathbf{i}}$ نیرو مثبت و مولفه‌ی $\hat{\mathbf{j}}$ آن منفی می‌شود.

برای سامانه‌ای با N بار، رابطه‌ی (۲–۲) را می توان به صورت زیر نوشت

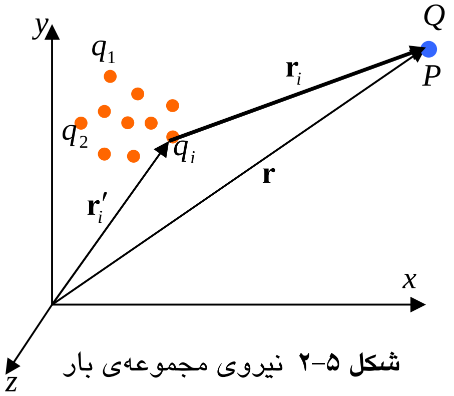
$$\mathbf{F}_j=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\mathbf{F}_{ij} \qquad (۲–۸)$$

که در آن $\mathbf{F}_{ij}$ نیروی بین بارهای i–ام و j–ام است. بنابه اصل برنهی اگر بارها ساکن باشند، این نیروها مستقل از یکدیگر اند.

۲–۲ میدان الکتریکی

نیروی الکتروستاتیکی (نیروی الکتریکی بین بارهای ساکن) همانند نیروی گرانش، نیروی "کنش از راه دور" است. این نیرو بین بارهایی که در تماس مستقیم نیستند وجود دارد. در توجیه مفهوم کنش از راه دور، گوییم یکی از بارها میدانی در فضای پیرامون خود ایجاد می‌کند و این میدان به بار دیگر اثر می‌کند. در اینجا نخست میدان الکتریکی را تعریف می‌کنیم و سپس به تفسیر فیزیکی آن می‌پردازیم.

فرض کنید مجموعه‌ی بارهای نقطه‌ای ساکن $q_۱,q_۲\ldots q_n$ برابر شکل (۲–۵) در فاصله‌های $\mathbf{r}_۱,\mathbf{r}_۲,\mathbf{r}_۳,\cdots\mathbf{r}_n$ از بار Q قرار دارند. نیروی کل که به بار Q وارد می‌شود بنا به اصل بر نهی عبارت است از



شکل ۵-۲ نیروی مجموعه‌ی بار

$$\mathbf{F}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mathbf{r}_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i \qquad (۲-۹)$$

اگر میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ بارهای چشمه‌ای را در نقطه‌ی P (یعنی در مکان بار آزمون Q) به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{E}(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mathbf{r}_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i \qquad (۲-۱۰)$$

آنگاه نیروی وارد به بار Q به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{F}=Q\,\mathbf{E} \qquad (۲-۱۱)$$

توجه کنید که $\mathbf{E}(P)$ تابعی از مکان نقطه $P=(x,y,z)$ است؛ چون $\mathbf{r}_i=\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i$ تابع نقطه‌ی P است. مکان نقطه‌ی P با بردار مکان $\mathbf{r}$ داده شده است. چون بارهای چشمه‌ای ساکن اند بردار مکان آنها، $\mathbf{r}'_i$، کاملاً شناخته شده است. در رابطه (۲-۱۰) هیچ نشانی از بار آزمون Q وجود ندارد. بنابراین، میدان الکتریکی یک کمیت برداری است که اندازه وجهت آن در هر نقطه‌ی مانند P با آرایش بارهای چشمه مشخص می‌شود. از نظر فیزیکی $\mathbf{E}(P)$ نیرو در واحد بار است که به بار آزمون در نقطه P وارد می‌شود.

میدان یک کمیت یا مفهوم فیزیکی بنیادی است. حتی بنیادی‌تر از نیروست. در واقع نیرو نمود میدان است. برای هر نیرویی در طبیعت میدانی وجود دارد. برای مثال میدان گرانش را در نظر بگیرید. ما نیروی گرانش را می‌شناسیم و می‌دانیم که اجسام به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند؛ مانند نیروی ربایش بین زمین و خورشید. برای این که تفاوت میان نیرو و میدان را روشن‌تر کنیم بهتر است به مثال زیر توجه کنیم:

پارچه‌ی چارگوشی را در نظر بگیرید که چهار نفر گوشه‌های آن را گرفته و به صورت افقی در فضا نگه داشته‌اند. حال اگر سنگ‌ریزه‌ای را در یکی از گوشه‌های این پارچه قرار دهید چه اتفاقی خواهد افتاد ؟ تجربه می‌آموزد که سنگ ریزه در مکان خود باقی خواهد ماند. حال اگر وزنه‌ی سنگین‌تری را در میان این پارچه قرار دهید، این وزنه انحنایی در پارچه ایجاد خواهد کرد و سنگ‌ریزه در این انحنا خواهد سُرید و به سمت وزنه جذب خواهد شد. بدین ترتیب، به وجود نیروی گرانش بین وزنه و سنگ ریزه پی می‌بریم. به این پدیده می‌توانیم بنیادی‌تر بیندیشیم: حضور وزنه در فضا (پارچه) خاصیتی را به فضا القاء می‌کند. در مثال بالا این خاصیت، ایجاد خمیدگی در فضا یا پارچه است که سبب تغییر هندسه‌ی فضای اطراف وزنه شده است. این خاصیت یا هندسه‌ی جدید و ایجاد خمیدگی در فضا، میدان است. در مثال بالا آن را میدان گرانش می‌نامیم.

نقش سنگ ریزه آشکارسازی این میدان یا هندسه‌ای است که به فضا القاء شده است . نیرویی که در این میدان به سنگ ریزه وارد می‌شود، نمایش وجود میدان است. همین تصور را در مورد سایر نیروها و میدان‌ها هم می‌توان داشت: حضور بار الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا ویژگی‌های آن فضا را دگرگون می‌کند و خاصیت جدیدی که مربوط به بار الکتریکی است به فضا القاء می‌کند. تجسم این دگرگونی در فضا، میدان الکتریکی است. به همین ترتیب بار رنگ و بار ضعیف میدان‌های رنگ و ضعیف ایجاد می‌کنند.

همان‌گونه که گفتیم، مجموعه‌ای از بارها در هر نقطه‌ای مانند P میدان الکتریکی $\mathbf{E}(P)$ ایجاد می‌کنند. اندازه و جهت $\mathbf{E}(P)$ مستقل از بود یا نبود بار آزمون Q در نقطه‌ی P است. میدان $\mathbf{E}$ و نیروی $\mathbf{F}$ با رابطه‌ی (۲-۱۱) به هم مربوط اند ؛ اما در تعریف میدان، رابطه‌ی (۲-۱۰)، بار Q ظاهر نشده است. برای گریز از این تناقض ظاهری می‌توان Q را بسیار کوچک پنداشت و در

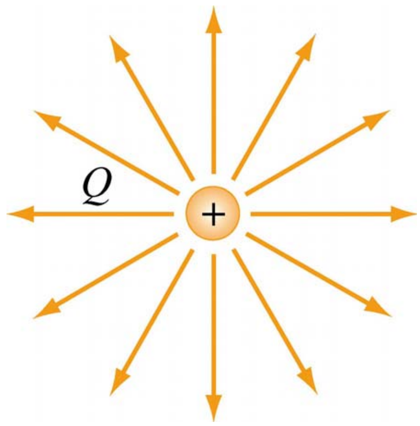
نتیجه اطمینان حاصل کرد که حضور بار آزمون Q در فضا، مکان بارهای چشمه‌ای را تغییر نمی‌دهد. بنابراین، میدان $\mathbf{E}(P)$ در نقطه‌ای مانند P با بردار مکان $\mathbf{r}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E}(P) = \lim_{Q\to \circ} \frac{\mathbf{F}}{Q} \qquad (۲-۱۲)$$

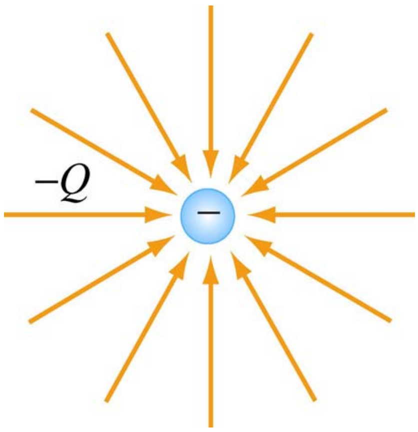
با این حال، در طبیعت بار کوچک‌تر از e (بار الکترون) وجود ندارد! در نتیجه، گزینه‌ی $Q \to \circ$ راه گریز درستی به نظر نمی‌آید. در واقع، اگر رابطه‌ی (۱۰-۲) را بدون اشاره به بار آزمون، به‌عنوان تعریف میدان $\mathbf{E}$ بپذیریم، مشکلی پیش نمی‌آید و لازم هم نیست که چشمه در حال سکون باشد. اگر وارد کردن بار جدیدی سبب جابه‌جایی بارهای چشمه بشود، این بدان معنی است که میدان تغییر کرده است و اگر بخواهیم نیروی وارد به بار جدید را حساب کنیم، باید از میدان جدید استفاده کنیم.
میدان الکتریکی $\mathbf{E}(P)$ یک تابع برداری برحسب مکان است؛ یک **میدانِ برداری** است. یکای میدان الکتریکی در سامانه‌ی یکاهای SI نیوتون بر بار واحد یا نیوتون بر کولمب $\mathrm{n/C}$ است. پس از آنکه در فصل ۳ مفهوم پتانسیل را شناساندیم، میدان را با یکای دیگر، اما کاملا هم‌ارز، ولت بر متر در یکاهای SIبیان خواهیم کرد.

۱-۲-۲ خطهای میدان

بار الکتریکی میدان الکتریکی تولید می‌کند. میدان الکتریکی بر بارهای دیگر اثر می‌گذارد و به آنها نیرو وارد می‌کند. همان طور

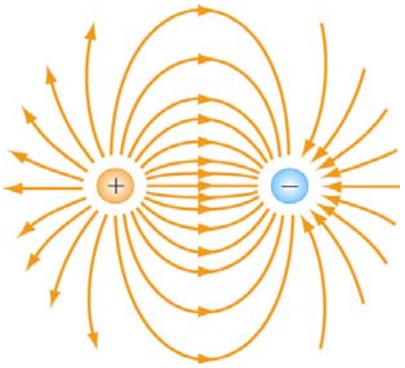


شکل ۶-۲ خطهای میدان بار نقطه‌ای مثبت



شکل ۷-۲ خطهای میدان بار نقطه‌ای منفی

که در فصل۱ گفتیم، میدان الکتریکی را می‌توان با خطهای میدان نشان داد. خطهای میدان از بار مثبت آغاز (شکل ٦-۲) و به بار منفی پایان می‌گیرند (شکل۷-۲). خطهای میدان هرگز از فضای تهی آغاز نمی‌شوند و در فضای تهی هم پایان نمی‌گیرند؛ از بار آغاز و به بار ختم می‌شوند. خطهای میدان در راستای میدان الکتریکی‌اند و چگالی خطهای میدان در هر نقطه با شدت میدان الکتریکی درآن نقطه متناسب است. بارِ تنها در همه سو به طور یکسان خط میدان گسیل می‌کند. اگر در دور و بر، بار دیگری وجود نداشته باشد، این خطهای میدان پایان نمی‌گیرند و در نتیجه روی سطحی به شعاع r و به مساحت $٤\pi r^{۲}$ پخش می‌شوند. بنابراین، چگالی خطهای میدان و در نتیجه شدت میدان و نیروی الکتریکی به صورت $۱/r^{۲}$ کاهش می یابد. دلیل بنیادی نیروی کولمب هم که به صورت $۱/r^{۲}$ تغییر می‌کند، همین است. توجه کنید که خطهای میدان شعاعی اند. جهت آنها برای بار مثبت به سوی بیرون از بار و برای بار منفی به سوی بار است. برای یک جفت بار مساوی و ناهم‌نام (دوقطبی الکتریکی) خطهای میدان در شکل (۸-۲) نشان داده شده است. با توجه به نکات زیر می‌توان طرح خطهای میدان را به‌دست آورد:



شکل ۸-۲ خطهای میدان یک جفت بار

۱- **تقارن**: به ازای هر نقطه در بالای خط راستی که دو بار را به هم وصل می کند، نقطه‌ی متناظری در پایین این خط راست وجود دارد. بنابراین، طرح باید نسبت به این خط متقارن باشد.

۲- **میدان نزدیک**: در فاصله‌های خیلی نزدیک به یکی از بارها، میدان آن بار چیره است و بنابراین، خطهای میدان شعاعی اند و تقارن کروی دارند.

۳- **میدان دور**: در فاصله‌های دور از سامانه‌ی بارها، طرح خطهای میدان باید همانند خطهای میدان یک بار تنها با اندازه‌ی $Q=\sum_i Q_i$ باشد. بنابراین، خط-های میدان باید شعاعی و به سوی بیرون باشند؛ مگر این که $Q=0$ باشد.

٤- **نقطه‌ی تهی**: نقطه‌ای که در آن $\mathbf{E}=0$ است و هیچ خط میدانی از آن نمی‌گذرد.

ویژگی‌های خطهای میدان را می‌توان به صورت زیر برشمرد:

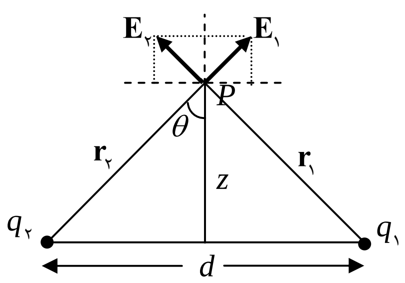
- جهت بردار میدان $\mathbf{E}$ در هر نقطه به خط میدان مماس است.
- تعداد خطهای میدان گذرنده از واحد سطحی که بر خط میدان عمود است با اندازه‌ی میدان الکتریکی در آن ناحیه متناسب است.
- خطهای میدان باید از بارهای مثبت (یا از بینهایت) آغاز شوند و به بارهای منفی (یا در بینهایت) پایان یابند.
- تعداد خطهایی که از بار مثبت آغاز می‌شوند یا به بار منفی منتهی می‌شوند، باید با اندازه‌ی بار متناسب باشد.
- دوخط میدان هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ چون در این صورت در نقطه‌ی تلاقی، میدان دو جهت پیدا می‌کند.

با توجه به تعریف میدان الکتریکی در رابطه‌ی (۱۲-۲) و قانون کولمب، میدان الکتریکی در فاصله‌ی r از یک بار نقطه‌ای برابر

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۱۳-۲)$$

است. با استفاده از اصل برهمنهی، میدان الکتریکی مجموعه‌ای از بارهابه صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{E}=\sum_i \mathbf{E}_i=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i \qquad (۱٤-۲)$$



شکل ۹-۲ میدان‌های دو بار همنام

مثال ۲-۲ میدان دو بار: دو بار همنام و هم اندازه‌ی q به فاصله‌ی d از همدیگر قرار دارند.

(الف): میدان الکتریکی را در فاصله‌ی z از وسط خطی که این دو بار را به هم می‌پیوندد، بیابید.

(ب): بار سمت راست را به $-q$ تبدیل کنید و مسئله را دوباره حل کنید.

حل: **(الف)** میدان هریک از بارها درنقطه‌ی P عبارت است از.

$$\mathbf{E}_i=\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\mathbf{r}_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i \qquad (۱۵-۲)$$

جهت هر یک از میدان‌های $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ در شکل (۹-۲) نشان داده شده است. از تقارن مسئله پیداست که مولفه‌های افقی میدان‌های $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ یکدیگر را حذف می‌کنند و میدان برآیند فقط در جهت قائم مولفه‌ی غیر صفر دارد. میدان کل در نقطه P از برنهش

$\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ به دست می‌آید و داریم

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{k}})+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}(-\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{k}}) \qquad (۲-۱۶)$$

چون $q_1=q_2=q$ و $r_1^2=r_2^2\equiv r^2=\left(z^2+(d/2)^2\right)$ اند، رابطه‌ی (۲-۱۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\left[(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{k}})+(-\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{k}})\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۱۷)$$

اندازه‌ی میدان در راستای عمودی، E_Z برابر

$$E_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\frac{q}{r^2}\cos\theta \qquad (۲-۱۸)$$

است. $\cos\theta$ مولفه‌ی عمودی را به‌دست می‌دهد و ضریب ۲ به خاطر وجود دو میدان برای دو بار الکتریکی است.

چون

$$r^2=\sqrt{z^2+(d/2)^2} \quad , \quad \cos\theta=\frac{z}{r}$$

$$\Rightarrow \quad E_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qz}{(z^2+(d/2)^2)^{3/2}} \qquad (۲-۱۹)$$

نکته: آزمودن پاسخ برای حالت های خاص ـ هر گاه امکان پذیر باشد ـ اعتماد به درستی پاسخ را بیشتر می‌کند. در این مثال، حالت خاصی را در نظر بگیرید که $z\gg d$ است؛ یعنی مکان نقطه‌ی P خیلی از بارها فاصله دارد. از چنین فاصله‌ی دوری (در مقایسه با جدایی بارها) این دو بار همانند بار واحد در فاصله‌ی z به نظر خواهند رسید. مقدار این بار واحد برابر $2q$ است. پس، در چنین حالت خاصی پاسخ روشن است:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{z^2}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۲۰)$$

پاسخ عمومی (۲-۱۹) نیز به‌ازای $d\to 0$ به این پاسخ می‌انجامد.

(ب): در این حالت، مولفه‌های عمودی یکدیگر را حذف می‌کنند. در نتیجه

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\frac{q}{r^2}\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} \qquad (۲-۲۱)$$

چون $\sin\theta=(d/2)/r$ است، پس خواهیم داشت

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{(z^2+(d/2)^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{x}} \qquad (۲-۲۲)$$

و برای حالت خاص $z\gg d$ اگر در مخرج کسر از d در برابر z چشم پوشی کنیم، میدان به صورت زیر در می‌آید.

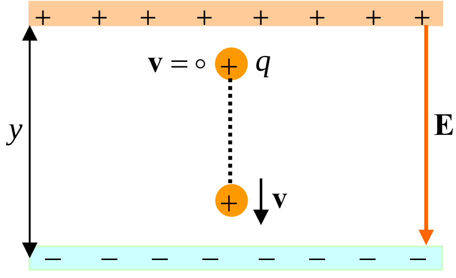
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{z^2}\hat{\mathbf{x}} \qquad (۲-۲۳)$$

که این میدان یک دو قطبی است و در بخش ۳-۲ به آن خواهیم پرداخت.

مثال ۳-۲ نیروی وارد به ذره‌ی باردار در میدان الکتریکی: دو صفحه‌ی تخت موازی را که بارهای ناهم‌نام دارند، برابر شکل (۲-۱۰) در نظر بگیرید. بار q در فضای بین صفحه ها، برابر شکل، حرکت می‌کند. فرض کنید میدان در بین صفحه‌ها به صورت $\mathbf{E}=-E_y\hat{\mathbf{j}}$ است ($E_y>0$). ما در آینده نشان خواهیم داد که میدان در بین صفحه‌های بینهایت گسترده با بارهای ناهم‌نام

یکنواخت است). فرض کنید که بار از صفحه‌ی مثبت با سرعت $\mathbf{v}_\circ = \circ$ رها می‌شود. سرعت و انرژی جنبشی بار در لحظه‌ی برخورد به صفحه‌ی با بار منفی چیست؟ فاصله‌ی دو صفحه از هم y است.

حل: به ذره نیروی کولمبی $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ و به سوی پایین وارد می‌شود. بین بار q ، که این نیرو به آن وارد می‌شود، و بارهای روی صفحه ها که چشمه‌ی میدان الکتریکی اند، تمایز وجود دارد. به این تمایز توجه کنید: اگرچه خود بار q هم چشمه‌ی میدان الکتریکی است و میدان تولید می‌کند، اما بنابه قانون سوم نیوتون نمی‌تواند به خودش نیرو وارد کند. $\mathbf{E}$ میدانی است که فقط از بارهای "چشمه" در روی صفحه‌ها ناشی می‌شود. بنابه قانون دوم نیوتون، نیروی برآیند به شتاب‌دار شدن بار q می‌انجامید. شتاب بار عبارت است از



شکل ۱۰-۲ حرکت بار در میدان یکنواخت

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_e}{m} = \frac{q\mathbf{E}}{m} = -\frac{qE_y}{m}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۲-۲٤)$$

چون مقدار این شتاب ثابت است، داریم

$$v^{۲} - v_\circ^{۲} = ۲|a_y|y \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{۲|a_y|y} = \sqrt{\frac{۲yqE_y}{m}} \qquad (۲-۲٥)$$

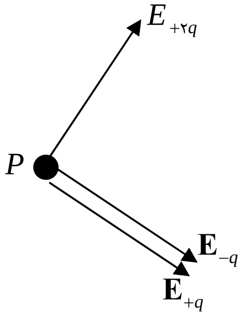
انرژی جنبشی ذره در هنگام برخورد با صفحه‌ی پایین، برابر است با

$$T = mv_y/۲ = qE_y y \qquad (۲-۲٦)$$

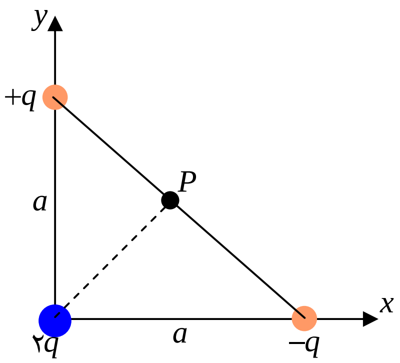
مثال ۴-۲ سه با ر در سه گوشه‌ی مثلث: سه بار q ، $۲q$ و $-q$ برابر شکل (۱۱-۲) در سه گوشه‌ی مثلث متساوی‌الساقین به ضلع a و با زاویه‌ی راس $۹\circ^\circ$ قرار دارند. جهت و اندازه‌ی میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P (نیم راه بین بارهای q و $-q$) به‌دست آورید.

حل: حل مسئله را با رسم میدان‌های الکتریکی بارها آغاز می‌کنیم. در شکل (۱۲-۲) این میدان‌ها نشان داده شده اند. بنا به اصل برنهی، میدان الکتریکی کل برابر است با

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_{+q}(P) + \mathbf{E}_{-q}(P) + \mathbf{E}_{۲q}(P) \qquad (۲-۲۷)$$

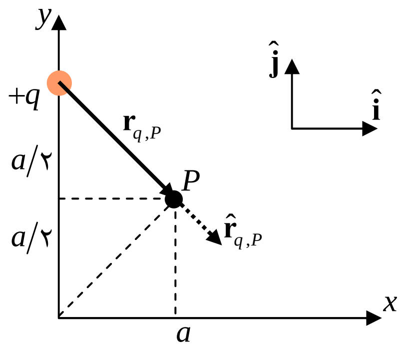


شکل ۱۲-۲ میدان بارها در نقطه‌ی P



شکل ۱۱-۲ سه بار در سه راس

با محاسبه‌ی میدان بار $+q$ آغاز می‌کنیم:



شکل ۲-۱۳ میدان بار $+q$ در نقطه‌ی P

$$\mathbf{E}_{+q}(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{\left(r_{+q,P}\right)^{2}}\hat{\mathbf{r}}_{+q,P}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{\left(r_{+q,P}\right)^{3}}\mathbf{r}_{+q,P}\qquad(۲-۲۸)$$

توجه کنید که بردار $\mathbf{r}_{+q,P}$ از بار q آغاز می‌شود و در P پایان می‌گیرد. با توجه به شکل (۲-۱۳) این بردار را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\mathbf{r}_{+q,P}=(a/2)\hat{\mathbf{i}}-(a/2)\hat{\mathbf{j}}\qquad(۲-۲۹)$$

اندازه‌ی بردار $\mathbf{r}_{+q,P}$ عبارت است از

$$r_{+q,P}=\left|\mathbf{r}_{+q,P}\right|=\left((a/2)^{2}+(a/2)^{2}\right)^{1/2}=a/\sqrt{2}\qquad(۲-۳۰)$$

بنابراین، داریم

$$\mathbf{E}_{+q}(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{\left(r_{+q,P}\right)^{3}}\mathbf{r}_{+q,P}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q\left((a/2)\hat{\mathbf{i}}-(a/2)\hat{\mathbf{j}}\right)}{\left(a/\sqrt{2}\right)^{3}}=\frac{\sqrt{2}q}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{\left(\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}\right)}{a^{2}}\qquad(۲-۳۱)$$

با توجه به شکل (۲-۱۲) دیده می‌شود که میدان الکتریکی بار $-q$ هم به همین صورت است:

$$\mathbf{E}_{+q}(P)=\mathbf{E}_{-q}(P)\qquad(۲-۳۲)$$

اینک میدان بار $+2q$ را در نقطه‌ی P به‌دست می‌آوریم

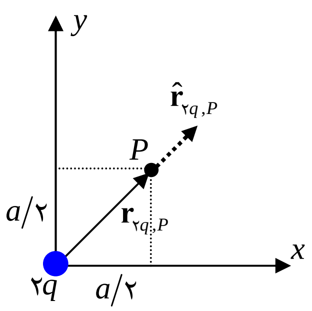
$$\mathbf{E}_{2q}(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{2q}{\left(r_{2q,P}\right)^{2}}\hat{\mathbf{r}}_{2q,P}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{2q}{\left(r_{2q,P}\right)^{3}}\mathbf{r}_{2q,P}\qquad(۲-۳۳)$$

بردار $\mathbf{r}_{2q,P}$ از بار $+2q$ آغاز می‌شود و در P پایان می‌گیرد. از شکل (۲-۱۴) می‌توان نوشت

$$\mathbf{r}_{2q,P}=(a/2)\hat{\mathbf{i}}+(a/2)\hat{\mathbf{j}}\qquad(۲-۳۴)$$

اندازه‌ی آن برابر است با

$$r_{2q,P}=\left|\mathbf{r}_{2q,P}\right|=\left((a/2)^{2}+(a/2)^{2}\right)^{1/2}=a/\sqrt{2}\qquad(۲-۳۵)$$



شکل ۲-۱۴ میدان بار $2q$ در نقطه‌ی P

بنابراین ، میدان بار $2q$ عبارت است از

$$\mathbf{E}_{2q}(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{2q}{\left(r_{2q,P}\right)^{3}}\mathbf{r}_{2q,P}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{2q\left((a/2)\hat{\mathbf{i}}+(a/2)\hat{\mathbf{j}}\right)}{\left(a/\sqrt{2}\right)^{3}}=\frac{2\sqrt{2}q\left(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}\right)}{4\pi\varepsilon_\circ a^{2}}\qquad(۲-۳۶)$$

پس، از جمع برداری سه میدان بالا خواهیم داشت

$$\mathbf{E}(P)=\mathbf{E}_{+q}(P)+\mathbf{E}_{-q}(P)+\mathbf{E}_{2q}(P)=2\mathbf{E}_{+q}(P)+\mathbf{E}_{2q}(P)\qquad(۲-۳۷)$$

یا

$$\mathbf{E}(P)=2\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q\left(\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}\right)}{a^{2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{2\sqrt{2}\left(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}\right)}{a^{2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{4\sqrt{2}\,\hat{\mathbf{i}}}{a^{2}}\qquad(۲-۳۸)$$

۲-۳ میدان الکتریکیِ دوقطبی الکتریکی

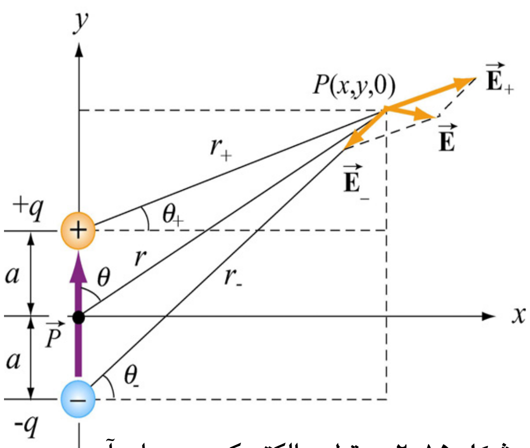
دوقطبی الکتریکی شامل دو بار الکتریکی برابر و ناهم‌نام است که به فاصله‌ی $2a$ از یکدیگر قرار دارند و در شکل (۲-۱۵) نشان داده شده است. گشتاور دوقطبی الکتریکی $\mathbf{p}$ برداری است از بار $-q$ به بار $+q$ (در جهت $+y$ در شکل ۲-۱۵) و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{p} = 2qa\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (۲-۳۹)$$

اندازه‌ی گشتاور دوقطبی الکتریکی $p = 2qa$ است ($q > 0$).

برای سامانه‌ای با N بار هم که جمع بارها صفرباشد، می‌توان بردار گشتاور دوقطبی الکتریکی تعریف کرد. این‌گونه:

$$\mathbf{p} \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i \qquad (۲-۴۰)$$



شکل ۲-۱۵ دوقطبی الکتریکی و میدان آن

که در آن $\mathbf{r}_i$ بردار مکان بار i-ام است. نمونه‌های دوقطبی الکتریکی مولکول‌های H_2O، CO، HCL و هر مولکول *قطبی* دیگر است. به طور کلی، هر مولکولی را که مرکز بارهای مثبت و منفی آن برهم منطبق نباشد به تقریب می‌توان یک دوقطبی الکتریکی فرض کرد. در فصل مربوط به دی‌الکتریک‌ها نشان خواهیم داد که با اعمال میدان الکتریکی خارجی به مولکول ناقطبیده، می‌توان به آن گشتاور دوقطبی القاء کرد.

۲-۳-۱ میدان الکتریکی دوقطبی الکتریکی

میدان الکتریکی دو قطبی الکتریکی شکل (۲-۱۵) چیست؟ با توجه به شکل می‌توان مولفه‌ی x میدان الکتریکی را در نقطه‌ی $P(x,y,0)$ به صورت زیر نوشت

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\left[x^2+(y-a)^2\right]^{3/2}} - \frac{x}{\left[x^2+(y+a)^2\right]^{3/2}}\right) \qquad (۲-۴۱)$$

که در آن

$$r_\pm^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra\cos\theta = x^2 + \left(y \mp a\right)^2 \qquad (۲-۴۲)$$

هم‌چنین مولفه‌ی y میدان عبارت است از

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y-a}{\left[x^2+(y-a)^2\right]^{3/2}} - \frac{y+a}{\left[x^2+(y+a)^2\right]^{3/2}}\right) \qquad (۲-۴۳)$$

مولفه‌های میدان، رابطه‌های (۲-۴۱) و (۲-۴۳)، برای دوقطبی الکتریکی آرمانی ، یعنی در حالت حدی $r \gg a$ ، شکل ساده‌تر زیر را پیدا می‌کنند

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta \;, \qquad E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1) \qquad (۲-۴۴)$$

که در آنها $\sin\theta = x/r$ و $\cos\theta = y/r$ و $r = \left(x^2+y^2\right)^{1/2}$ اند. چون به‌دست آوردن رابطه‌ی (۲-۴۴) آموزنده است، در اینجا آن را نشان می‌دهیم. برای این کار مخرج‌های E_x و E_y را بسط تیلور می‌دهیم. نخست توجه کنید که

$$\left[x^{2}+(y\pm a)^{2}\right]^{-3/2}=\left[x^{2}+y^{2}+a^{2}\pm 2ay\right]^{-3/2}=r^{-3}\left[1+\frac{a^{2}\pm 2ay}{r^{2}}\right]^{-3/2} \qquad (2-45)$$

در حد $r\gg a$ از بسط تیلور $s\equiv (a^{2}\pm 2ay)/r^{2}$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$(1+s)^{-3/2}=1-\frac{3}{2}s+\frac{15}{8}s^{2}-\cdots \qquad (2-46)$$

که اگر در رابطه‌های (۲-۴۱) و (۲-۴۳) قرار دهیم، مولفه‌های E_x و E_y به صورت زیر در می‌آیند

$$E_x=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6xya}{r^{5}}+\cdots \quad , \quad E_y=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2a}{r^{3}}+\frac{6y^{2}a}{r^{5}}\right) \qquad (2-47)$$

در اینجا از مرتبه های بالاتر، $O(s^{2})$ ، چشم پوشی کردیم. بنابراین، میدان الکتریکی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}=E_x\hat{\mathbf{i}}+E_y\hat{\mathbf{j}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2a}{r^{3}}\hat{\mathbf{j}}+\frac{6ya}{r^{5}}(x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}})\right]=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}}\left[\frac{3yx}{r^{2}}\hat{\mathbf{i}}+\left(\frac{3y^{2}}{r^{2}}-1\right)\hat{\mathbf{j}}\right] \qquad (2-48)$$

در این‌جا از تعریف گشتاور دوقطبی الکتریکی $p\equiv 2qa$ استفاده کردیم. حال اگر از $\sin\theta=x/r$ و $\cos\theta=y/r$ استفاده کنیم و رابطه‌ی بالا را برحسب مختصات قطبی بنویسیم، خواهیم داشت

$$E_x=\frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}}\sin\theta\cos\theta \quad , \quad E_y=\frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}}\left(3\cos^{2}\theta-1\right) \qquad (2-49)$$

که همان رابطه‌ی (۲-۴۴) است.

در مختصات قطبی رابطه‌ی (۲-۴۹) را به صورت $\mathbf{E}(r,\theta)=E_r\hat{\mathbf{r}}+E_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ هم می‌توان نوشت که در آن

$$E_r=\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}} \quad , \quad E_\theta=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}} \qquad (2-50)$$

این رابطه‌ها از رابطه‌ها (۲-۴۸) به دست می‌آیند. داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(r,\theta)&=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}}\left[3\sin\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\left(3\cos^{2}\theta-1\right)\hat{\mathbf{j}}\right]\\&=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}}\left[2\cos\theta\left(\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)+\sin\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\left(\cos^{2}\theta-1\right)\hat{\mathbf{j}}\right]\\&=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}}\left[2\cos\theta\left(\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)+\sin\theta\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}-\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)\right]\end{aligned} \qquad (2-51)$$

در بالا از اتحاد مثلثاتی $(\cos^{2}\theta-1)=-\sin\theta$ استفاده کردیم. چون بردارهای یکه‌ی مختصات قطبی، $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$، عبارتند از

$$\hat{\mathbf{r}}=\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\,, \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}=\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}-\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (2-52)$$

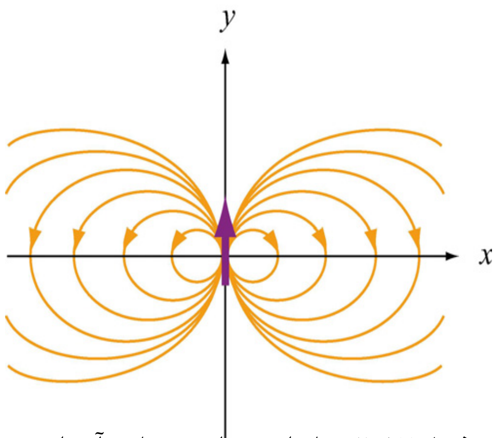
بنابراین، میدان الکتریکی، رابطه‌ی (۲-۵۱)، در مختصات قطبی به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{E}(r,\theta)=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}}\left[2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}+\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right] \qquad (2-53)$$

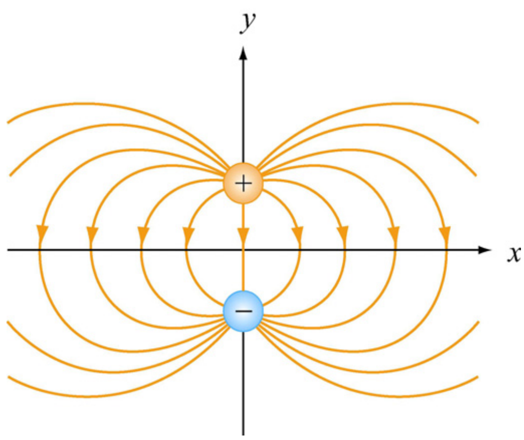
نکته‌ی مهمی که باید به آن توجه کرد این است که میدان الکتریکی دوقطبی الکتریکی با افزایش r به صورت $1/r^{3}$ کاهش پیدا می‌کند؛ در حالی‌که میدان بار نقطه ای به صورت $1/r^{2}$ است. این رفتار برای میدان دوقطبی دور از انتظار نیست؛ چون بار کل دوقطبی صفر است و بنابراین، در فاصله‌های دور باید هم سریع تر از $1/r^{2}$ افت پیدا کند. اندازه‌ی $\mathbf{E}$ برابر است با

$$E = \left(E_r^{2} + E_\theta^{2}\right)^{1/2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta + 1\right)^{1/2} \qquad (2\text{-}54)$$

در شکل (۱۶-۲) خط‌های میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی غیرآرمانی و در شکل (۱۷-۲) خط‌های میدان یک دوقطبی آرمانی نقطه‌ای نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۷-۲ خط‌های میدان دوقطبی آرمانی



شکل ۱۶-۲ خط‌های میدان دوقطبی غیر آرمانی

سرانجام این که چون $3\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = 3pr\cos\theta$ است، با اندک عملیات جبری رابطه‌ی (۴۹-۲) را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}\right) \qquad (2\text{-}55)$$

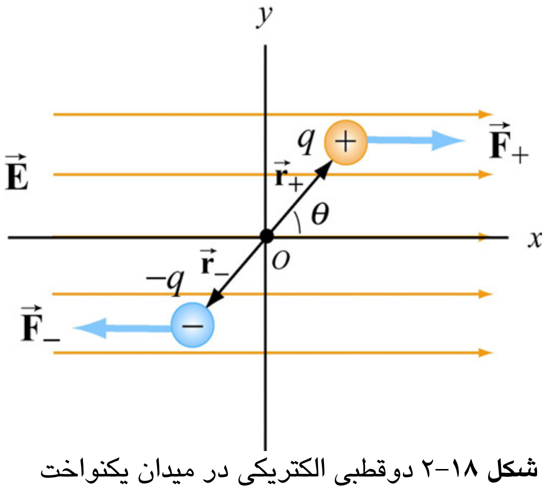
این شکل میدان در سه بعد هم که $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ است، برقرار است.

۲-۳-۲ دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی

اگر یک دوقطبی الکتریکی چنان در میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{i}}$ قرار گیرد که همانند شکل (۱۸-۲) بردار گشتاور آن بامحور x زاویه بسازد، دوقطبی الکتریکی چه رفتاری خواهد داشت؟ از شکل (۱۸-۲) پیداست که بردار یکه‌ی در جهت $\mathbf{p}$ به صورت $\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}$ است. بنابراین، داریم

$$\mathbf{p} = 2qa(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}) \qquad (2\text{-}56)$$

نیرویی که از طرف میدان به هر یک از بارهای دوقطبی وارد می‌شود برابر و در جهت خلاف هم اند. بنابراین، نیروی برآیند وارد به دوقطبی $\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = 0$ است. اگرچه نیروی کل صفر است، اما چون نیروها جفت اند، میدان الکتریکی به دوقطبی گشتاور غیر صفر وارد می‌کند. این گشتاور نسبت به وسط دوقطبی، نقطه‌ی O، عبارت است از



شکل ۱۸-۲ دوقطبی الکتریکی در میدان یکنواخت

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+ + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_- = \left(a\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + a\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right) \times \left(F_+\hat{\mathbf{i}}\right) + \left(-a\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - a\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right) \times \left(-F_-\hat{\mathbf{i}}\right)$$
$$= a\sin\theta F_+\left(-\hat{\mathbf{k}}\right) + a\sin\theta F_-\left(-\hat{\mathbf{k}}\right) = ۲aF\sin\theta\left(-\hat{\mathbf{k}}\right) \qquad (۲-۵۷)$$

که در آن از $F_+ = F_- \equiv F$ استفاده کردیم. جهت گشتاور، $(-\hat{\mathbf{k}})$، به سوی درون صفحه است. این گشتاور دوقطبی الکتریکی را **ساعتگرد** می‌چرخاند و بردار $\mathbf{p}$ را در جهت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ قرار می‌دهد. چون $F = qE$ است، پس اندازه‌ی گشتاور برابر

$$\tau = ۲a\left(qE\right)\sin\theta = \left(۲aq\right)E\,\sin\theta = pE\,\sin\theta \qquad (۲-۵۸)$$

است. در نتیجه، رابطه‌ی عمومی گشتاور وارد به دوقطبی الکتریکی واقع در میدان یکنواخت $\mathbf{E}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad (۲-۵۹)$$

بنابراین، دیده می‌شود که ضرب خارجی گشتاور دوقطبی الکتریکی و میدان $\mathbf{E}$ با گشتاوری که از سوی میدان الکتریکی به دوقطبی وارد می‌شود، برابر است.

۲-۳-۳ انرژی پتانسیل دوقطبی الکتریکی

وقتی دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی قرار بگیرد، از سوی میدان به آن گشتاور وارد می‌شود. میدان الکتریکی از طریق گشتاوری که به دوقطبی وارد می‌کند، آن را می‌چرخاند. مقدار کاری که میدان الکتریکی برای چرخاندن دوقطبی الکتریکی به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک $d\theta$ انجام می‌دهد، عبارت است از

$$dW = -\tau\,d\theta = -pE\,\sin\theta\,d\theta \qquad (۲-۶۰)$$

علامت منها به این معنی است که گشتاور با هرگونه افزایش θ **مخالفت** می‌کند. پس، کار کل میدان الکتریکی برای چرخاندن دوقطبی از زاویه‌ی $\theta_۰$ به زاویه‌ی θ برابر است با

$$W = \int_{\theta_۰}^{\theta}\left(-pE\,\sin\theta\right)d\theta = pE\left(\cos\theta - \cos\theta_۰\right) \qquad (۲-۶۱)$$

بنابراین، وقتی $\cos\theta > \cos\theta_۰$ باشد، کار میدان الکتریکی **مثبت** است. تغییر انرژی پتانسیل، ΔU، دوقطبی برابر است با منهای کار میدان الکتریکی:

$$\Delta U = U - U_۰ = -W = -pE\left(\cos\theta - \cos\theta_۰\right) \qquad (۲-۶۲)$$

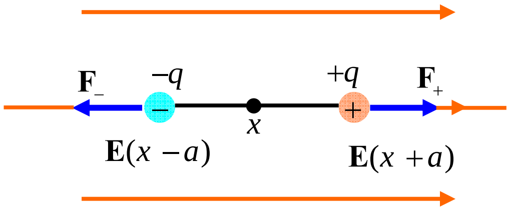
که در آن $U_۰ = -pE\,\cos\theta_۰$ انرژی پتانسیل اولیه‌ی دوقطبی در نقطه‌ی مرجع است. نقطه‌ی مرجع را ما در $\theta_۰ = \pi/۲$ انتخاب می‌کنیم تا $U_۰ = ۰$ باشد. بنابراین، انرژی پتانسیل دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی

$$U = -pE\,\cos\theta = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} \qquad (۲-۶۳)$$

است. وقتی انرژی پتانسیل سامانه‌ای کمینه باشد، سامانه در حالت ترازمندی پایدار است. برای دوقطبی این وضعیت هنگامی پدید می‌آید که گشتاور دوقطبی، $\mathbf{p}$، و میدان $\mathbf{E}$ هم جهت باشند تا انرژی پتانسیل کمینه $U_{\min} = -pE$ شود. اگر $\mathbf{p}$ و $\mathbf{E}$ پادموازی باشند، انرژی پتانسیل سامانه بیشینه‌ی مقدار خود، $U_{\max} = +pE$ ، را خواهد داشت و سامانه ناپایدار خواهد بود. اگر دوقطبی الکتریکی در میدان نایکنواخت قرار گیرد، افزون بر گشتاور، به آن نیروی غیر صفر نیز وارد می‌شود و حرکت سامانه آمیزه‌ای از حرکت شتاب‌دار و چرخش خواهد شد.

فرض کنید در شکل (۲-۱۹) میدان الکتریکی $\mathbf{E}_+$ در مکان بار $+q$ با میدان الکتریکی $\mathbf{E}_-$ در مکان بار $-q$ فرق دارد (یعنی میدان نایکنواخت است). فرض کنید دوقطبی الکتریکی بسیار کوچک است. در این صورت میدان‌ها را حول x می‌توان بسط داد.

$$E_+(x+a)\approx E(x)+a\left(\frac{dE}{dx}\right),\qquad E_-(x-a)\approx E(x)-a\left(\frac{dE}{dx}\right)\tag{۲-۶۴}$$

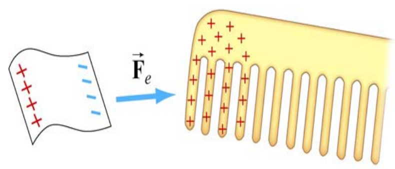


شکل ۲-۱۹ نیروی وارد به دوقطبی

و بنابراین، نیروی وارد به دوقطبی به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{F}_e=q\left(\mathbf{E}_+-\mathbf{E}_-\right)=۲qa\left(\frac{dE}{dx}\right)\hat{\mathbf{i}}=p\left(\frac{dE}{dx}\right)\hat{\mathbf{i}}\tag{۲-۶۵}$$

ربایش بین ریزه‌های کاغذ و شانه‌ای که با شانه کردن مو باردارشده است، نمونه‌ای از نیروی غیر صفر است که به دوقطبی وارد می‌شود. کاغذ، گشتاورهای دوقطبی الکتریکیِ القایی دارد (در فصل مربوط به دی‌الکتریک‌ها به آن خواهیم پرداخت). شانه باردار است و میدان الکتریکی دارد. اما به خاطر شکل نامنظم شانه، میدان آن یکنواخت نیست (شکل ۲-۲۰).

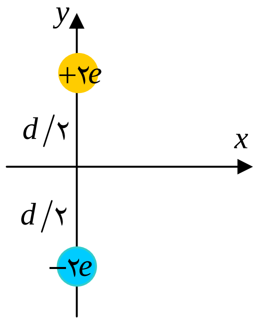


شکل ۲-۲۰ رایش الکتریکی بین شانه و کاغذ

مثال ۲-۵ دوقطبی در میدان یکنواخت: دوقطبی شکل (۲-۲۱) از دو بار $q_۱=+۲e$ و $q_۲=-۲e$ تشکیل شده است. بارها در روی محور y و به فاصله‌ی d از هم قرار دارند.

(الف): جهت و اندازه‌ی گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}$ آن را حساب کنید.

(ب): در میدان الکتریکی ثابت $\mathbf{E}=\left(۳\hat{\mathbf{i}}+۳\hat{\mathbf{j}}\right)$ به این دوقطبی چه گشتاوری وارد می‌شود؟ انرژی پتانسیل دوقطبی چیست؟



شکل ۲-۲۱ دوقطبی الکتریکی

حل: **(الف)** گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}=q_۱\mathbf{r}_۱+q_۲\mathbf{r}_۲$ است که در آن $\mathbf{r}_i$ برداری از مبداء به سوی بار q_i است. برای این مثال داریم $\mathbf{r}_۱=(d/۲)\hat{\mathbf{j}}$ و $\mathbf{r}_۲=-(d/۲)\hat{\mathbf{j}}$. بنابراین، گشتاور دوقطبی عبارت است از

$$\mathbf{p}=(۲e)(d/۲)\hat{\mathbf{j}}+(-۲e)(-d/۲)\hat{\mathbf{j}}=۲ed\,\hat{\mathbf{j}}\tag{۲-۶۶}$$

می‌بینیم که جهت گشتاوردوقطبی $+\hat{\mathbf{j}}$ و از بار منفی به سوی بار مثبت است. اندازه‌ی آن $|\mathbf{p}|=۲ed$ است.

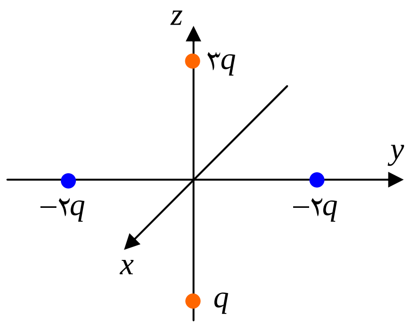
(ب):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}&=\mathbf{p}\times\mathbf{E}=(۲ed)\hat{\mathbf{j}}\times\left(۳\hat{\mathbf{i}}+۳\hat{\mathbf{j}}\right)=-۶ed\,\hat{\mathbf{k}}\\ U&=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}=-(۲ed)\hat{\mathbf{j}}\cdot\left(۳\hat{\mathbf{i}}+۳\hat{\mathbf{j}}\right)=-۶ed\end{aligned}\tag{۲-۶۷}$$

مثال ۲-۶ دوقطبی چهار بار: چهار بار الکتریکی برابر شکل (۲-۲۲) قرار دارند. فاصله‌ی هر بار از مبداء مختصات d است. گشتاور دوقطبی این آرایه را حساب کنید.

حل:

$$\mathbf{p}=(۳qd-qd)\hat{\mathbf{k}}+\left(-۲qd-۲q(-d)\right)\hat{\mathbf{j}}=۲qd\,\hat{\mathbf{k}}\tag{۲-۶۸}$$



شکل ۲۲-۲ آرایه‌ای با چهار بار

حل:

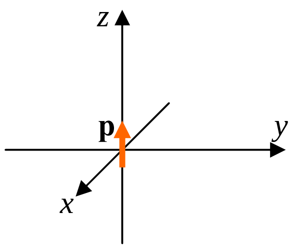
$$\mathbf{p}=(3qd-qd)\hat{\mathbf{k}}+(-2qd-2q(-d))\hat{\mathbf{j}}=2qd\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲\text{-}۶۸)$$

مثال ۷-۲ بار الکتریکی و دوقطبی: یک دوقطبی آرمانی (نقطه‌ای) با گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}=p\,\hat{\mathbf{k}}$ برابر شکل (۲۳-۲) در مبداء مختصات قرار دارد.

(الف): به بار نقطه‌ای q جایگزیده در $(a,0,0)$ چه نیرویی وارد می‌شود

(ب): به بار نقطه‌ای q جایگزیده در $(0,0,a)$ چه نیرویی وارد می‌شود؟

حل: **(الف)** دوقطبی در فضای پیرامون خود میدان الکتریکی تولید می‌کند. در مختصات قطبی این میدان با رابطه‌ی (۵۰-۲) یا رابطه‌ی (۵۳-۲) داده شده است. زاویه‌ی بین $\mathbf{p}$ و مکان بار q در این حالت $\theta=90^\circ$ است. از رابطه‌ی (۵۳-۲) دیده می‌شود که



شکل۲۳-۲ دوقطبی آرمانی در مبداء

$$\mathbf{E}(r,\theta)=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[2\cos 90^\circ\,\hat{\mathbf{r}}+\sin 90^\circ\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]$$

$$=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{\boldsymbol{\theta}}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}(-\hat{\mathbf{k}})$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{F}=q\mathbf{E}=-\frac{pq}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲\text{-}۶۹)$$

(ب): در این حالت $\theta=0$ است و از رابطه‌ی (۵۳-۲) داریم

$$\mathbf{E}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[2\cos 0^\circ\,\hat{\mathbf{r}}+\sin 0^\circ\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}(2\hat{\mathbf{r}})=\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲\text{-}۷۰)$$

۴-۲ توزیع پیوسته بار

تعریف ما از میدان الکتریکی، رابطه‌ی (۱۰-۲) بر حسب بارهای چشمه‌ای نقطه‌ای و گسسته‌ی q_i بود. ولی بارهای گسسته‌ی نقطه‌ای تنها آرایه‌ی باری نیستند. بیشتر وقت‌ها با توزیع پیوسته بار الکتریکی در یک ناحیه از فضا روبرو خواهیم شد. چگونه می‌توان میدان حاصل از چنین توزیع پیوسته بار الکتریکی را حساب کرد؟ توجه کنید که قانون کولمب و اصل برنهی تنها ابزارهای محاسباتی اند که در دسترس ماست و می‌دانیم که قانون کولمب تنها برای بارهای نقطه‌ای ـ وگسسته ـ درست و قابل استفاده است نه برای بار پیوسته.

نام‌گذاری: اگر بار به طور پیوسته و در یک بعد (بر روی یک خط یا خم) توزیع شده باشد آن را **توزیع بار خطی** می‌گوییم شکل (۲۴-۲ ب). چگالی توزیع بار خطی مقدار بار موجود در واحد طول است. آن را با حرف یونانی λ نشان خواهیم داد.

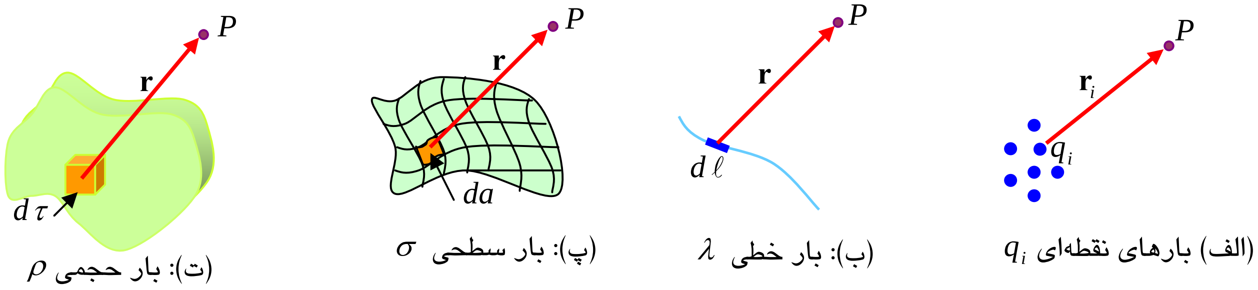
اگر بار در سطح یک رویه توزیع شود آنگاه **توزیع بار سطحی** داریم . چگالی بار سطحی مقداربار موجود در واحد سطح است. آن را با حرف σ نشان خواهیم داد. (شکل ۲۴-۲ پ)

اگربار در حجم توزیع شده باشد آن را **توزیع بار حجمی** می‌نامیم. چگالی بار حجمی مقداربار موجود در واحد حجم است و با حرف ρ نشان خواهیم داد. (شکل ۲۴-۲ ت)

برای اینکه بتوانیم قانون کولمب را برای توزیع پیوسته بار بکار ببریم، آن را به اجزاء بسیار ریز تقسیم می‌کنیم و هر جزء را

همانند یک بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. در شکل (۲۴-۲) جزء بار dq برای هر یک از توزیع های بالا نشان داده شده است. اگر هر جزء بار را dq بنامیم، آنگاه برای توزیع بارهای نقطه‌ای شکل (۲۴-۲ الف) $dq = q_i$ ، برای توزیع بار خطی شکل (۲۴-۲ ب)، $dq = \lambda d\ell$ ، برای توزیع بارسطحی شکل (۲۴-۲ پ)، $dq = \sigma da$ و برای توزیع حجمی بار در شکل (۲۴-۲ ت) $dq = \rho d\tau$ خواهند بود که در آنها

به ترتیب، $d\ell$ جزء طول، da جزء سطح و $d\tau$ جزء حجم اند.



شکل ۲۴-۲ توزیع بار کسسته، خطی، سطحی و حجمی

چگالی بار خطی در حدی که $d\ell$ در مقایسه با طول خم وفاصله‌اش تا نقطه‌ی میدان بسیار کوچک باشد به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\lambda(\mathbf{r}') = \frac{dq}{d\ell} \qquad (۲-۷۱)$$

که در آن $\mathbf{r}'$ بردار مکان جزء بار dq نسبت به مبداء مختصات است. در سامانه‌ی یکاهای SI یکای λ کولمب بر متر $(\mathrm{C/m})$ است. بار کل روی خم L را می‌توان به صورت انتگرال نوشت

$$Q = \int_L \lambda(\mathbf{r}')d\ell' \qquad (۲-۷۲)$$

به همین ترتیب می‌توان چگالی بار سطحی را تعریف کرد. در حدی که جزء سطح da بسیار کوچک است داریم

$$\sigma(\mathbf{r}') = \frac{dq}{da} \qquad (۲-۷۳)$$

در سامانه‌ی یکاهای SI یکای σ کولمب بر مترمربع $(\mathrm{C/m^2})$ است. بار کل موجود در سطح S عبارت است از

$$Q = \iint_S \sigma(\mathbf{r}')da \qquad (۲-۷۴)$$

و سرانجام ، چگالی بار حجمی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(\mathbf{r}') = \frac{dq}{d\tau} \qquad (۲-۷۵)$$

یکای ρ در سامانه‌ی یکاهای SI کولمب بر مترمکعب $(\mathrm{C/m^3})$ است. بار موجود در حجم V برابر است با

$$Q = \iiint_V \rho(\mathbf{r}')d\tau \qquad (۲-۷۶)$$

چگالی توزیع بار، λ ، σ و ρ تابع مکان اند و در حالت کلی مقدار ثابتی نیستند. اگر چگالی توزیع بار به مکان بستگی نداشته باشد، توزیع بار را **توزیع یکنواخت** می‌نامیم

توجه کنید که از این پس، همواره انتگرال‌های دوگانه و سه‌گانه را با یک علامت انتگرال نشان خواهیم داد.

اینک می‌توانیم قانون کولمب را برای توزیع پیوسته‌ی بار هم تعمیم دهیم. کافی است در رابطه‌ی (۱۰-۲) علامت جمع روی بارهای نقطه‌ای را به علامت جمع پیوسته یا **انتگرال** تبدیل کنیم و به جای q_i از dq مربوط به توزیع بار استفاده کنیم. بنابراین،

$$\sum_{i=1}^{n}(\ )q_i \sim \int_L(\ )\lambda d\ell \sim \int_S(\ )\sigma da \sim \int_V(\ )\rho d\tau \qquad (۲-۷۷)$$

انتگرال‌ها روی خم ℓ ، سطح S وحجم V گرفته می‌شوند که شامل توزیع بار خطی، توزیع بار سطحی و توزیع بار حجمی اند. پس، میدان حاصل از یک توزیع بار خطی با چگالی بار λ در نقطه‌ی P عبارت است از

$$\mathbf{E}(P)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_L\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^۲}\lambda d\ell \qquad (۲-۷۸)$$

و برای توزیع بارهای سطحی داریم

$$\mathbf{E}(P)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_S\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^۲}\sigma da \qquad (۲-۷۹)$$

و سرانجام، میدان یک توزیع بار حجمی با چگالی ρ در نقطه‌ی P با انتگرال زیر داده می‌شود

$$\mathbf{E}(P)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_V\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^۲}\rho d\tau \qquad (۲-۸۰)$$

به معنی r در این رابطه‌ها توجه کنید. r در رابطه‌های (۸۰-۲) – (۷۸-۲) فاصله‌ی جزء بار (یعنی فاصله از $d\ell$ ، da و $d\tau$ در شکل (۲۴-۲)) تا نقطه‌ی P است و از یک جزء به جزء دیگر تغییر می‌کند. اگر مختصات جزء بار یا چشمه (x',y',z') و مختصات نقطه‌ی $P=(x,y,z)$ باشند، آنگاه در دستگاه مختصات کارتزی داریم

$$\mathbf{r}=(x-x')\,\hat{\mathbf{i}}+(y-y')\hat{\mathbf{j}}+(z-z')\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۸۱)$$

و اندازه‌ی آن، r ، برابر

$$r=\left[(x-x')^۲+(y-y')^۲+(z-z')^۲\right]^{۱/۲} \qquad (۲-۸۲)$$

است. بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ عبارت است از $\hat{\mathbf{r}}=\mathbf{r}/r$.

بنابراین، میدان حاصل از توزیع بار حجمی ρ در نقطه $P=(x,y,z)$ عبارت است از

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_V\frac{(x-x')\hat{\mathbf{i}}+(y-y')\hat{\mathbf{j}}+(z-z')\hat{\mathbf{k}}}{\left[(x-x')^۲+(y-y')^۲+(z-z')^۲\right]^{۳/۲}}\rho(x',y',z')dx'dy'dz' \qquad (۲-۸۳)$$

توزیع بار ρ فقط تابع مکان بار است و انتگرال‌گیری روی فضایی است که شامل بار است. بنابراین، در رابطه‌ی (۸۳-۲) داریم $d\tau=dx'\,dy'\,dz'$. در این رابطه و نیز در رابطه‌های (۸۰-۲)- (۷۹-۲) در واقع انتگرال‌ها چندگانه (سه گانه و دوگانه) اند، اما برای سادگی آنها را با یک علامت انتگرال نشان دادیم.

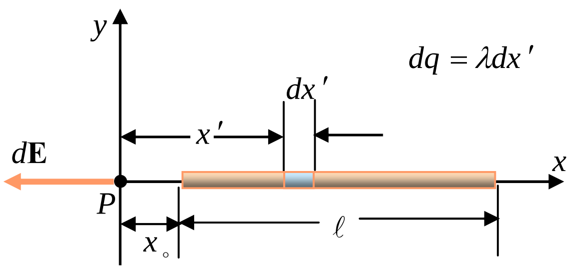
نکته‌ی ۱ : در معادله‌های (۸۰-۲)- (۷۸-۲) نقطه‌ی $P(x,y,z)$ نقطه‌ی ثابتی است، اما متغیرهای انتگرال‌گیری، x',y',z'، در تمام فضایی که بار وجود دارد تغییر می‌کنند. با این کار سهم همه‌ی اجزاء بار را در میدان الکتریکی جمع می‌کنند. به بیان دیگر، چگالی بار الکتریکی λ، σ و ρ توابعی از متغیرهای انتگرال‌گیری اند. برای مثال $\rho=\rho(x',y',z')$ است. جهت بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ از (x',y',z') به (x,y,z) است.♣

نکته‌ی ۲: در همسایگی یک بار نقطه‌ای میدان الکتریی به صورت $۱/r^۲$ رفتار می‌کند و با نزدیک شدن به بار نقطه‌ای $(r\to ۰)$

بینهایت می‌شود. در نتیجه، میدان الکتریکی در **مکان** بار نقطه‌ای بی‌معنی می‌شود. به هر حال، چشمه‌ی فیزیکی تولید کننده‌ی میدان تمرکز بار الکتریکی در حجم صفر نیست، بلکه توزیعی در حجم محدود است. بنابراین، تکنیگی ریاضی را در زبان بار نقطه‌ای نادیده خواهیم گرفت. میدان حاصل از توزیع پیوسته، مانند $\rho(x',y',z')$، که در جایی بینهایت نیست، دردسر تکنیگی هم ندارد. می‌توان آن را در معادله‌ی (۸۰-۲) به کار برد و میدان را در هر نقطه‌ای در درون توزیع بار حساب کرد. انتگرال در $r=0$ بینهایت نمی‌شود، چون در این حد، جزء حجم در صورت کسر با r^2dr متناسب است. به بیان دیگر، اگر ρ در همه‌جا متناهی باشد، میدان هم در همه‌جا، حتی در درون و در مرزهای توزیع بار، متناهی خواهد بود♣

مثال ۸-۲ میدان الکتریکی در روی محور یک میله‌ی راست: بار مثبت Q به طور یکنواخت بر روی میله‌ای به طول ℓ توزیع شده است. چگالی بار λ است. میله برابر شکل (۲۵-۲) روی محور x قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی x_0 از یک انتهای میله حساب کنید.

حل: چگالی بار خطی یکنواخت و برابر $\lambda=Q/\ell$ است. جزء طول $d\ell=dx'$ را در روی میله انتخاب کنید. مقدار بار این جزء طول $dq=\lambda dx'$ است.چون بار میله مثبت است، جهت میدان این جزء بار در نقطه‌ی P به سوی $-\hat{\mathbf{i}}$ است. جهت بردار یکه از چشمه به نقطه‌ی P عبارت است از $\hat{\mathbf{r}}=-\hat{\mathbf{i}}$. بنابراین، میدان جزء بار dq در نقطه‌ی P برابر است با



شکل ۲۵-۲ میدان میله در راستای آن

$$d\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{x'^2}(-\hat{\mathbf{i}})$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qdx'}{\ell x'^2}\hat{\mathbf{i}} \qquad (۲-۸۴)$$

با انتگرال گرفتن بر روی همه‌ی طول میله (جایی که بار وجود دارد)، میدان کل در نقطه‌ی P به‌دست می‌آید (این انتگرال‌گیری کار برد اصل برنهی است).

$$\mathbf{E}=\int d\mathbf{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\ell}\int_{x_0}^{x_0+\ell}\frac{dx'}{x'^2}\hat{\mathbf{i}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\ell}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0+\ell}\right)\hat{\mathbf{i}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x_0(\ell+x_0)}\hat{\mathbf{i}} \qquad (۲-۸۵)$$

حالت حدی: اگر نقطی P در فاصله‌ی بسیار دور از انتهای میله باشد، $x_0\gg\ell$ ، باشد، در مخرج رابطه‌ی بالا از ℓ در برابر x_0 می‌توان چشم پوشی کرد. رابطه‌ی (۸۵-۲) به تقریب به صورت زیر در می‌آید

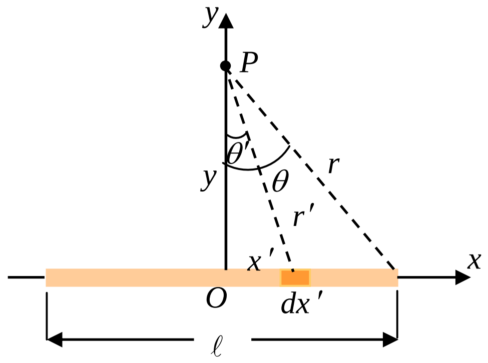
$$\mathbf{E}\approx-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x_0^2}\hat{\mathbf{i}} \qquad (۲-۸۶)$$

این نتیجه دور از انتظار نیست؛ چون از فاصله‌ی دور توزیع بار به صورت یک بار نقطه‌ای Q به نظر می‌رسد و تمایز بین توزیع پیوسته‌ی بار و بار نقطه‌ای از بین می‌رود.

مثال ۹-۲ میدان الکتریکی میله در راستای عمود بر آن: شکل (۲۶-۲) میله ای به طول ℓ را نشان می‌دهد که بار کل Q به طور یکنواخت بر روی آن توزیع شده است. چگالی بار خطی، λ است. میدان الکتریکی را در فاصله‌ی y از وسط میله حساب کنید.

حل: در اینجا هم روش مثال ۸-۲ را برمی‌گزینیم. مقدار بار موجود در جزء طول $d\ell = dx'$ برابر $dq = \lambda dx'$ است. میدان این جزء بار در نقطه‌ی P عبارت است از

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r'^2}\hat{\mathbf{r}}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2}\hat{\mathbf{r}}' \qquad (۲-۸۷)$$



شکل ۲-۲۶ میدان میله در نقطه‌ای روی محور

با استفاده از تقارنی که در این مسئله وجود دارد و در شکل (۲-۲۷) نشان داده شده است، می‌توان دید که مولفه‌ی x میدان الکتریکی حذف می‌شود. بنابراین، کافی است که مولفه‌ی y میدان را حساب کنیم

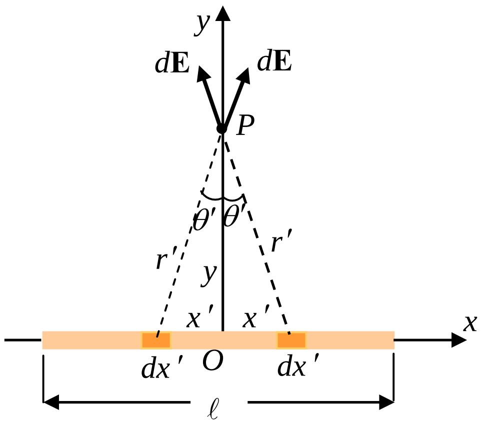
$$dE_y = dE\cos\theta' \qquad (۲-۸۸)$$

با توجه به شکل می‌بینیم که

$$\cos\theta' = \frac{y}{r'} = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} \qquad (۲-۸۹)$$

بنابراین، داریم

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2}\left(\frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda y dx'}{\left(x'^2 + y^2\right)^{3/2}} \qquad (۲-۹۰)$$



شکل ۲-۲۷ نمایش تقارن توزیع بار

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۲-۹۰) درروی میله، میدان کل به‌دست می‌آید

$$E_y = \int dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{\lambda y dx'}{\left(x'^2 + y^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{dx'}{\left(x'^2 + y^2\right)^{3/2}} \qquad (۲-۹۱)$$

اگر از تغییر متغیر $x' = y\tan\theta'$ استفاده کنیم. خواهیم داشت: $dx' = y\sec^2\theta' d\theta'$ و بنابراین، داریم

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{dx'}{\left(x'^2 + y^2\right)^{3/2}} = \int_{-\theta}^{\theta}\frac{y\sec^2\theta'}{y^3\left(\sec^2\theta' + 1\right)^{3/2}} = \frac{1}{y^2}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{\sec^2\theta'}{\left(\tan^2\theta' + 1\right)^{3/2}} = \frac{1}{y^2}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{\sec^2\theta'}{\sec^3\theta'}$$

$$= \frac{1}{y^2}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{d\theta'}{\sec\theta'} = \frac{1}{y^2}\int_{-\theta}^{\theta}\cos\theta' d\theta' = \frac{2\sin\theta}{y^2} \qquad (۲-۹۲)$$

که با جاگذاری در رابطه‌ی (۲-۹۱) به دست می‌آید:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda\sin\theta}{y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{y}\frac{\ell/2}{\sqrt{y^2 + (\ell/2)^2}} \qquad (۲-۹۳)$$

حالت‌های حدی: در حدی که فاصله‌ی نقطه‌ی P از میله بسیار دور است $(y \gg \ell)$ می توان در مخرج کسر از $\ell/2$ در برابر y چشم پوشی کرد. رابطه‌ی بالا آنگاه به صورت زیر در می‌آید

$$E_y \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{y}\frac{\ell/2}{y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\ell}{y^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{y^2} \qquad (۲-۹۴)$$

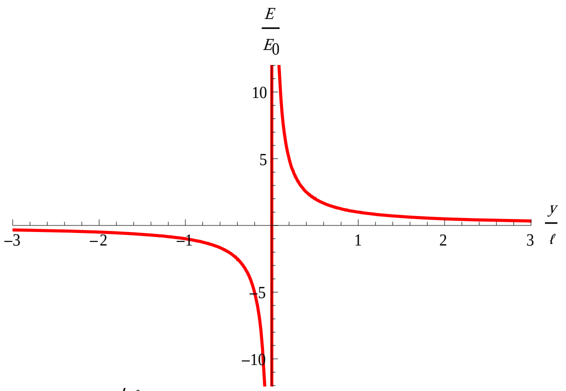
در فاصله‌های خیلی دور$(y \gg \ell)$ میله همانند بار نقطه‌ای با مقدار بار $Q = \lambda\ell$ به نظر می‌رسد و بنا به قانون کولمب، میدان

بار نقطه‌ای در فاصله‌ی y همان پاسخ رابطه‌ی (۲-۹٤) است.

در حد $y \gg \ell$ رابطه‌ی (۲-۹۳) به رابطه‌ی زیر کاهش می‌یابد

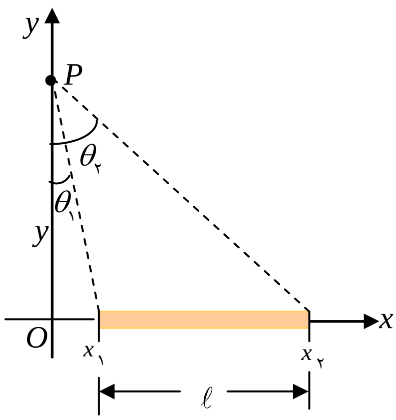
$$E_y \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{y} \tag{۲-۹۵}$$

در این حد، سامانه همانند سیم بینهایت دراز است و از تقارن استوانه‌ای برخوردار است. در فصل ٤ ، نشان خواهیم داد چگونه می‌توان رابطه‌ی (۲-۹۵) را دوباره به دست آورد. در شکل (۲-۲۸) رفتار سرشتی E_y/E_0 (با $E_0 = Q/(4\pi\varepsilon_0\ell^2)$) برحسب y/ℓ نشان داده شده است. رابطه‌ی (۲-۹۵) میدان سیم بینهایت دراز با چگالی بار خطی یکنواخت λ است.



شکل ۲-۲۸ میدان میله برحسب y/ℓ

مثال ۱۰-۲ میدان الکتریکی میله در نقطه‌ای بیرون محور: میله‌ای به طول ℓ با چگالی بار خطی λ و بار کل Q روی محور x قرار دارد. میدان الکتریکی آن را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی y از محور میله به دست آورید . شکل (۲-۲۹) را ببینید.



شکل ۲-۲۹ میدان میله در نقطه‌ای دور از محور

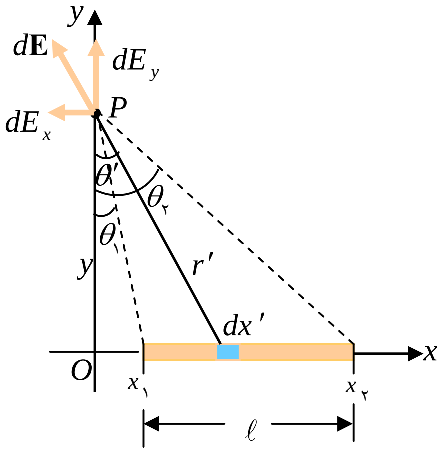
حل: این مسئله را هم با همان روش دو مثال پیش می‌توان حل کرد. جزء طول dx' را برابر شکل (۲-۳۰) در روی میله در نظر بگیرید. بار موجود در این جزء طول $dq = \lambda dx'$ است. میدان الکتریکی آن در نقطه‌ی P عبارت است از

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r'^2}\hat{\mathbf{r}}' \tag{۲-۹٦}$$

بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ را می‌توان به صورت $\hat{\mathbf{r}}' = -\sin\theta'\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta'\,\hat{\mathbf{j}}$ نوشت.

در نتیجه، رابطه‌ی (۲-۹٦) به صورت زیر در می‌آید

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r'^2}\hat{\mathbf{r}}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2}\left(-\sin\theta'\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta'\,\hat{\mathbf{j}}\right) \tag{۲-۹۷}$$



شکل ۲-۳۰ میدان الکتریکی میله در نقطه‌ی P

در این مثال تقارن وجود ندارد و در نتیجه، میدان در نقطه‌ی P ، هم مولفه‌ی x و هم مولفه‌ی y دارد. مولفه‌ی x میدان

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2}\sin\theta' \tag{۲-۹۸}$$

است. همان گونه که از شکل پیداست $\sin\theta' = x'/\sqrt{x'^2 + y^2}$ که اگر در رابطه‌ی بالا قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2}\sin\theta' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2}\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x' dx'}{\left(x'^2 + y^2\right)^{3/2}} \tag{۲-۹۹}$$

انتگرال‌گیری این رابطه از $x'=x_1$ تا $x'=x_2$ مولفه‌ی x میدان الکتریکی را به‌دست می‌دهد

$$E_x=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{x'dx'}{\left(x'^2+y^2\right)^{3/2}}=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_{x_1^2+y^2}^{x_2^2+y^2}\frac{du}{u^{3/2}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}u^{-1/2}\Big|_{x_1^2+y^2}^{x_2^2+y^2}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y^2}}\right]=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left[\frac{y}{\sqrt{x_2^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x_1^2+y^2}}\right]=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right) \qquad (۲-۱۰۰)$$

به همین ترتیب، مولفه‌ی y میدان ناشی از جزء بار عبارت است از

$$dE_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{x'^2+y^2}\cos\theta'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{x'^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x'^2+y^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda y\,dx'}{\left(x'^2+y^2\right)^{3/2}} \qquad (۲-۱۰۱)$$

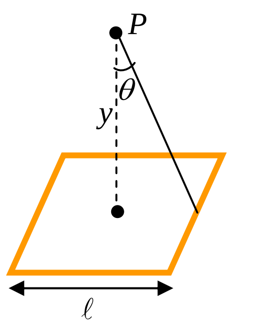
با انتگرال‌گیری روی تمام طول میله، مولفه‌ی y میدان الکتریکی به دست می‌آید

$$E_y=\frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx'}{\left(x'^2+y^2\right)^{3/2}}=\frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta' d\theta'=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right) \qquad (۲-۱۰۲)$$

اگر میله یا سیم بینهایت دراز باشد، یعنی $x_1\to-\infty$ و $x_2\to+\infty$. چون $x_i=y\tan\theta_i$ است، برای میله‌ی بینهایت دراز همچنین داریم $\theta_1\to-\pi/2$ و $\theta_2\to+\pi/2$. در نتیجه، میدان سیم بینهایت دراز با چگالی بار یکنواخت به صورت زیر به دست می‌آید

$$E_{x,\infty}=0\quad,\qquad E_{y,\infty}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{y} \qquad (۲-۱۰۳)$$

که در سازگاری کامل با رابطه‌ی (۲-۹۵) است. برنامه‌ی *پویانمای میدان الکتریکی میله* حالت‌های مختلف را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۳۱ حلقه‌ی مربع

مثال ۲-۱۱ میدان یک حلقه مربع: در شکل (۲-۳۱) حلقه‌ای مربع به ضلع ℓ نشان داده شده است. بار الکتریکی با چگالی خطی λ به طور یکنواخت بر روی حلقه توزیع شده است. میدان الکتریکی حلقه را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی y ازمرکز حلقه حساب کنید.

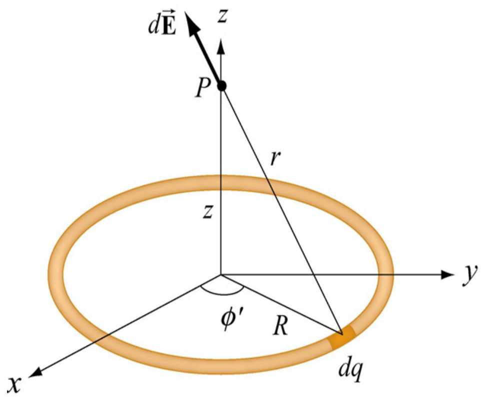
حل: این آرایه از چهار سیم محدود تشکیل شده است. در مثال (۲-۹) میدان سیم محدود را در فاصله‌ی y از وسط آن حساب کردیم؛ رابطه‌ی (۲-۹۳) را ببینید. در این مثال فاصله‌ی نقطه‌ی P از وسط یک ضلع برابر $\sqrt{y^2+(\ell/2)^2}$است. بنابراین، میدان یک ضلع در نقطه‌ی P با جاگذاری $y\to\sqrt{y^2+(\ell/2)^2}$ در رابطه‌ی (۲-۹۳) به‌دست می‌آید. آن را E_1 بنامید.

$$E_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\ell}{\sqrt{y^2+(\ell/2)^2}\,\sqrt{(y^2+\ell^2/4)+\ell^2/4}} \qquad (۲-۱۰۴)$$

در اینجا چهار ضلع داریم و میدان هر کدام برابر E_1 است. چون مولفه‌های افقی این چهار میدان یکدیگر را حذف می‌کنند و میدان برآیند در راستای عمودی خواهد بود. پس، کافی است E_1را در $4\cos\theta$ ضرب کنیم تا میدان حاصل از چهار ضلع به دست آید. چون $\cos\theta=y\Big/\sqrt{y^2+\ell^2/4}$ است، پس

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\lambda\ell y}{(y^2+\ell^2/4)\sqrt{y^2+\ell^2/4}}\,\hat{\mathbf{y}} \qquad (۲-۱۰۵)$$

مثال ۱۲-۲ میدان حلقه‌ی دایره روی محور: حلقه‌ای دایره به شعاع R و با چگالی بار خطی یکنواخت λ و بار کل Q برابر شکل (۳۲-۲) در صفحه‌ی xy قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی z از مرکز حلقه و در روی محور آن حساب کنید.



شکل ۳۲-۲ میدان حلقه‌ی دایره

حل: جزء طول $d\ell'$ را در روی حلقه در نظر بگیرید. بار موجود در این جزء طول $dq = \lambda d\ell' = \lambda(R\,d\phi')$ و میدان آن

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\phi'}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۲-۱۰۶)$$

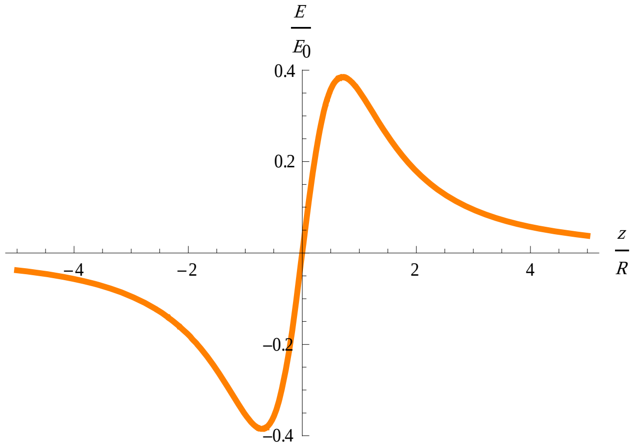
است. این آرایه تقارن دارد و به ازای هر جزء طول $d\ell'$ ، جزء طول متناظری وجود دارد که در شکل (۳۳-۲) نشان داده شده است. با توجه به آن شکل، دیده می‌شود که مولفه‌های افقی یکدیگر را حذف می‌کنند و میدان در نقطه‌ی P فقط مولفه‌ی z دارد.

$$dE_z = dE\,\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\phi'}{(R^2+z^2)}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rzd\phi'}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \qquad (۲-۱۰۷)$$

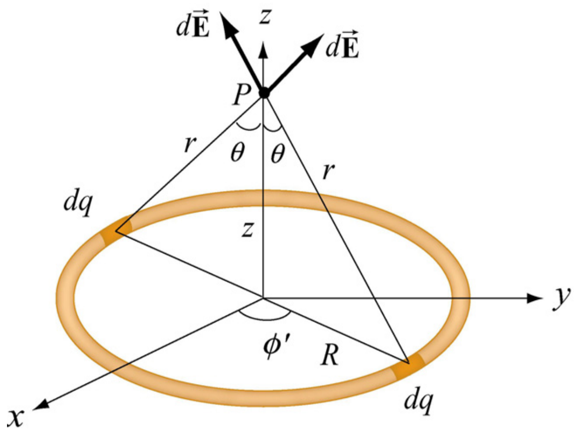
با انتگرال‌گیری روی توزیع بار (روی حلقه) میدان کل حلقه به‌دست می‌آید:

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \qquad (۲-۱۰۸)$$

که در آن $Q = 2\pi R\lambda$ است. در شکل (۳۴-۲) نمودار میدان برحسب تابعی از z رسم شده است.

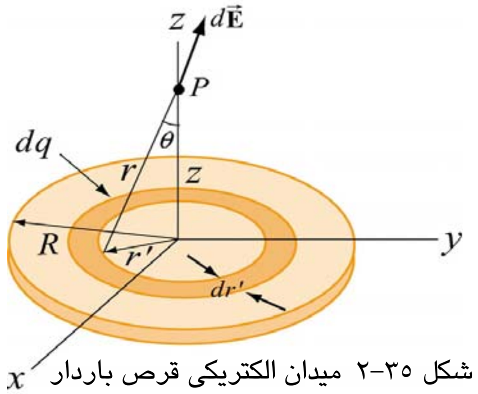


شکل ۳۴-۲ نمودار میدان حلقه برحسب تابعی از z



شکل ۳۳-۲ نمایش تقارن توزیع بار حلقه

در شکل (۳۴-۲) E_0 برابر $E_0 = Q/4\pi\varepsilon_0 R^2$ است. توجه کنید که میدان در مرکز حلقه $(z=0)$ صفر است و همین را هم از تقارن مسئله انتظار داریم.



شکل ۲-۳۵ میدان الکتریکی قرص باردار

مثال ۱۴-۲ میدان قرص باردار: قرصی با چگالی بار سطحی یکنواخت σ و به شعاع R در صفحه‌ی xy قرار دارد. بار کل قرص Q است (شکل ۳۵-۲) . میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی z از مرکز قرص و بر روی محور عمودی آن به دست آورید.

حل: قرص از حلقه‌های هم‌مرکز بسیار زیادی تشکیل شده است. یکی از این حلقه‌ها به شعاع r' و به ضخامت dr' در شکل (۳۵-۲) دیده می‌شود.بار این حلقه $dq=\sigma(2\pi r'dr')$ است که به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. در مثال ۱۳-۲ ، رابطه‌ی (۱۰۸-۲) ، میدان حلقه‌ی با توزیع بار یکنواخت را در فاصله‌ی z از مرکز آن به دست آوردیم. با استفاده از این نتیجه، سهم حلقه در تولید میدان قرص را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dE_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{z\,dq}{\left(r'^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{z\left(2\pi\sigma r'dr'\right)}{\left(r'^2+z^2\right)^{3/2}} \qquad (۲-۱۰۹)$$

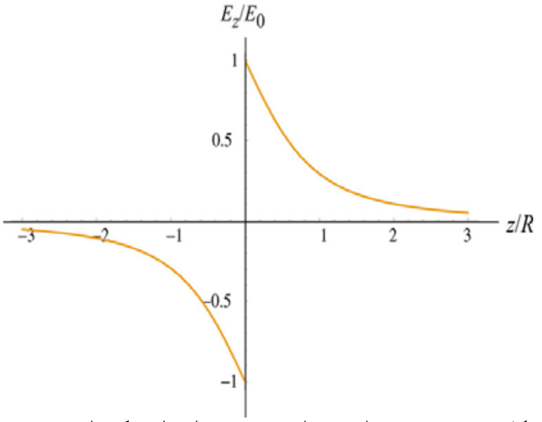
توجه کنید که در مثال ۱۳-۲ توزیع بار خطی و چگالی آن λ بود. در اینجا توزیع بار سطحی است. در واقعچگالی بار" خطی" متناظر در حلقه‌ی به ضخامت dr' در این مثال عبارت است از $"\lambda"=\sigma dr'$. اگر از رابطه‌ی (۱۰۹-۲) از $r'=0$ تا $r'=R$ انتگرال بگیریم، میدان کل قرص در نقطه‌ی P به دست می‌آید.

$$E_z=\int dE_z=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_\circ}\int_0^R\frac{r'dr'}{\left(r'^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{\sigma z}{4\varepsilon_\circ}\int_{z^2}^{R^2+z^2}\frac{du}{u^{3/2}}=\frac{\sigma z}{4\varepsilon_\circ}\frac{u^{-1/2}}{(-1/2)}\Bigg|_{z^2}^{R^2+z^2}$$

$$=-\frac{\sigma z}{2\varepsilon_\circ}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2}}\right]=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_\circ}\left[\frac{1}{|z|}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] \qquad (۲-۱۱۰)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_z=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\left[1-\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right], & z>0\\[2ex] \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\left[-1-\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right], & z>0\end{cases} \qquad (۲-۱۱۱)$$



شکل ۲-۳٦ نمودار میدان قرص باردار یکنواخت

در شکل (۳٦-۲) تغییرات میدان E_z/E_0 برحسب تابعی از z/R رسم شده است ($E_\circ\equiv\sigma/2\varepsilon_\circ$).

حالت‌های حدی: ۱- در حد $z\gg R$ قرص به صورت بار نقطه‌ای با بار کل Q به نظر می‌رسد که در مرکز قرص قرار دارد. از قانون کولمب می‌دانیم که میدان آن در فاصله‌ی z به صورت زیر است:

$$E_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{z^2} \qquad (۲-۱۱۲)$$

است. بنابراین، اگر محاسبه‌ی ما درست باشد، باید رابطه‌ی (۱۱۱-۲) هم در حد $z\gg R$ به این نتیجه بیانجامد. برای بازیافت

رابطه‌ی (۲-۱۱۲) از رابطه‌ی (۲-۱۱۱) ، جمله‌ی دلخل [ ] را بسط تیلور بدهید

$$1-\frac{z}{\sqrt{z^{2}+R^{2}}}=1-\left(1-\frac{R^{2}}{z^{2}}\right)^{-1/2}=1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{R^{2}}{z^{2}}+\cdots\right)\approx\frac{1}{2}\frac{R^{2}}{z^{2}} \qquad (۲-۱۱۳)$$

بنابراین، رابطه‌ی (۲-۱۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$E_{z}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}}\frac{R^{2}}{2z^{2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{\sigma\pi R^{2}}{z^{2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{Q}{z^{2}} \qquad (۲-۱۱۴)$$

که در واقع میدان بار نقطه‌ای در فاصله‌ی z است.

۲- **حد** $R \gg z$: در این حد، قرص یا یک صفحه‌ی باردار بسیار گسترده است و یا این که نقطه‌ی P بسیار به سطح قرص نزدیک است. در این حد جمله‌ی دوم داخل [ ] در رابطه‌ی (۲-۱۱۱)صفر می‌شود؛ چون

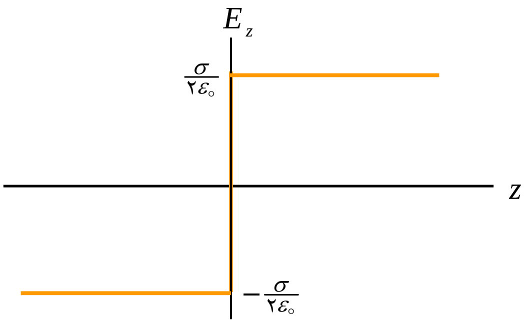
$$\frac{z}{\sqrt{R^{2}+z^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+R^{2}/z^{2}}}\xrightarrow{R^{2}/z^{2}\to\infty}0 \qquad (۲-۱۱۵)$$

و بنابراین، رابطه‌ی (۲-۱۱۱) به صورت زیر در می‌آید.

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}}\hat{\mathbf{k}}\,, & z>0\\[2mm] -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}}\hat{\mathbf{k}}\,, & z>0\end{cases} \qquad (۲-۱۱۶)$$

نمودار میدان در این حالت حدی در شکل (۲-۳۷) نشان داده شده است. به گسستگی میدان در گذار از سطح توجه کنید. این گسستگی عبارت است از

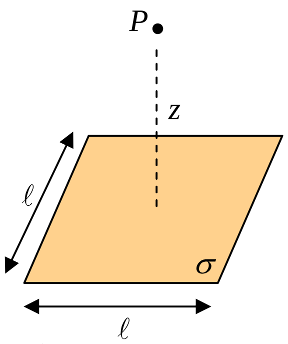
$$\Delta E_{z}=E_{z+}-E_{z-}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}}-\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}}\right)=\frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}} \qquad (۲-۱۱۷)$$



شکل ۲-۳۷ نمودار میدان قرص باردار با چگالی یکنواخت در حد $R \gg z$

در فصل‌های ٤ و خواهیم دید که مولفه‌ی عمودی میدان الکتریکی درگذار از سطحی با چگالی بار سطحی σ همواره به اندازه‌ی $\sigma/\varepsilon_{\circ}$ گسسته است. یعنی میدان درست در بالای سطح باردار و درست در زیر سطح باردار به اندازه‌ی $\sigma/\varepsilon_{\circ}$ اختلاف دارند.

مثال ۱۵-۲ میدان صفحه‌ی مربع با چگالی σ: میدان الکتریکی صفحه مربع شکل به ضلع ℓ و توزیع بار سطحی یکنواخت σ را در فاصله‌ی z از مرکز آن به دست آورید (شکل ۲-۳۸). پاسخ را برای حالت های خاص $\ell\to\infty$ و $z \gg \ell$ بیازمائید.



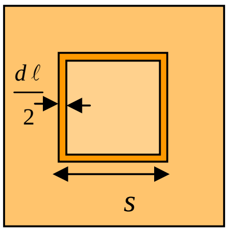
شکل ۲-۳۸ صفحه‌ی مربع با چگالی بار σ

حل: درمثال ۱۱-۲ میدان حلقه مربع شکل را در فاصله‌ی z از مرکز آن به دست آوردیم (نکاه کنید به رابطه‌ی (۲-۱۰۵)). صفحه را همانند شکل (۲-۳۹) به حلقه‌های مربع شکل به ضخامت $d\ell/2$ تقسیم کنید، بار موجود در هر یال حلقه برابر $dq=\sigma(s\,d\ell/2)="\lambda"s$ است. بنابراین، چگالی بارخطی متناظر آن $"\lambda"=\sigma d\ell/2$ است. پس، با جاگذاری $\lambda\to\sigma d\ell/2$ و $y\to z$ در رابطه‌ی (۲-۱۰۵) ، میدان یک حلقه به‌دست می‌آید. با انتگرال‌گیری روی $d\ell$

از صفر تا ℓ میدان صفحه به‌دست می‌آید. در نتیجه، برای میدان یک حلقه داریم

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\sigma z\int_0^{\ell}\frac{\ell\, d\ell}{(z^2+\ell^2/4)\sqrt{z^2+\ell^2/4}} \qquad (۲-۱۱۸)$$

با تغییر متغیر $u\equiv \ell^2/4$ و $\ell d\ell = 2du$ رابطه‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید



شکل ۲-۳۹ حلقه‌ی جزء بار

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}4\sigma z\int_0^{\ell^2/4}\frac{du}{(u+z^2)\sqrt{2u+z^2}}$$

$$=\frac{\sigma z}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{z}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2u+z^2}}{z}\right)\right]_0^{\ell^2/4}$$

$$=\frac{2\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{z^2+\ell^2/4}}{z}\right)-\tan^{-1}(1)\right\}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{E}=\frac{2\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left[\tan^{-1}\sqrt{1+\frac{\ell^2}{2z^2}}-\frac{\pi}{4}\right]\hat{\mathbf{z}} \qquad (۲-۱۱۹)$$

حالت‌های حدی: ۱- در حد $\ell\to\infty$ (صفحه بینهایت گسترده):

$$\mathbf{E}=\frac{2\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left[\tan^{-1}(\infty)-\pi/4\right]\hat{\mathbf{z}}=\frac{2\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{z}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} \qquad (۲-۱۲۰)$$

این پاسخی است که در مثال۲-۱۴ هم برای صفحه‌ی بینهایت گسترده به دست آوردیم.

۲- حد $z\gg\ell$: در این حد، صفحه همانند بار نقطه‌ای $Q=\sigma\ell^2$ جایگزیده در مکان مرکز مربع خواهد بود و بنا به قانون کولمب، میدان آن عبارت است از

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2} \qquad (۲-۱۲۱)$$

پس، در این حالت حدی، پاسخ ما در رابطه‌ی (۲-۱۱۹) باید به رابطه‌ی (۲-۱۲۱) کاهش پیدا کند. برای بازیافت آن فرض کنید $f(x)\equiv\tan^{-1}\sqrt{1+x}-\frac{\pi}{4}$ است و آن را بسط تیلور بدهید:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(0)+\cdots \qquad (۲-۱۲۲)$$

چون $f(0)=\tan^{-1}(1)-\pi/4=\pi/4-\pi/4=0$ است، پس

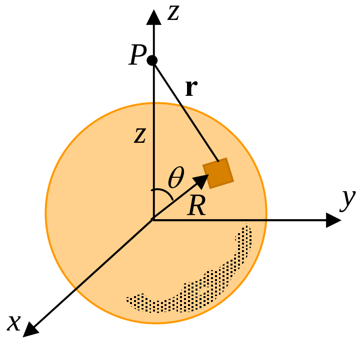
$$f'(x)=\frac{1}{1+(1+x)}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2(2+x)\sqrt{1+x}}\ \Rightarrow\ f'(0)=\frac{1}{4},\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{4}x+(\ )x^2+(\ )x^3+\cdots \qquad (۲-۱۲۳)$$

است. بنابراین، و با توجه به این که $x\equiv\ell^2/2z^2\ll 1$ است، خواهیم داشت

$$E\approx\frac{2\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4}\frac{\ell^2}{2z^2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\ell^2}{z^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2} \qquad (۲-۱۲۴)$$

و به این ترتیب رابطه‌ی (۲-۱۲۱) دوباره به‌دست آمد.

مثال ۲-۱۶ میدان پوسته‌ی کروی : میدان الکتریکی رویه کروی به شعاع R و بار سطحی یکنواخت σ را در فاصله‌ی z از مرکز آن حساب کنید (شکل ۲-٤٠) . هر دو حالت $z>R$ (بیرون کره) و $z<R$ (درون کره) را دربررسی کنید.



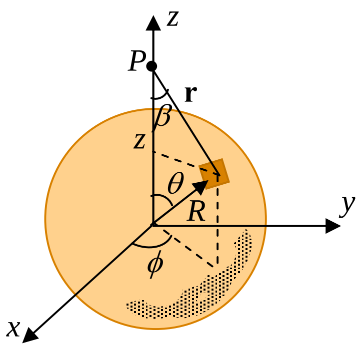
شکل ۲-۴۰ رویه‌ی کروی با توزیع بار سطحی σ

حل: جزء بار $dq=\sigma da=\sigma R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$ را در روی سطح کره در نظر بگیرید. با توجه به شکل (۲-٤١) داریم

$$r^2=R^2+z^2-2Rz\cos\theta \qquad (۲-۱۲۵)$$

$$\cos\beta=\left(z-R\cos\theta\right)/r \qquad (۲-۱۲٦)$$

چون مسئله تقارن دارد، روشن است که میدان **E** در جهت محور +z هاست. بنابراین:



شکل ۲-٤١

$$E_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\cos\beta=$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{3/2}}(z-R\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi R^2\sigma)\int_0^{\pi}\frac{(z-R\cos\theta)\sin\theta}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{3/2}}d\theta \qquad (۲-۱۲۷)$$

در اینجا انتگرال $\int d\phi=2\pi$ را حساب و جایگزین کردیم.

با تغییر متغیر $u=\cos\theta$ و بنابراین، $du=-\sin\theta\, d\theta$ خواهیم داشت

:($\theta=\pi\Rightarrow u=-1$ و $\theta=0\Rightarrow u=1$)

خواهیم داشت ($\theta=\pi\Rightarrow u=-1$ و $\theta=0\Rightarrow u=1$):

$$E_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi R^2\sigma)\int_{-1}^{1}\frac{z-Ru}{(R^2+z^2-2Rzu)^{3/2}}du=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi R^2\sigma)\left[\frac{1}{z^2}\frac{(zu-R)}{\sqrt{R^2+z^2-2Rzu}}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R^2\sigma}{Z^2}\left\{\frac{(z-R)}{|z-R|}-\frac{(-z-R)}{|z-R|}\right\} \qquad (۲-۱۲۸)$$

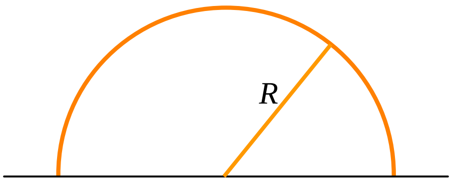
برای $z>R$ (بیرون کره) داریم $|z-R|=z-R$ و رابطه‌ی بالا به رابطه‌ی زیر کاهش می‌یابد

$$E_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{z^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۱۲۹)$$

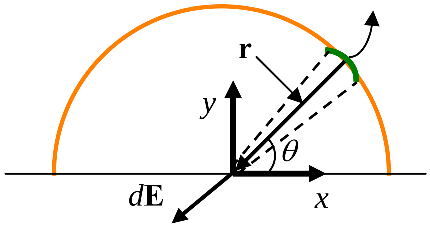
که در آن $Q=4\pi R^2\sigma$ بار کل روی سطح کره است. رابطه‌ی (۲-۱۲۹) پذیرفتنی است و نشان می‌دهد که اگر در بیرون توزیع بار قرار گیرید، توزیع بار را می‌توان به صورت بار نقطه‌ای جایگزیده در مبداء مختصات پنداشت. در این صورت قانون کولمب به همان نتیجه‌ی بالا می‌انجامد.

برای $z<R$ (درون کره) داریم $|z-R|=-z+R$ و بنابراین، $E_z=0\ \Rightarrow\ \mathbf{E}=0$.

مثال ۲-۱۷ میدان سیم نیم‌دایره: بار کل Q به طور یکنواخت بر روی سیم نیم دایره شکل (۲-٤٢) به شعاع R توزیع شده



شکل ۲-۴۲ سیم نیم‌دایره با چگالی بار خطی یکنواخت λ



شکل ۲-۴۳ میدان جزء بار dq

است. میدان الکتریکی را در مرکز نیم دایره حساب کنید.

حل: نخست بار جزئی dq را روی کمان سیم انتخاب کنید. مقدار این بار جزیی $dq = \lambda R\, d\theta$ است و در شکل (۲-۴۳) نشان داده شده است. میدان الکتریکی این جزء بار عبارت است از

$$d\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{dq}{r^۲}\hat{\mathbf{r}} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{dq}{r^۳}\mathbf{r} \qquad (۲-۱۳۰)$$
$$= \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda R\, d\theta}{R^۲}\left(-R\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - R\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)$$

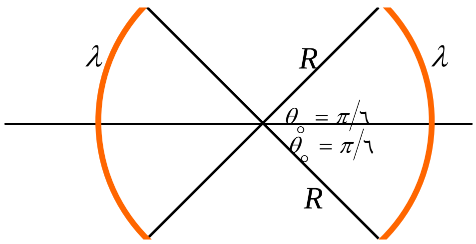
به خاطر تقارن، مولفه‌ی x میدان حذف می‌شود و فقط مولفه‌ی y باقی می‌ماند. بنابراین روی مولفه‌ی y میدان انتگرال می‌گیریم. داریم

$$E_y = \int dE_y$$
$$= -\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^{\pi}\frac{\lambda}{R}\sin\theta\, d\theta = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda}{R}\cos\theta\Big|_۰^{\pi} = -\frac{۲}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda}{R} \qquad (۲-۱۳۱)$$

و بنابراین داریم

$$\mathbf{E} = E_y\hat{\mathbf{j}} = -\frac{۲}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda}{R}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۲-۱۳۲)$$

مثال ۲-۱۸ میدان دو کمان روبرو: دو خم هریک به شعاع R و زاویه ی مرکزی $\theta = \pi/۳ = ۶۰^\circ$ با چگالی بار خطی λ برابر شکل (۲-۴۴) در صفحه‌ی xy قرار دارند. جهت و اندازه ی میدان الکتریکی را در روی محوری که از مرکز می گذرد و بر صفحه‌ی شکل عمود است (محور z) پیدا کنید



شکل ۲-۴۴ دو کمان روبرو

حل: نخست توجه کنید که برای یافتن میدان الکتریکی در هر نقطه روی محور z باید از قانون کولمب روی هر یک از کمان ها انتگرال بگیریم. شکل انتگرالی قانون کولمب عبارت است از

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int\frac{dq}{r^۲}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۲-۱۳۳)$$

$\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه از جزء بار dq تا نقطه‌ی P در روی محور z است. $r^۲$ مربع فاصله‌ی جزء بار dq تا نقطه‌ی P است . داریم $dq = \lambda R\, d\theta$ که در شکل (۲-۴۵) نشان داده شده است. اگرچه بردار یکه ی $\hat{\mathbf{r}}$ با محور z زاویه ی ϕ می سازد، اما به علت تقارن مسئله ، مولفه های افقی میدان یکدیگر را حذف می‌کنند و میدان فقط مولفه در جهت محور z دارد. پس، مولفه‌ی z بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ عبارت است از

$$(\hat{\mathbf{r}})_z = |\hat{\mathbf{r}}|\cos\phi = \cos\phi = \frac{z}{r} = \frac{z}{(R^۲+z^۲)^{۱/۲}} \qquad (۲-۱۳۴)$$

هم چنین داریم $r^۲ = (R^۲+z^۲)$. با جای گذاری این سه جزء در انتگرال قانون کولمب خواهیم داشت

$$E_z = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int \frac{\lambda R\, d\theta}{(R^۲+z^۲)} \frac{z}{(R^۲+z^۲)^{۱/۲}} \qquad (۲-۱۳۵)$$

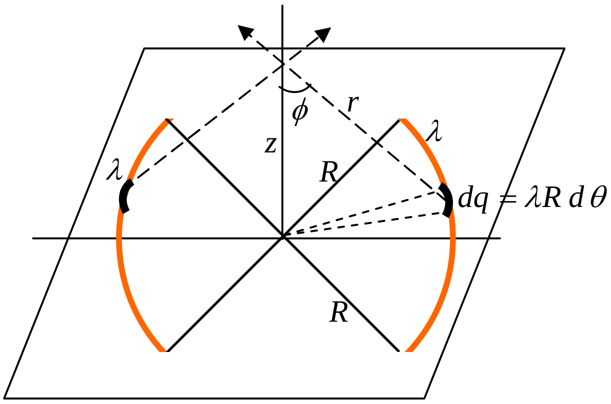
در این انتگرال همه چیز مقادیر ثابت اند و از زیر انتگرال بیرون می‌آیند. در نتیجه،

$$E_z = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda R\, z}{(R^۲+z^۲)^{۳/۲}}\int d\theta \qquad (۲-۱۳۶)$$

اما $\int d\theta = ۲(\pi/۳)$ و بنابراین

$$E_z = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲\pi\lambda Rz}{۳(R^۲+z^۲)^{۳/۲}}\hat{\mathbf{k}}$$

$$= \frac{\lambda Rz}{۶\varepsilon_۰(R^۲+z^۲)^{۳/۲}}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۱۳۷)$$



شکل ۲-۴۵ میدان دو کمان روبرو

مثال ۲-۱۹ حرکت بار در جهت عمود بر میدان: در فضای بین دو صفحه‌ی باردار با بارهای مخالف و چگالی بار σ، میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود (شکل۲-۴۶) . الکترونی با سرعت اولیه‌ی $\mathbf{v}_۰ = v_۰\hat{\mathbf{i}}$ در زمان $t_۰$ به طور افقی و در جهت عمود بر میدان الکتریکی به فضای بین دو صفحه وارد می‌شود. فرض کنید فاصله‌ی صفحه‌ها در مقایسه با ابعاد آنها اندک است

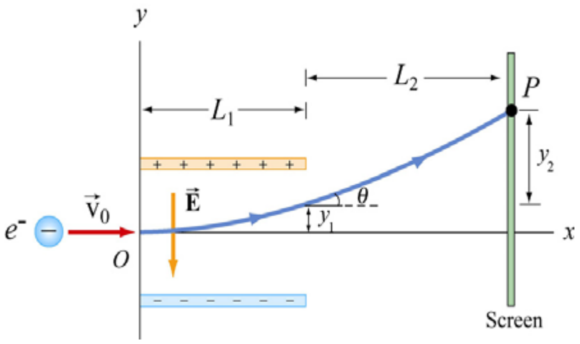
(الف): در ناحیه‌ی بین صفحه‌ها چه نیرویی به الکترون وارد می‌شود؟

(ب): شتاب الکترون را در این ناحیه حساب کنید.

(پ): در راستای محور x طول صفحه‌ها $L_۱$ است. در چه زمان $t_۱$ الکترون این ناحیه را ترک می‌کند؟

(ت): سرعت الکترون را در لحظه‌ی $t_۱$ که ناحیه‌ی بین صفحه‌ها را ترک می‌کند، حساب کنید.

(ج): انحراف عمودی الکترون در لحظه‌ی $t_۱$ چقدر است ؟



شکل ۲-۴۶ حرکت الکترون در فضای بین دو صفحه‌ی باردار و عمود بر میدان $\mathbf{E}$

(چ): در زمان $t_۱$ که الکترون از میدان خارج می‌شود با راستای افق چه زاویه‌ای، $\theta_۱$، می‌سازد.

(ح): پرده‌ای در فاصله‌ی $L_۲$ از انتهای سمت راست صفحه‌ها قرار دارد و الکترون در زمان $t_۲$ به آن می‌رسد و با آن برخورد می‌کند. انحراف عمودی کل الکترون از مسیر افقی را بین زمان‌های $t_۰$ و $t_۲$ حساب کنید.

حل: (الف) جون بار الکترون منفی است، $q = -e$ ، نیروی وارد به الکترون عبارت است از

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = -e\mathbf{E} = (-e)(-E_y)\hat{\mathbf{j}} = eE_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (۲-۱۳۸)$$

چون گفته شده است که فاصله‌ی صفحه‌ها در مقایسه با ابعاد آنها اندک است؛ می‌توان هر صفحه را بسیار گسترده پنداشت. میدان الکتریکی صفحه‌ی گسترده $\sigma/۲\varepsilon_۰$ است (رابطه‌های (۲-۱۱۷) و (۲-۱۲۰) را ببینید). میدان الکتریکی در فضای بین صفحه‌ها عبارت است از جمع برداری میدان‌های صفحه‌ی مثبت و منفی:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}(-\hat{\mathbf{j}}) + \frac{-\sigma}{۲\varepsilon_۰}(\hat{\mathbf{j}}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{j}} \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_e = (-e)\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{j}}\right) = \frac{e\,\sigma}{\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۲-۱۳۹)$$

بنابراین، نیروی مارد به الکترون رو به بالاست. توجه کنید که حرکت الکترون همانند حرکت ذره‌ای است که در میدان گرانشی ثابت به طور افقی پرتاب شده است. مسیر ذره سهمی و رو به پایین است. چون الکترون بار منفی دارد، نیروی ثابت وارد به آن رو به بالاست و الکترون روی مسیر سهمی به سوی بالا منجرف می‌شود.

(ب): شتاب الکترون عبارت است از

$$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{F}_e}{m}=\frac{e\sigma}{\varepsilon_\circ m}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۲-۱۴۰)$$

همان گونه که دیده می‌شود، جهت آن رو به بالاست.

(پ): زمان لازم برای پیمایش میدان الکتریکی $t_۱=L_۱/v_\circ$ است. شتاب الکترون در تعیین زمان $t_۱$ نقشی ندارد، چون $v_\circ$ مولفه‌ی افقی سرعت است و میدان در آن تاثیر نمی‌گذارد.

(ت): سرعت اولیه‌ی الکترون $\mathbf{v}_\circ=v_\circ\hat{\mathbf{i}}$ است. چون شتاب الکترون در جهت $+y$ است، تنها مولفه‌ی y سرعت تغییر می‌کند. پس، سرعت در زمان $t_۱$ برابر است با

$$\mathbf{v}=v_x\hat{\mathbf{i}}+v_y\hat{\mathbf{j}}=v_\circ\hat{\mathbf{i}}+a_yt_۱\hat{\mathbf{j}}=v_\circ\hat{\mathbf{i}}+\left(\frac{e\sigma}{\varepsilon_\circ m}\right)\left(\frac{L_۱}{v_\circ}\right)\hat{\mathbf{j}}=\frac{e\sigma L_۱}{\varepsilon v_\circ m}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۲-۱۴۱)$$

(ج): از شکل (۴۶-۲) دیده می‌شود که الکترون مسافت افقی $L_۱$ را در زمان $t_۱=L_۱/v_\circ$ می‌پیماید و با انحراف عمودی

$$y_۱=\frac{۱}{۲}a_yt_۱^۲=\frac{۱}{۲}\left(\frac{e\sigma}{\varepsilon_\circ m}\right)\left(\frac{L_۱}{v_\circ}\right)^۲=\frac{e\sigma L_۱^۲}{۲\varepsilon_\circ v_\circ^۲ m} \qquad (۲-۱۴۲)$$

از آن خارج می‌شود.

(چ): وقتی الکترون در زمان $t_۱$ فضای بین صفحه‌ها را ترک می‌کند، با افق زاویه‌ی $\theta_۱$ می‌سازد که با نسبت مولفه‌های سرعت الکترون تعیین می‌شود.

$$\tan\theta_۱=\frac{v_y}{v_x}=\frac{\left(e\sigma L_۱/\varepsilon_\circ v_\circ m\right)}{v_\circ}=\frac{e\sigma L_۱}{m\varepsilon_\circ v_\circ^۲} \qquad (۲-۱۴۳)$$

(ح): پس ار ترک فضای بین صفحه‌ها به الکترون دیگر نیرویی وارد نمی‌شود و الکترون مسیر راست‌خطی را می‌پیماید. انحراف y_2 الکترون عبارت است از

$$y_۲=L_۲\tan\theta_۱=\frac{e\sigma L_۲L_۱}{m\varepsilon_\circ v_\circ^۲} \qquad (۲-۱۴۴)$$

و انحراف کل در هنگام رسیدن الکترون به پرده برابر است با

$$y=y_۱+y_۲=\frac{e\sigma L_۱^۲}{۲\varepsilon_\circ v_\circ^۲ m}+\frac{e\sigma L_۲L_۱}{m\varepsilon_\circ v_\circ^۲}=\frac{e\sigma L_۱}{m\varepsilon_\circ v_\circ^۲}\left(\frac{L_۱}{۲}+L_۲\right) \qquad (۲-۱۴۵)$$

مثال ۲۰-۲ آزمایش قطره روغن میلیکان: قطره روغنی به شعاع $r=۱{,}۶\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{m}$ و چگالی $\rho_m=۸{,}۵۱\times۱۰^۲\ \mathrm{kg/m^3}$ از حالت سکون فرو می‌افتد و وارد ناحیه‌ای با میدان الکتریکی ثابت $\mathbf{E}$ می‌شود. جهت $\mathbf{E}$ رو به پایین است. بار q قطره روغن نامشخص است. اندازه‌ی میدان الکتریکی چنان تنظیم شده است که نیروی گرانشی $\mathbf{F}_g=m\mathbf{g}=-mg\,\hat{\mathbf{j}}$ و نیروی الکتریکی $\mathbf{F}_e=q\mathbf{E}$ وارد به قطره روغن یکدیگر را حذف می‌کنند. فرض کنید این وضعیت به ازای $E=-E_y\hat{\mathbf{j}}=-\left(۱{,}۹۲\times۱۰^\circ\ \mathrm{N/C}\right)\hat{\mathbf{j}}$

فراهم می‌شود.

(الف): جرم قطره روغن را حساب کنید.

(ب): بار قطره روغن را برحسب بار الکتریکی الکترون، $e = ۱,٦\times۱۰^{-۱۹}\ \mathbf{C}$ به دست آورید.

حل: **(الف)** جرم قطره روغن از حاصل ضرب چگالی و حجم آن به دست می‌آید

$$M = \rho_m V = \rho_m\left(\frac{٤}{۳}\pi r^{۳}\right) = \left(۸.۵۱\times۱۰^{۲}\ \mathrm{kg/m^3}\right)\left(\frac{٤\pi}{۳}\right)\left(۱,٦\times۱۰^{-٦}\ \mathrm{m}\right)^{۳} = ۱,۵۷\times۱۰^{-۱٤}\ \mathrm{kg} \qquad (۲-۱٤٦)$$

(ب): نیروهای الکتریکی و گرانشی یکدیگر را حذف می‌کنند. داریم $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e = ۰$. چون نیروی گرانش رو به پایین است، نیروی الکتریکی باید رو به بالا باشد. پس داریم

$$۰ = m\mathbf{g} + q\mathbf{E} \quad\Rightarrow\quad mg = -qE_y \qquad (۲-۱٤۷)$$

چون میدان الکتریکی رو به پایین است، نتیجه می‌گیریم که بار قطره روعن منفی است. توجه کنید که جهت بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{j}}$ را به سوی بالا برگزیده‌ایم. بنابراین

$$q = -\frac{mg}{E_y} = \frac{\left(۱,۵۷\times۱۰^{-۱٤}\ \mathrm{kg}\right)\left(۹,۸۰\ \mathrm{m/s^2}\right)}{۱,۹۲\times1۰^{5}\ \mathrm{N/C}} = -۸,۰۳\times۱۰^{-۱۹}\ \mathrm{C} \qquad (۲-۱٤۸)$$

چون بار الکترون $e = ۱,٦\times۱۰^{-۱۹}\ \mathbf{C}$ است، بار قطره روغن برحسب بار الکترون برابر است با

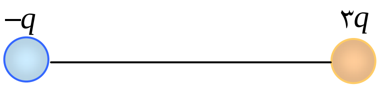
$$N = \frac{q}{e} = \frac{۸,۰۲\times۱۰^{-۱۹}\ \mathrm{C}}{۱,٦\times۱۰^{-۱۹}\ \mathrm{C}} = ۵ \qquad (۲-۱٤۹)$$

شاید از این که نتیجه‌ی بالا یک عدد صحیح است، شگفت‌زده شوید. آزمایش قطره روغن میلیکان نخستین گواه تجربی بود که نشان داد بار الکتریکی کوانتیده است. از تحلیل عددی بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که در قطره روعن ۵ الکترون وجود دارد!

۲-۵ پرسش‌های کوتاه و چند گزینه‌ای

۲-۱ قانون گرانش نیوتون، $\mathbf{F}_g = Gm_1m_2/r^2$، و قانون کولمب، $\mathbf{F}_e = kq_1q_2/r^2$ $(k \equiv 1/4\pi\varepsilon_0)$ را مقایسه کنید و در باره‌ی مانستگی‌ها و ناهمانندی‌های آنها بحث کنید.

۲-۲ آیا خطهای میدان می‌توانند یکدیگر را قطع کنند؟ توضیح دهید.



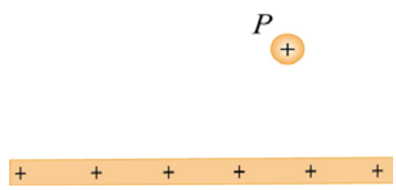
شکل ۲-۴۷ دو بار ناهم‌نام نابرابر

۲-۳ دو بار ناهم نام برابر شکل (۲-٤۷) روی یک خط قرار دارند.اندازه‌ی بار سمت راست سه برابر بار سمت چپ است. به جز در بینهایت، در چه مکان دیگری میدان الکتریکی آرایه ممکن است صفر باشد؟

(الف): بین دو بار   **(ب)**: در سمت راست بار $3q$ **(پ)**: در سمت چپ بار $-q$

(ت): میدان الکتریکی فقط در فاصله‌ی بینهایت از بارها صفر است.

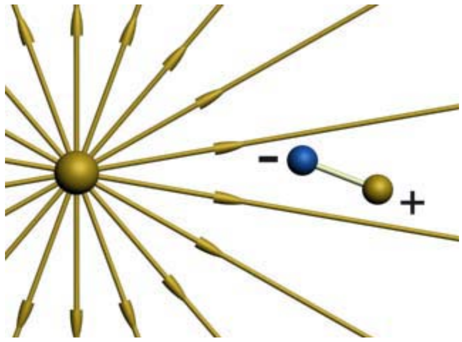
۲-۴ برابر شکل (۲-٤۸) بار آزمون مثبتی در نزدیکی میله‌ی باردار مثبتی قرار دارد. اگر اندازه‌ی بار آزمون کاهش پیدا کند و علامتش تغییر کند، جهت و اندازه‌ی میدان الکتریکی چگونه تغییر خواهد کرد؟



شکل ۲-۴۸ بار آزمون در نزدیکی میله

۲-۵ دو بار مساوی و ناهم نام را در دو انتهای یک میله قرار می‌دهیم و به این صورت یک دوقطبی الکتریکی می‌سازیم. دوقطبی می‌تواند حول مرکزش آزادانه بچرخد. دوقطبی را در میدان الکتریکی یکنواخت قرار می‌دهیم. آیا به آن نیرو وارد می‌شود؟ گشتاور چطور؟

۲-۶ دوقطبی پرسش ۵-۲ با دو بار مساوی و ناهم نام برابر شکل (۲-٤۹) در میدان الکتریکی بار نقطه‌ای ساکنی قرار دارد. کدام گزینه درست است؟



شکل ۲-۴۹ دوقطبی در میدان بار

(الف): دوقطبی ساعتگرد می‌چرخد و به سمت چپ حرکت می‌کند.

(ب): دوقطبی پاد ساعتگرد می‌چرخد و به سمت راست حرکت می‌کند.

(پ): دوقطبی ساعتگرد می‌چرخد و به سمت راست حرکت می‌کند.

(ت): دوقطبی پادساعتگرد می‌چرخد و به سمت چپ حرکت می‌کند

(ج): ساعتگرد می‌چرخد اما حرکت نمی‌کند.

(چ): پادساعتگرد می‌چرخد اما حرکت نمی‌کند.

۲-۷ دوقطبی پرسش ۵-۲ با دو بار مساوی و ناهم نام در میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}$ قرار دارد. میدان $\mathbf{E}$ بر محور دوقطبی عمود است. کدام گزاره درباره‌ی دوقطبی درست است؟

(الف): به دوقطبی نیروی چشمگیری وارد می‌شود اما گشتاور چشمگیری به آن وارد نمی‌شود.

(ب): به دوقطبی نیروی چشمگیری وارد نمی‌شود اما گشتاور چشمگیری به آن وارد می‌شود.

(پ): به دوقطبی هم نیرو وهم گشتاور چشمگیری وارد می‌شود.

(ت): به دوقطبی نه نیرو ونه گشتاور چشمگیری وارد می‌شود.



شکل ۲-۵۰ دو بار هم‌نام، اما نابرابر

۲- ۸ بارهای $+q$ و $+3q$ برابر شکل (۲-۵۰) در روی خط افقی قرار دارند. میدان الکتریکی این آرایه در کجا صفر است؟

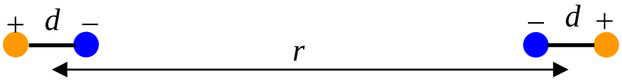
(الف): در سمت چپ بار $+q$ **(ب)**: در سمت چپ بار $+3q$

(پ): بین دو بار و نزدیک‌تر به بار $+q$ **(ت)**: بین دو بار و نزدیک‌تر به بار $+3q$ **(ج)**: فقط در بینهایت.

۲-۹ میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ یک دوقطبی الکتریکی را در نظر بگیرید. اگر از فاصله‌ی r که بسیار بزرگتر از ابعاد دوقطبی است و در راستای ثابتی به دو قطبی نگاه کنیم، وابستگی اندازه‌ی میدان، $E(r)$، به r به صورت زیر است:

(الف): $E(r)\sim 1/r$ **(ب)**: $E(r)\sim 1/r^2$ **(پ)**: $E(r)\sim 1/r^3$ **(ت)**: $E(r)\sim r$ **(ج)**: $E(r)\sim r^2$

۲-۱۰ دو دوقطبی یکسان شکل (۲-۵۱) را در نظر بگیرید که در روی محور x و به فاصله‌ی r از هم قرار دارند. طول هر



شکل ۲-۵۱ دو دوقطبی در روبروی هم

دوقطبی d است و $r \gg d$ است. کدام یک از گزاره های زیر در باره‌ی دوقطبی **سمت چپ** درست است؟

(الف): نیرویی به سمت چپ و گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شوند.

(ب): نیرویی به سمت چپ و گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شوند.

(پ): نیرویی به سمت چپ به آن وارد می‌شود اما گشتاور به آن وارد نمی‌شود.

(ت): نیرویی به سمت راست و گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شوند.

(ج): نیرویی به سمت راست و گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شوند.

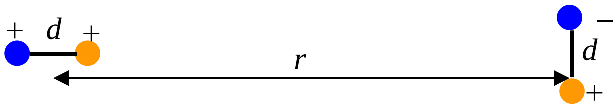
(چ): نیرویی به سمت راست به آن وارد می‌شود اما گشتاور به آن وارد نمی‌شود.

(ح): نیرو وارد نمی‌شود. فقط گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند.

(خ): نیرو وارد نمی‌شود. فقط گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند.

(د): نه نیرو و نه گشتاور به آن وارد می‌شود.

پ-۱۱ دو دوقطبی یکسان به طول d داریم که برابر شکل (۲-۵۲) به قاصله‌ی r از هم قرار دارند. کدام



شکل ۲-۵۲ دو دوقطبی عمود برهم

گزاره در باره‌ی دوقطبی سمت چپ درست است؟

(الف): نیرویی به سمت بالا و گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شود.

(ب): نیرویی به سمت بالا و گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شود.

(پ): نیرویی به سمت بالا به آن وارد می‌شود اما گشتاور به آن وارد نمی‌شود.

(ت): نیرویی به سمت پایین و گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شود.

(ج): نیرویی به سمت پایین و گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شوند.

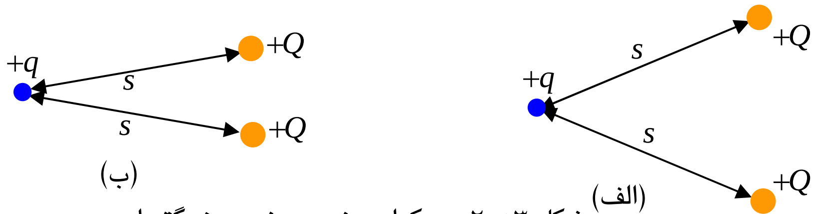
(چ): نیرویی به سمت پایین به آن وارد می‌شود اما گشتاور به آن وارد نمی‌شود.

(ح): نیرو وارد نمی‌شود. فقط گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند.

(خ): نیرو وارد نمی‌شود. فقط گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند.

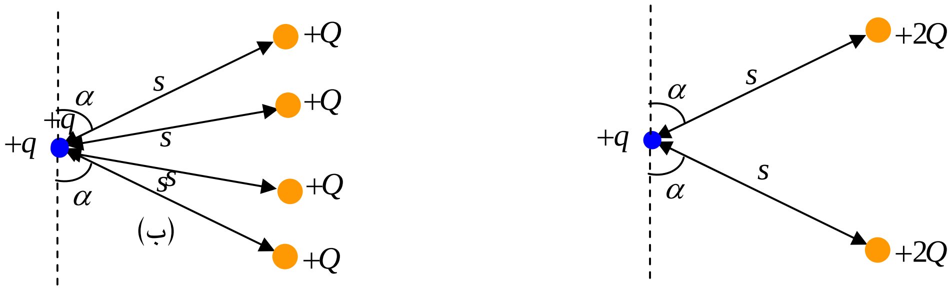
(د): نه نیرو و نه گشتاور به آن وارد می‌شود.

پ-۱۲ در شکل (۲-۵۳) دو وضعیت نشان داده شده‌اند. هر یک از دو بار مثبت $+Q$ در فاصله‌ی s از بار مثبت $+q$ قرار دارند. نیروی کل وارد به بار $+q$ در وضعیت (الف) بزرگتر است یا در وضعیت (ب)؟



شکل ۲-۵۳: در کدام وضعیت نیرو بزرگتر است

پ-۱۳: در شکل (۲-٥٤) دو وضعیت نشان داده شده‌اند. در وضعیت (الف) دو بار مثبت با اندازه‌های $+2Q$ به فاصله‌ی s از بار مثبت $+q$ قرار دارند. در وضعیت (ب) چهار بار هر کدام به اندازه‌ی $+Q$ در فاصله‌ی s از بار مثبت $+q$ قرار دارند. نیروی کل وارد به بار $+q$ در وضعیت (الف) بزرگتر است یا در وضعیت (ب)؟



شکل ۲-٥٤ در کدام وضعیت نیرو بزرگتر است

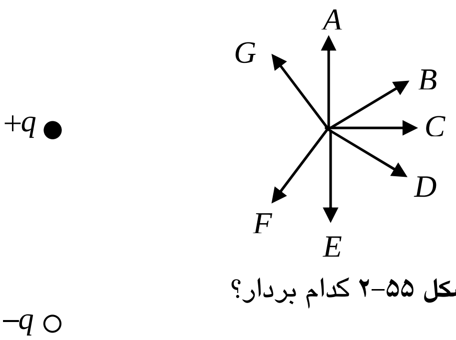
۲-۱۴ در شکل ۲-۵۵ کدام بردار جهت میدان الکتریکی ناشی از دو بار $+q$ و $-q$ را به درستی نشان می‌دهد؟

(الف): A **(ب)**: B

(پ): C **(ت)**: D

(ج): E **(چ)**: F

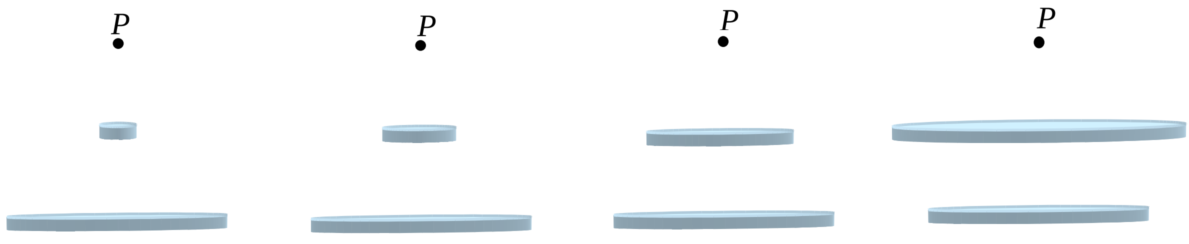
(ح): G



شکل ۲-۵۵ کدام بردار؟

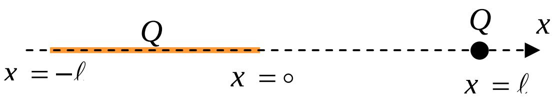
۲-۱۵ در شکل ۲-٥٦ قرص‌هایی نشان داده شده‌اند که ابعاد دیگرشان بر صفحه‌ی کاغذ عمود است. چگالی بار سطحی در همه‌ی قرص‌ها یکنواخت و یکسان است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P در نظر بگیرید. در کدام یک از چهار سامانه میدان الکتریکی قرص بالایی از میدان الکتریکی قرص پایینی بزرگ‌تر است؟

(الف): A **(ب)**: A و B **(پ)**: A و B و C **(ت)**: هر چهار سامانه



شکل ۵۶-۲ دو قرص

۲-۱۶ میله‌ای به طول ℓ بر روی محور xها از $x=-\ell$ تا $x=0$ قرار دارد. بار Q به طور یکنواخت بر روی میله توزیع شده است. در مکان $x=\ell$ یک بار نقطه‌ای با بار Q قرار دارد. مکان $x=\ell/3$ در روی محور xها جایی است که میدان میله و بار نقطه‌ای یکدیگر را حذف می‌کنند. جای دیگری هم وجود دارد که میدان الکتریکی در آنجا صفر است (این نقطه در روی میله است) آیا مکان دیگری هم وجود دارد که میدان در آن نقطه صفر است.



(الف): آری، در سمت چپ میله (ب): آری، در سمت راست بار نقطه‌ای (پ): آری در جایی به جز بین میله و بار نقطه‌ای در روی محور x ها (پ): آری، اما در مکانی که روی محور x ها نیست. (ج): نه!

مسئله ها

۲-۱ اتم هیدوژن، مثال عددی: در مدل کلاسیک اتم هیدروژن الکترون با بار منفی در دایره‌ای به شعاع $r=0{,}53\times10^{-10}$ m حول پروتون با بار مثبت می‌گردد. اندازه‌ی بار الکترون و پروتون ، هردو، $e=1{,}6\times10^{-19}$ C اند.

(الف): اندازه‌ی نیروی الکتریکی بین الکترون و پروتون را بیابید

(ب): اندازه‌ی میدان الکتریکی پروتون را در فاصله‌ی r از آن حساب کنید.

(پ): نسبت نیروی الکتریکی و گرانشی بین الکترون و پروتون را حساب کنید. آیا پاسخ به فاصله‌ی بین الکترون و پروتون بستگی دارد؟

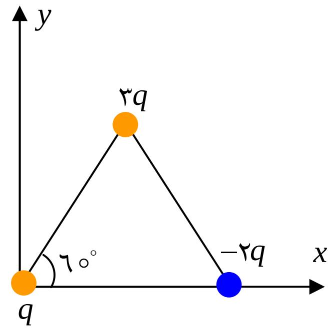
(ت): با توجه به پاسخ قسمت (ب) توضیح دهید که چرا نیروهای الکتریکی در حرکت سیاره‌ها نقش ندارند.

۲-۱ سه بار در سه راس مثلث: سه بار برابر شکل (۵۵-۲) در سه راس مثلث متساوی‌اضلاع به ضلع a قرار دارند.

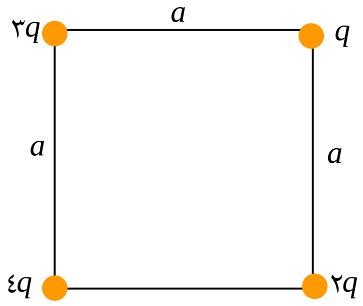
(الف): نیروی کل وارد به بار $۳q$ را حساب کنید. **(ب)**: نیروی کل وارد به بار $-۲q$ را حساب کنید.

۳-۱ چهار بار نقطه‌ای: چهار بار نقطه‌ای برابر شکل (۵۶-۲) در چهار گوشه‌ی مربعی به ضلع a قرار دارند.

(الف): میدان الکتریکی را در مکان بار q به دست آورید. **(ب)**: چه نیرویی به بار $۲q$ وارد می‌شود؟

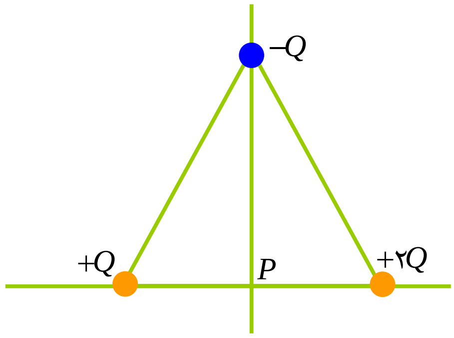


شکل ۵۵-۲ سه بار در سه راس

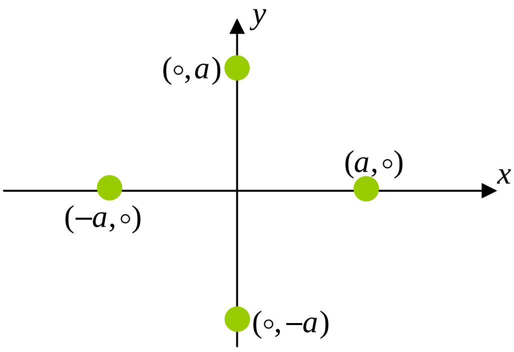


شکل ۵۶-۲ چهار بار در چهار گوشه

۴-۲ باز هم سه با ر نقطه‌ای: سه بار در سه نقطه‌ای برابر شکل (۵۷-۲) درراس مثلث متساوی‌اضلاع به ضلع a قرار دارند. مولفه‌های x و y میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P به دست آورید.



شکل ۵۷-۲ سه بار نقطه‌ای در سه گوشه



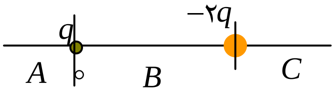
شکل ۵۸-۲ چهار بار در چهار نقطه

۵-۲ چهار بار: چهار بار مثبت نقطه‌ای و یکسان برابر شکل (۵۸-۲) قرار دارند.

(الف): میدان الکتریکی را در نقطه‌ی $P=(۰,۰,z)$ به دست آورید. اندازه و جهت آن را مشخص کنید.

(ب): چه باری را باید در مبداء مختصات $(۰,۰,۰)$ قرار دارد تا میدان در نقطه‌ی $(۰,۰,a)$ صفر شود؟

۶-۲ دو بار : بار q در مبداء مختصات قرار دارد و بار $-۲q$ در نقطه‌ی $x=۱$ است (شکل ۵۹-۲).



شکل ۵۹-۲ دو بار روی محور x

(الف): در چه نقاطی روی محور x میدان الکتریکی در هر یک از سه ناحیه‌ی A، B و C صفر است؟ میدان را برحسب xرسم کنید.

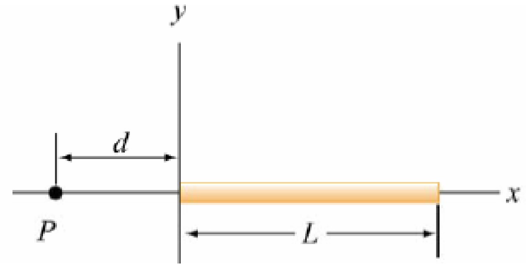
(ب): در چه نقطه ای روی محور y میدان الکتریکی موازی محور x است؟

۷-۲ میله با چگالی نایکنواخت: میله‌ای به طول L روی محور x قرار دارد و انتهای چپ آن برابر شکل (۶۰-۲) در مبداء مختصات است. چگالی بار خطی میله نایکنواخت و به صورت $\lambda=\alpha x$ داده شده است (α کمیت ثابت و مثبتی است).

(الف): رابطه‌ای برای بار کل Q میله برحسب α و L به دست آورید.

(ب): جهت و اندازه‌ی میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P حساب کنید.

(پ): میدان را در حالت حدی $d \gg L$ حساب کنید و نشان دهید که رفتار آن همانند رفتار میدان بار نقطه‌ای است.

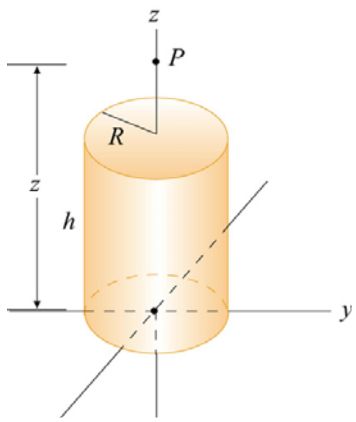


شکل ۶۰-۲ میله با بار نایکنواخت

۸-۲ پوسته‌ی استوانه‌ای: بار کل Q بر سطح پوسته‌ی استوانه‌ای به شعاع R وارتفاع h به طور یکنواخت توزیع شده است (شکل ٦١-٢) را ببینید.)

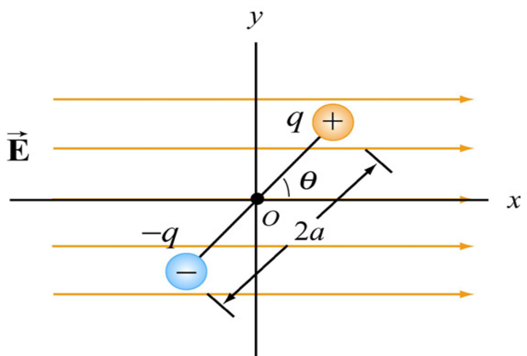
(الف): میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی z از قاعده‌ی پایینی استوانه به‌دست آورید. (*راهنمایی:* استوانه را مجموعه‌ی برهم نهاده‌ی تعداد زیادی حلقه‌ی بار دار فرض کنید.)

(ب): اگر به جای پوسته، استوانه توپر باشد و بار به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شود، میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P به دست آورید. (*راهنمایی:* استوانه را مجموعه‌ی برهم نهاده‌ی تعداد زیادی قرص بار دار فرض کنید.)

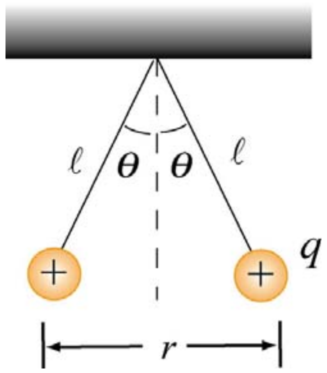


شکل ۶۱-۲ استوانه‌ی باردار

۹-۲ دوقطبی الکتریکی: دوقطبی الکتریکی در صفحه‌ی xy قرار دارد میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}$ در جهت $+x$ برابر شکل (٦٢-٢) به آن اعمال می‌شود و دوقطبی را به اندازه‌ی زاویه اندک θ از حالت ترازمندی منحرف می‌کند. فاصله‌ی بارهای دوقطبی از هم $2a$ و گشتاور لختی دوقطبی I است.اگر دوقطبی را از این حالت رها کنیم، نشان دهید که جهت‌گیری دوقطبی همانند نوسانگر هماهنگ رفتار می‌کند. بسامد زاویه‌ای نوسان را بیابید.

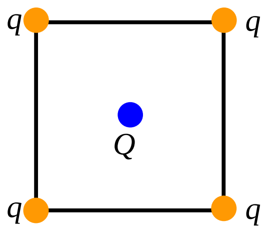


شکل ۶۲-۲ دوقطبی الکتریکی در میدان یکنواخت $\mathbf{E}$



شکل ۶۳-۲ دو توپ باردار

۱۰-۲ دو توپ: دو توپ کوچک یکسان با جرم m و بار q همانند شکل (٦٣-٢) با دو ریسمان به طول‌های ℓ از سقف آویزانند. هر توپی با خط قائم زاویه‌ی θ می‌سازد. فرض کنید θ کوچک و $\tan\theta \approx \sin\theta$ است. نشان دهید که در وضعیت ترازمندی، فاصله‌ی بین توپ‌ها $r = \left(q^2\ell/2\pi\varepsilon_0 mg\right)^{1/3}$ است.

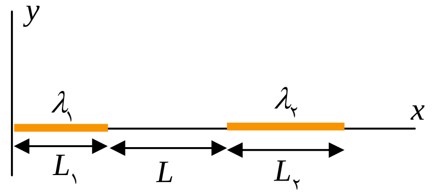


شکل ۲-۶٤ چهار بار و یک بار

۲-۱۱ چهار بار در چهار گوشه و یک بار در مرکز: چهار ذره برابر شکل (۲-٦٤) در چهار گوشه‌ی مربع ثابت شده‌اند. بار الکتریکی هر ذره q است. در مرکز مربع بار ناهمنام Q قرار دارد. برای این که نیروی وارد به هریک از بارهای موجود در گوشه‌ها صفر شود، اندازه‌ی بار Q چقدر باید باشد؟ چون با مقداری که برای Q به دست می‌آورید، سامانه در ترازمندی است. آیا این ترازمندی پایدار است؟

۲-۱۲ دو میله : دو میله به طول‌های L_1 و L_2 برابر شکل (۲-٦٥) به فاصله‌ی L از یکدیگر در روی محور x قرار دارند. چگالی بار خطی میله‌ها به ترتیب λ_1 و λ_2 است.

(الف): رابطه‌ای برای نیروی بین میله‌ها بیابید (یعنی نیرویی که یک میله به هر میله دیگر وارد می‌کند.)



شکل ۲-۶۵ نیروی نیم دو میله باردار

(ب): در حد $L_2 \gg L_1$ نشان دهید که نیروی وارد به میله‌ی به طول L_1 عبارت است از

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda_1\lambda_2 \ell n\left(1+\frac{L_1}{L}\right)\hat{\mathbf{x}} \qquad (۲-۱۵۰)$$

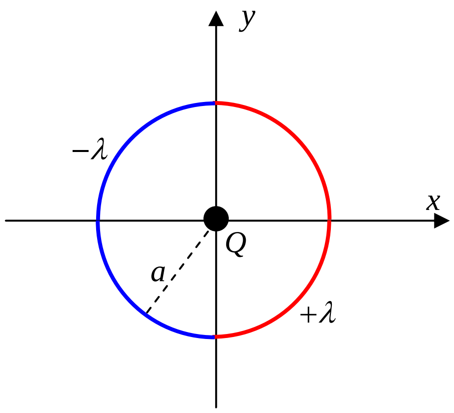
(پ): نشان دهید که در حد $L \gg L_1 , L_2$ پاسخ، به نیروی بین دو بار نقطه‌ای Q_1 و Q_2 کاهش می‌یابد. مقادیر Q_1 و Q_2 را حساب کنید.

۲-۱۳ دو نیم دایره و یک بار نقطه‌ای: بار نقطه‌ای Q در مرکز یک حلقه به شعاع a قرار دارد. حلقه در صفحه‌ی xy است. چگالی بار درنیمه‌ی $x > 0$ حلقه‌ی یکنواخت و برابر $+\lambda$ و در نیمه‌ی $x < 0$ برابر $-\lambda$ است (شکل ۲-٦٦).

الف- به بار نقطه‌ای Q چه نیرویی وارد می شود؟

ب- برای این که بار نقطه‌ای Q را در امتداد محور z از مرکز حلقه به بینهایت ببریم ، چه مقدار کار لازم است؟

پ- اگر بار نقطه‌ای Q در مرکز حلقه باشد، در چه نقطه‌ی دیگری می توان بار نقطه‌ای دوم برابر و همنام با بار Q قرار داد که نیروی خالص وارد به بار موجود در مرکز حلقه صفر شود؟ آیا بار نشسته در مرکز حلقه در ترازمندی پایدار است یا نه؟



شکل ۲-۶۶ دونیم حلقه و بار نقطه‌ای

۲-۱۴ میدان در نقطه‌ای دلخواه: بار $+q$ در $x = a$ وبار $-4q$ در $x = -a$ قرار دارند. میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در هر نقطه‌ی دلخواهی در صفحه‌ی xy، به صورت رابطه‌ای برداری در مختصات کارتزی به دست آورید.

۲-۱۵ نمایش خطهای میدان: نشان دهید که خطهای میدان $\mathbf{E}(x,y) = E_x(x,y)\hat{\mathbf{i}} + E_y(x,y)\hat{\mathbf{j}}$ در صفحه‌ی xy با معادله‌ی $dy/dx = E_y(x,y)/E_x(x,y)$ به‌دست‌ می‌آید.

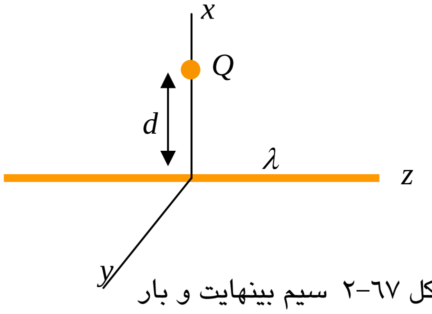
۲-۱۶ حرکت نوسانی بار: بار کل Q به طور یکنواخت بر روی حلقه‌ای به شعاع a توزیع شده است. حلقه در صفحه‌ی xy قرار دارد. بار $-Q$ چنان مقید شده است که بر روی محور حلقه بلغزد. نشان دهید که برای جابه‌جایی های کوچک، بار $-Q$ حرکت نوسانی هماهنگ ساده خواهد داشت.

۲-۱۷: نیروی قرص باردار: چگالی بار سطحی قرص نازکی $+\sigma \ \mathrm{C/m^2}$ و شعاع آن R است. بار q روی محور تقارن قرص است. نیروی وارد بر بار q را به صورت تابعی از فاصله‌ی z بار تا صفحه‌ی قرص به دست آورید. و در حدهای $R \ll z$ و $R \gg z$ نتیجه را بیازمایید.

۲-۱۸ سیم بینهایت دراز و بار نقطه‌ای: بار نقطه‌ای Q برابر شکل (۲-٦٧) در فاصله‌ی d از سیم بینهایت درازی با چگالی بار خطی یکنواخت λ قرار دارد. رابطه‌ی بین Q و λ عبارت است از $Q/\lambda = d$.

(الف): بردار میدان الکتریکی سامانه را برحسب مختصات (x,y,z) به دست آورید.

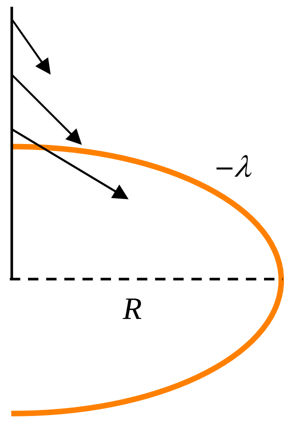
(ب): مختصات (x,y,z) نقطه‌ای را بیابید که در آن نقطه، یک بار ازمون در ترازمندی است



شکل ۲-٦٧ سیم بینهایت و بار

۲-۱۹ نیروی صفر در گوشه‌ها: در هر گوشه‌ای یک مربع یک بار نقطه‌ای q قرار دارد. بار دیگر $-Q$ در مرکز مربع است. مقدار این بار چقدر باید باشد تا نیروی کل وارد به هریک از چهار بارهای q صفر باشد؟

۲-۲۰ خطهای میدان همگرا: شکل (۲-٦٨) سیمی به شکل نیمدایره‌ی به شعاع R را نشان می‌دهد که توزیع بار یکنواخت با چگالی $-\lambda$ دارد. نشان دهید که امتداد خطهای میدان الکتریکی در همه‌ی نقاط روی محور سیم (خطی که از مرکز نیمدایره می‌گذرد و بر سطح آن عمود است) از یک نقطه واقع در صفحه‌ی سیم می‌گذرند. این نقطه‌ی در کجاست؟



شکل ۲-۶۸ نیمدایره‌ی باردار

۲-۲۱ روشی زیبا: جسم تختی با شکل دلخواه و با توزیع بار سطحی یکنواخت σ داده شده است. میدان الکتریکی آن را در نقطه‌ی P در بیرون از سطح جسم در نظر بگیرید. جسم با زاویه‌ی فضایی Ω از نقطه‌ی P دیده می‌شود. میدان الکتریکی در نقطه‌ی P را می‌توان به دو مولفه تجزیه کرد. یک مولفه، $\mathbf{E}_\perp$، عمود بر سطح جسم و مولفه‌ی دیگر، $\mathbf{E}_\parallel$، موازی سطح جسم: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel$.

(الف): ثابت کنید که $E_\perp = \sigma\Omega/4\pi\varepsilon_\circ$ است.

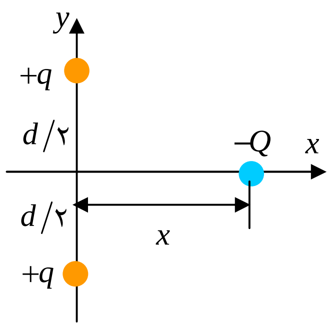
(ب): برای آزمودن درستی پاسخ‌تان در بخش (الف)، میدان الکتریکی صفحه‌ی بینهایت گسترده با توزیع بار یکنواخت σ را حساب کنید.

(پ): جعبه‌ی مکعبی‌شکل با پنج رویه را در نظر بگیرید (یک رویه، در آن، برداشته شده است) چگالی بار رویه‌ها σ است. میدان الکتریکی را در مرکز جعبه حساب کنید (اندازه و جهت میدان را بیابید).

(ت): چهار وجهی منتظم از چهار رویه‌ی با مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته می‌شود. یک چهار وجهی منتظم را در نظر بگیرید که یکی از رویه‌های ان حذف شده است و چگالی بار بر روی سه وجه دیگرش σ است. میدان الکتریکی را در مرکز چهار وجهی بیابید.

۲-۲۲ میدان پوسته‌ی نیمکره: پوسته‌ی نیمکره با چگالی بار سطحی یکنواخت σ و شعاع R را در نظر بگیرید و میدان آن را در نقطه‌ای بر روی محور تقارن نیمکره و به فاصله‌ی z از مرکز حساب کنید. (z می‌تواند هر مقداری بین $-\infty$ و $+\infty$ باشد.)

۲-۲۳ میدان در قاعده‌ی استوانه: یک استوانه‌ی توخالی به شعاع R و چگالی بار سطحی یکنواخت σ از یک طرف تا بینهایت ادامه دارد. میدان الکتریکی را در مرکز قاعده‌ی این پوسته‌ی استوانه‌ای نیم‌بینهایت حساب کنید و سپس با استفاده از نتیجه‌ی خود، میدان الکتریکی را در مرکز قاعده‌ی استوانه‌ی توپر نیم‌بینهایت با شعاع R و چگالی بار حجمی ρ بیابید.



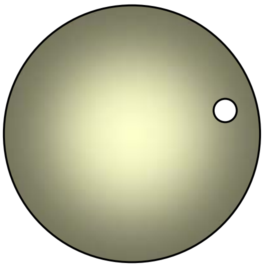
شکل ۲-۲۱ نوسان بار

۲-۲۴ نوسان بار: دو ذره‌ی نقطه‌ای یکسان با بار الکتریکی q برابر شکل (۶۹-۲) به فاصله‌ی d از هم در فضا ثابت‌اند. ذره‌ی سومی با بار $-Q$ و جرم m از مکان $x=a$ از حالت سکون رها می‌شود. این ذره مقید است که بر روی محور xها حرکت کند.

(الف): نشان دهید که اگر $a \ll d$ باشد، بار $-Q$ در روی محور x حرکت نوسانی ساده خواهد کرد.

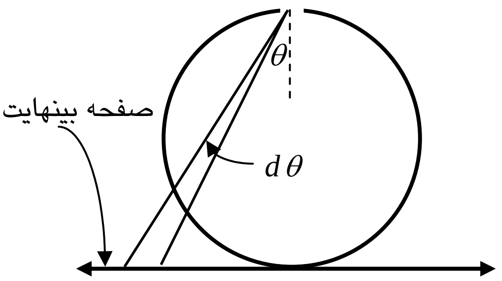
(ب): بسامد نوسان آن را بیابید.

۲-۲۵ ساختن صفه از میله‌ها: صفحه‌ی بینهایت گسترده‌ی با بار سطحی یکنواخت را می‌توان همانند بینهایت میله‌ی باردار با توزیع بار یکنواخت پنداشت که کنار هم چیده شده اند. با استفاده از این واقعیت که میدان میله‌ی بینهایت دراز $\lambda/2\pi\varepsilon_\circ r$ است، بر روی میله‌ها انتگرال بگیرید و نشان دهید که میدان صفحه‌ی باردار بینهایت گسترده با چگالی بار σ برابر $\sigma/2\varepsilon_\circ$ است.


شکل ۲-۲۲ پوسته با سوراخ

۲-۲۶ پوسته‌ی سوراخ: در شکل (۲-۲۲) یک پوسته‌ی کروی یه شعاع a و با چگالی بار سطحی σ نشان داده شده است. از این پوسته، بخش کوچکی به شکل دایره و به شعاع $b \ll a$ بریده شده است. اندازه و جهت میدان الکتریکی را در مرکز این سوراخ حساب کنید. این مسئله را با چند روش می‌توان حل کرد. روشی که برای این فصل مناسب است، انتگرال‌گیری مستقیم است.

۲-۲۷ میدان در نزدیکی میله: میله‌ای به طول 2ℓ با چگالی بار یکنواخت λ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی P به فاصله‌ی $\eta\ell$ $(\circ \le \eta < 1)$ از مرکز میله و به مقدار جزئی به دور از میله است. وقتی از این نقطه به میله نگاه شود، همانند یک میله‌ی بینهایت دراز دیده خواهد شد. بنابراین، مولفه‌ی میدان $\mathbf{E}$ که به میله عمود است $E_\perp = \lambda/2\pi\varepsilon_\circ r$ است (این میدان یک سیم بینهایت دراز در فاصله‌ی r از سیم است. نگاه کنید به معادله‌ی (۹۵-۲)). مولفه‌ی میدان $\mathbf{E}$ موازی با میله، $E_\parallel$ را در نقطه‌ی P بیابید. آیا این مولفه در انتهای میله بینهایت است یا مقدار محدودی باقی می‌ماند؟



شکل ۲-۲۳ ۵ صفحه‌ی بینهایت وپوسته‌ی سوراخ

۲-۲۸ میدان‌های برابر: پاسخ مسئله‌ی ۲۷-۳ این است که میدان در مرکز سوراخ برابر $\sigma/2\varepsilon_\circ$ است. با توجه به معادله‌ی (۹۵-۲) این همچنین میدان یک صفحه‌ی تخت بینهایت گسترده با چگالی بار سطحی σ است. یعنی در مرکز سوراخ در شکل (۲-۲۳) میدان حاصل از پوسته منهای قرص سوراخ با میدان صفحه‌ی بینهایت گسترده یکی است (صفحه تخت افقی را می‌توان در هر ارتفاعی در نظر گرفت.) برابری این دو میدان را ثابت کنید. برای این کار نشان دهید که حلقه‌های متناظر با زاویه‌ی θ و پهنای زاویه‌ای $d\theta$ در روی پوسته و در صفحه، میدان‌های یکسانی را در بالای پوسته

تولید می‌کنند.

۳- انرژی آرایه‌ی بار

۳-۱ پتانسیل و انرژی پتانسیل

قانون کولمب اساسا تمام آن چیزی است که در الکتروستاتیک وجود دارد. اگر اندازه‌ی بارها و مکان‌شان را بدانیم، نیروهای الکتریکی را می‌توانیم پیدا کنیم. هم‌چنین، اگر بارها آزاد باشند تا تحت اثر نیروهای از نوع دیگر حرکت کنند، می‌توانیم آرایش ترازمندی را بیابیم که در آن توزیع بارها ساکن بمانند. در این نگاه، قانون‌های حرکت نیوتون هم همه‌ی آن چیزی است که مکانیک را می‌سازند. در مکانیک و الکتروستاتیک، با شناساندن مفهوم‌های دیگر، توان محاسباتی و فهم خود را افزایش می‌دهیم. یکی از مهم‌ترین مفهوم‌ها، انرژی است.

انرژی در الکتروستاتیک مفهوم سودمندی است، چون نیروهای الکتریکی پایستار اند. وقتی بارها را در میدان الکتریکی به حرکت درمی‌آورید، انرژی مصرف شده را می‌توانید بازیافت کنید. همه چیز کاملا برگشت‌پذیر است.

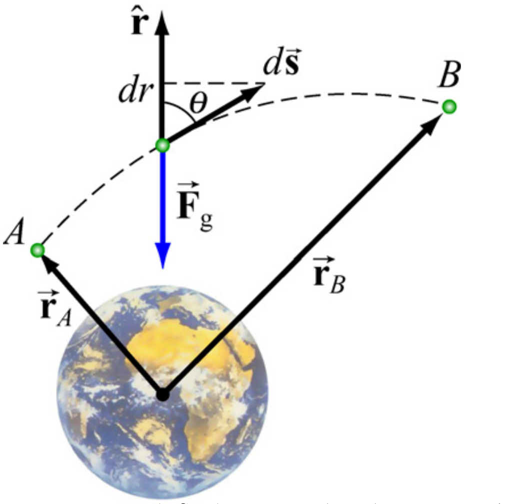
زمین به جسمی به جرم m که در فاصله‌ی r از مرکز آن قرار دارد، نیروی گرانش وارد می کند. اگر زمین را کره‌ی همگن در نظر بگیریم، این نیرو عبارت است از

$$\mathbf{F}_g = -G\frac{Mm}{r^{2}}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۳-۱)$$

که در آن $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg^2}$ ثابت جهانی گرانش و M جرم زمین است. بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ در راستای شعاع و برون سو است. میدان گرانش $\mathbf{g}$ این نیرو عبارت است ازنیروی گرانش در واحد جرم و برابر است با

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = \frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۳-۲)$$

توجه کنید که $\mathbf{g}$ فقط به M ، جرمی که میدان را به وجود می‌آورد، و r (فاصله از M) بستگی دارد. در نزدیکی‌های سطح زمین میدان گرانشی $\mathbf{g}$ به تقریب ثابت و اندازه‌اش $g = GM/r_E^2 \approx 9{,}81\mathrm{m/s^2}$ است که در آن r_E شعاع زمین است. حالا جسمی را در نظر بگیرید که در میدان گرانش زمین برابر شکل (۳-۱) از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B جابه‌جا می‌شود. کار نیروی گرانش برای این جابه‌جایی برابر



شکل ۳-۱ جابه‌جایی در میدان گرانش زمین

$$W_g = \int \mathbf{F}_g \cdot d\,\mathbf{s} = \int_{r_A}^{r_B}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)dr$$

$$= \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = GMm\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) \qquad (۳-۳)$$

است. این نتیجه نشان می‌دهد که W_g مستقل از مسیر است و فقط به نقاط انتهایی A و B بستگی دارد. تمایز بین کاری که میدان گرانش انجام می‌دهد، W_g ، و کاری که عامل خارجی مانند شخص شما انجام می‌دهید و جسم را جابه‌جا می‌کنید، W_{Ext} ، در اینجا اهمیت دارد. این دو کار در یک علامت منفی اختلاف دارند: $W_g = -W_{Ext}$

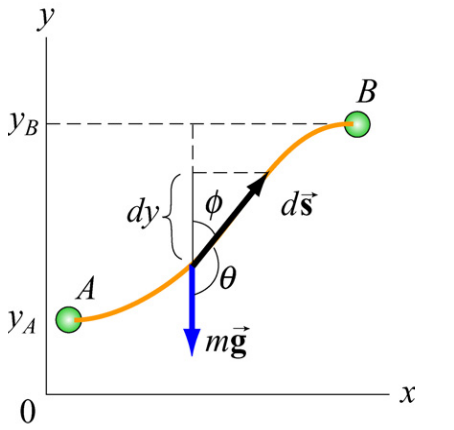
کاری که گرانش در جابه‌جایی جسمی از ارتفاع y_A تا ارتفاع y_B (شکل ۳-۲) انجام می‌دهد برابر

$$W_g = \int \mathbf{F}_g \cdot d\,\mathbf{s} = \int_A^B mg\cos\theta ds = -\int_A^B mg\cos\phi ds = -\int_{y_A}^{y_B} mg\,dy = -mg\left(y_B - y_A\right) \quad (۳-٤)$$

است. بازهم می‌بینیم که نتیجه مستقل از مسیر حرکت است و تنها تابعی از تغییر ارتفاع، $\left(y_B - y_A\right)$، است. در مثال بالا اگر مسیر حرکت مسیر بسته‌ای باشد، یعنی جسم از نقطه‌ی A آغاز به حرکت کند و پس از پیمودن مسیری دوباره به همان نقطه‌ی A بازگردد، کار کل نیروی گرانش صفر می‌شود و گوییم نیروی گرانش پایستار است. به طور عمومی‌تر: اگر انتگرال خط نیروی $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته صفر شود، گوییم نیروی $\mathbf{F}$ **پایستار** است: به بیان ریاضی، اگر

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = ٠ \quad (۳-٥)$$

آنگاه $\mathbf{F}$ نیروی پایستار است. این تعریف از نیروهای پایستار برای منظور ما بسنده است. در سه بعد، اگرچه این شرط لازم است اما کافی نیست. در جای خود ما به این موضوع خواهیم پرداخت [۱] .



شکل ۲-۳ جابه‌جایی جرم m از A به B

وقتی با نیروهای پایستار سروکار داریم، بهتر است از مفهوم انرژی پتانسیل، U ، استفاده کنیم. تغییر انرژی پتانسیل جسمی که تحت تاثیر نیروی پایستار $\mathbf{F}$ از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B جابه‌جا می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -W \quad (۳-٦)$$

W مقدار کاری است که نیرو بر روی جسم انجام داده است. برای نیروی گرانش $W = W_g$ است. با توجه به رابطه‌ی (۳-۳) انرژی پتانسیل را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$U_g = -\frac{GMm}{r} + U_0 \quad (۳-٧)$$

$U_٠$ ثابت دلخواهی است که مقدارش به گزینه‌ی نقطه‌ی مرجع بستگی دارد. بهتر است نقطه‌ی مرجع را همواره چنان برگزید که در آنجا $U_٠$ صفر است (یا نقطه‌ی مرجع را جایی انتخاب کنید که مقدار $U_٠$ را در آن نقطه می‌دانید.) در گرانش (اگر در بینهایت بار الکتریکی وجود نداشته باشد،در الکتروستاتیک هم) بینهایت را نقطه‌ی مرجع برمی‌گزینیم: $U_٠(r=\infty)=٠$. چون U_g به گزینه‌ی نقطه‌ی مرجع بستگی دارد، فقط اختلاف انرژی پتانسیل، ΔU، معنی فیزیکی دارد و کمیت اندازه پذیر است. در نزدیکی سطح زمین که میدان گرانشی $\mathbf{g}$ به تقریب ثابت است، اگر جسمی از سطح زمین تا ارتفاع h جابه‌جا شود انرژی پتانسیل‌اش به اندازه‌ی $\Delta U_g = -mgh$ تغییر می‌کند و کار نیروی گرانش در این جابه‌جایی برابر $W_g = -mgh$ است .

مفهوم دیگری که به انرژی پتانسیل نزدیک است، "**پتانسیل**" است. از اختلاف انرژی پتانسیل گرانشی ΔU_g می‌توان پتانسیل گرانشی را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\Delta V_g \equiv \frac{\Delta U_g}{m} = -\int_A^B \left(\mathbf{F}_g/m\right)\cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B \mathbf{g}\cdot d\mathbf{s} \quad (۳-٨)$$

از نظر فیزیکی، ΔV_g برابر است با منهای کار در واحد جرم گرانش در جابه‌جایی جسم از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B.

نیرو و میدان الکتروستاتیکی بسیار شبیه نیرو و میدان گرانشی است. نیروی الکتروستاتیک با قانون کولمب داده می‌شود و به

---

[۱] برای توضیح بیشتر برای مثال نگاه کنید به: فیزیکِ یک، فیروز آرش، انتشارات نوپردازان، ۱۳۹۱.

صورت عکس مجذور فاصله است. افزون براین، نیروی الکتروستاتیکی $\mathbf{F}_e$ هم پایستار است.
همانند میدان گرانشی $\mathbf{g}$، برای میدان الکتروستاتیکی $\mathbf{E}$ هم می‌توان اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه‌ی A و B را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\Delta V = -\int_A^B \left(\mathbf{F}_e / q_\circ\right)\cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (۳-۹)$$

که در آن $q_\circ$ بار آزمون است. اختلاف پتانسیل ΔV مقدار کار در واحد بار است که برای جابه‌جایی بار آزمون $q_\circ$ از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B، بدون تغییر انرژی جنبشی آن، هزینه می‌شود. بازهم توجه کنید که پتانسیل الکتریکی با انرژی پتانسیل الکتریکی فرق دارد. این دو کمیت با رابطه‌ی زیر به هم مربوط اند.

$$\Delta U = q_\circ \Delta V \qquad (۳-۱۰)$$

در یکاهای SI یکای پتانسیل الکتریکی ولت (V) است

$$۱V = ۱\,\mathrm{J/C} \qquad (۳-۱۱)$$

هنگامی که با سامانه‌های اتمی سروکار داریم، ژول یکای بسیار بزرگی است و به کار بردنش دشوار است. مقیاس سودمند در این مواقع الکترون ولت (eV) است. یک الکترون ولت مقدار انرژی است که الکترون در گذار از اختلاف پتانسیل یک ولت به دست می‌آورد (یا از دست می‌دهد).

$$۱eV = \left(۱{,}۶\times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C}\right)(۱\,\mathrm{V}) = ۱{,}۶\times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{J} \qquad (۳-۱۲)$$

نکته: درستی قانون کولمب، پتانسیل الکتریکی و جرم فوتون- قانون کولمب می‌گوید نیرو به صورت $۱/r^۲$ تغییر می‌کند. از کجا بدانیم که قانون کولمب دقیقا به صورت $۱/r^۲$ است و ، مثلا، $۱/r^{۲,۰۰۰۱}$ یا $۱/r^{۱,۹۹۹۱}$ نیست؟ از فیزیک مقدماتی می‌دانیم که اگر نیرو به صورت $۱/r^۲$ باشد، انرژی پتانسیل مربوط به آن به صورت $۱/r$ است. پس، پرسش را می‌توان در قالب پتانسیل طرح کرد: از کجا معلوم که انرژی پتانسیل به صورت $1/r$ تغییر می‌کند. انرژی پتانسیل برای نیروی کولمب به‌صورت زیر است.

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} \qquad (۳-۱۳)$$

پیش از آنکه نتایج تجربی را بازگو کنیم، توجه کنید که بنابه نظریه‌ی نسبیت ونظریه‌ی میدان‌ها انرژی پتانسیل باید به‌صورت

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ\,\frac{e^{-kr}}{r} \qquad (۳-۱۴)$$

باشد که در آن ثابت k صفر و یا یک عدد مثبت است. رابطه‌ی (۳-۱۴) **پتانسیل یوکاوا*** نام دارد. اگر $k = ۰$ باشد رابطه‌های (۳-۱۳) و (۳-۱۴) یکی می‌شوند. بنابراین پرسش ما این است که آیا k صفر است؟ نتایج آزمایش ویلیامز، فالرو هیل [۲] بر روی رسانا‌ها نشان داد که پتانسیل با $۱/r^{۱\pm ۱{,}۰\times ۱۰^{-۱۶}}$ متناسب است.
این نتیجه کاملا با $۱/r$ سازگار است. اگر دقیق‌تر نگاه کنیم، باید بگوئیم که هر انحرافی در رفتار پتانسیل از $۱/r$ باید به‌صورت یک تابع نمایی همانند رابطه‌ی (۳-۱۴) باشد و نه تغییر در توان r. ویلیامز و همکارانش با تحلیل داده‌های تجربی و بازنویسی خطای آزمایش به‌صورت نمایی، حد بالای ثابت k را از مرتبه‌ی $k < ۳\times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{cm}^{-۱}$ یافتند. حال اگر $k > ۰$ باشد، در فاصله

---

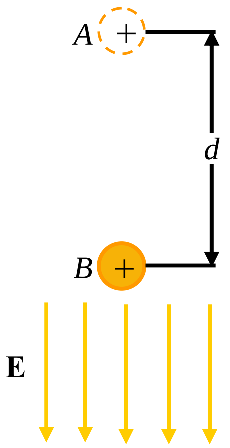
* Yukawa potential

[۲] E. R. Williams, J. E. Faller, and H. A. Hill, Phys. Rev. Lett. 26 (1971) 71.

های کوتاه ($e^{-kr} \approx ۱$) قانون کولمب تقریب بسیار خوبی برای واقعیت است ولی برای فاصله‌های بزرگ (یعنی $e^{-kr} \ll ۱$) دیگر تقریب خوبی نیست و نمی‌توان آن را مانند یک اصل به کار برد. برای مثال، هنگامی که $e^{-kr} \approx e^{-1}$ است (فاصله $r \approx ۱/k$ باشد)، قانون کولمب دیگر قابل استفاده نیست. برای فاصله‌های بزرگتر از $r \approx ۱/k$، عامل نمایی در رابطه‌ی (۳-۱٤) به افت سریع تابع پتانسیل می‌انجامد، به طوری که در فاصله‌ی $r = ۳/k$ تابع پتانسیل تقریباً صفر می‌شود. کمیت $۱/k$ برد پتانسیل نام دارد. توجه کنید که برد پتانسیل کولمب برای $k = ۰$ بینهایت است. یافته‌های تجربی نشان می‌دهد که برای فاصله‌های کمتر از $۱/۳\times۱۰^{-۱۰}\ \mathrm{cm}^{-۱} \approx ۱۰^{۹}\ \mathrm{cm}$ قانون کولمب تقریب خوبی برای واقعیت است. درآزمایش دیگری، با استفاده از ماهواره، میدان مغناطیسی زمین و مشتری را اندازه‌گیری کرده‌اند. (قانون کولمب چه ربطی به میدان مغناطیسی دارد؟ اگر قانون کولمب تعدیل شود لازم است که نیروی مغناطیسی نیز به همان اندازه تعدیل شود). اندازه‌گیری میدان مغناطیسی مشتری توسط سفینه **پایونر**-۱۰ نشان می‌دهد که $k < ۲\times۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{cm}^{-۱}$ است. این نتیجه به مراتب از نتیجه‌ی آزمایش ویلیامز و همکاران بهتر است. اگر به میدان مغناطیسی کهکشان راه شیری توجه کنیم این میدان در فاصله‌ی چندین هزار سال نوری هنوز قابل اندازه‌گیری است و به ما اجازه می‌دهد که نتیجه بگیریم: $k < ۱\times۱۰^{-۲۲}\ \mathrm{cm}^{-۱}$ که البته می‌توان آن را صفر پنداشت. مقدار k به **جرم** فوتون مربوط است $(m = \hbar k/c)$ و حد بالای k جرم فوتون را مقدار $m < ۳\times۱۰^{-۶۰}\mathrm{gr}$ نشان می‌دهد!♣

۳-۲ پتانسیل الکتریکی در میدان یکنواخت

ذره ای با بار الکتریکی $+q$ درمیدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} = E_{۰}\left(-\hat{\mathbf{j}}\right)$ در راستای میدان حرکت می‌کند، شکل (۳-۳). چون مسیر ذره از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B با میدان $\mathbf{E}$ موازی است، اختلاف پتانسیل بین نقطه‌ی A و نقطه‌ی B عبارت است از



شکل ۳-۳ حرکت بار q در جهت میدان $\mathbf{E}$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -E_{۰}\int_A^B ds = -E_{۰}d < ۰ \qquad (۳-۱۵)$$

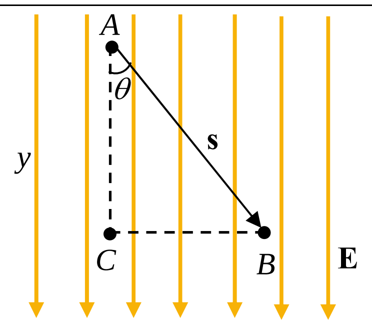
یعنی در مقایسه با نقطه‌ی A ، نقطه‌ی B در پتانسیل پایین‌تری قرار دارد. در واقع، جهت خط‌های میدان الکتریکی همیشه از پتانسیل بیش‌تر به پتانسیل کم‌تر است. تغییر انرژی پتانسیل $\Delta U = U_B - U_A = -qE_{۰}d$ است. چون $q > ۰$ است ، پس $\Delta U < ۰$ است: انرژی پتانسیل بار مثبت با حرکت در جهت میدان کاهش می‌یابد. اگر مسیر ذره از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B با جهت میدان الکتریکی موازی نباشد، بلکه همانند شکل (۳-٤) با آن زاویه‌ی θ بسازد، چه کنیم؟ در این حالت اختلاف پتانسیل به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{s} = -E_{۰}s\cos\theta = -E_{۰}y \qquad (۳-۱٦)$$

توجه کنید که در شکل (۳-٤) جهت افزایش y روبه پایین است. بازهم می‌بینیم که حرکت در جهت میدان $\mathbf{E}$ پتانسیل را کاهش می‌دهد. اگر مسیر حرکت به صورت $A \to C \to B$ می‌شد، پتانسیل بار چقدر تغییر می‌کرد؟ اختلاف پتانسیل در این حالت دو بخش دارد

$$\Delta V = \Delta V_{CA} + \Delta V_{BC} \qquad (۳-۱۷)$$

وقتی از A به C می‌رویم، تغییر پتانسیل برابر $\Delta V_{CA} = -E_{\circ} y$ است؛ امادر حرکت از C به B چون مسیر حرکت به میدان

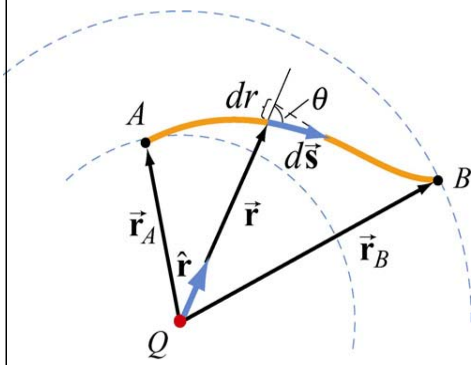


شکل ٤-٣ اختلاف پتانسیل در میدان یکنواخت

E عمود است، تغییر پتانسیل $\Delta V_{CB} = \circ$ است. پس، نتیجه همان است که در رابطه‌ی (٣-١٦) حساب شد. یعنی، نتیجه مستقل از مسیر است و این با پایستار بودن میدان **E** سازگار است. در مسیر $A \to C \to B$ کارمیدان **E** فقط دربخش AC که موازی خط میدان است، غیر صفر است. نقطه‌های B و C در پتانسیل یکسان قرار دارند: $V_B = V_C$. این بدان معنی است که برای جابه‌جایی بار q از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C کاری انجام نمی‌گیرد، چون $\Delta U = q\Delta V$ است. در واقع همه‌ی نقاط خط راستی که B را به C وصل می‌کند، روی "خط هم‌پتانسیل" قرار دارند. توصیف کامل‌تر "هم‌پتانسیل" را به بخش ٣-٥ واگذار می‌کنیم.

٣-٣ پتانسیل الکتریکی بار نقطه‌ای

بار الکتریکی نقطه‌ای Q را در مبداء مختصات تصور کنید. این بار میدان الکتریکی $E = \left(Q/\text{٤}\pi\varepsilon_{\circ} r^{\text{٢}}\right)\hat{\mathbf{r}}$ تولید می‌کند. $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه‌ای از بار به سوی نقطه‌ی میدان است؛ به شکل (٣-٥) نگاه کنید. می‌خواهیم اختلاف پتانسیل بین دو نقطه را در این میدان حساب کنیم. از شکل(٣-٥) پیداست که $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = ds\cos\theta = dr$ است. پس داریم



شکل ٣-٥ اختلاف پتانسیل دو نقطه در میدان یک بار نقطه‌ای

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \frac{Q}{\text{٤}\pi\varepsilon_{\circ} r^{\text{٢}}}\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{s}$$

$$= -\int_A^B \frac{Q}{\text{٤}\pi\varepsilon_{\circ} r^{\text{٢}}} dr = \frac{Q}{\text{٤}\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{\text{١}}{r_B} - \frac{\text{١}}{r_A}\right) \qquad (\text{٣-١٨})$$

باز هم می‌بینیم که اختلاف پتانسیل ΔV فقط به نقاط انتهایی بستگی دارد و مستقل از مسیر است.

همانند گرانش، در اینجا هم فقط اختلاف پتانسیل الکتریکی از نظر فیزیکی معنی دارد و کمیت اندازه پذیر است. کافی است نقطه‌ی مرجعی انتخاب و پتانسیل را در آن نقطه صفر فرض کرد. در عمل بینهایت را نقطه‌ی مرجع انتخاب می‌کنند و پتانسیل آن را صفر فرض می‌کنند (اگر در بینهایت بار الکتریکی وجود نداشته باشد.) بنابراین، پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی P به‌صورت زیر در می‌آید

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{Q}{r} \qquad (\text{٣-١٩})$$

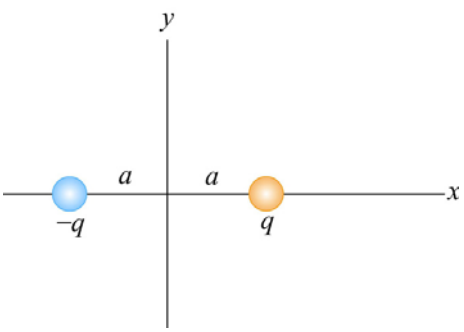
که در آن r فاصله‌ی بار Q تا نقطه‌ی P است.

اگر بیش از یک بار نقطه‌ای وجود داشته باشد، هر باری پتانسیل مربوط به خود را تولید می‌کند و با استفاده از اصل برهم‌نهی پتانسیل در یک نقطه‌ی فضا از جمع پتانسیل‌های بارها در آن نقطه به‌دست می‌آید

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (\text{٣-٢٠})$$

r_i فاصله‌ی بار i-ام تا نقطه‌ای است که پتانسیل در آن نقطه محاسبه می‌شود.

مثال ۳-۱ پتانسیل دو بار نقطه‌ای: در شکل (۳-۶) بار نقطه‌ای $+q$ در $x=a$ وبار نقطه‌ای $-q$ در $x=-a$ قرار دارند. پتانسیل الکتریکی این سامانه را در نقطه‌ی دلخواهی در روی محور x به‌دست آورید و نمودار آن را بکشید.



شکل ۳-۶ دوقطبی الکتریکی

حل: پتانسیل الکتریکی را با استفاده از اصل برنهی می‌توان به‌دست آورد. در نقطه‌ای روی محور x داریم

$$V(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x-a|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{|x+a|}$$

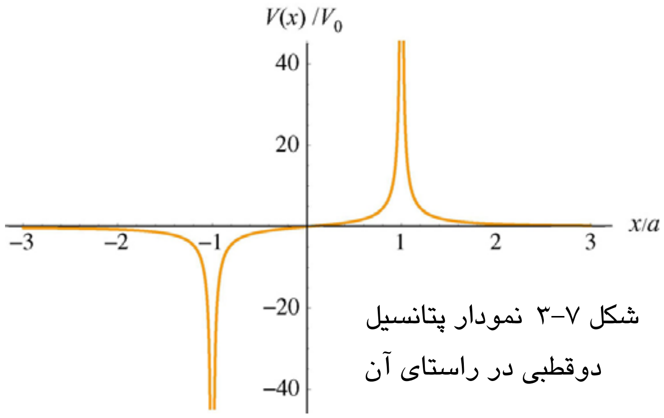
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|x-a|}-\frac{1}{|x+a|}\right] \qquad (۳-۲۱)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{V(x)}{V_0}=\frac{1}{\left|\frac{x}{a}-1\right|}-\frac{1}{\left|\frac{x}{a}+1\right|} \qquad (۳-۲۲)$$

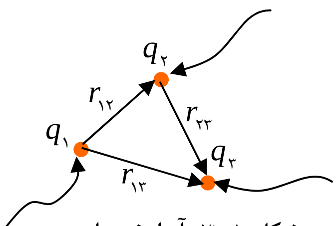
که در آن $V_0=q/4\pi\varepsilon_0 a$ است. نمودار آن در شکل (۳-۷) دیده می‌شود. همان طور که از شکل پتانسیل دیده می‌شود، $V(x)$ در $x/a=\pm1$ واگرا می‌شود. اینها نقاطی اند که بارها در آنجا قرار دارند.



شکل ۳-۷ نمودار پتانسیل دوقطبی در راستای آن

۱-۳-۳ انرژی پتانسیل مجموعه‌ی بارها

در این بخش می‌خواهیم کار لازم برای ایجاد آرایه‌ای از بارهای نقطه‌ای را حساب کنیم. برای این کار، بدون این که بارها شتاب داشته باشند (یعنی در پایان فرایند جابه‌جایی بارها در حال سکون اند)، آنها را یک به یک از بینهایت به مکان‌های مورد نظر می‌آوریم. کار لازم برای جابه‌جایی هر بار را حساب می‌کنیم و سپس آنها رابا هم جمع می‌کنیم تا کار کل به‌دست بیاید. برای آوردن بار نخست، q_1، به نقطه‌ای مانند P_1 کار لازم صفر است زیرا هنوز میدانی وجود ندارد که مجبور باشیم برای چیره شدن به آن کار انجام دهیم: $W_1=0$. حال بار q_2 را از بینهایت به نقطه‌ی P_2 می‌آوریم (شکل ۳-۸). اینک مجبوریم کار انجام دهیم، چون بار q_1 در فضای پیرامون خود میدان ایجاد کرده است و بار q_2 در این میدان جابه‌جا می‌شود. مقدار کار لازم برای این که بار q_2 را از بینهایت به نقطه‌ی P_2 منتقل کنیم برابر $W_2=q_2V_1(P_2)$ است که در آن V_1 پتانسیل حاصل از بار q_1 در نقطه‌ی P_2 (جایی که می‌خواهیم بار q_2 را قرار دهیم) است.



شکل ۳-۸ آرایش بار

$$U_{12} = W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right) \qquad (3\text{-}23)$$

r_{12} فاصله‌ی بین بارهای q_1 و q_2 است. اگربارهای q_1 و q_2 هم علامت باشند، کار انجام شده برای چیره شدن به نیروی رانشی بین آنها مثبت است؛ بنابراین در این حالت $U_{12} > 0$ است. اگر بارها ناهم‌نام باشند، به خاطر نیروی ربایشی بین آنها $U_{12} < 0$ است. برای این که بار سوم، q_3 ، را به سامانه اضافه کنیم، کار لازم عبارت است از

$$W_3 = q_3 \left(V_1 + V_2 \right) = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) \qquad (3\text{-}24)$$

بنابراین، انرژی پتانسیل این آرایش باری برابر

$$U = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) = U_{12} + U_{13} + U_{23} \qquad (3\text{-}25)$$

است. این رابطه نشان می‌دهد که انرژی کل، جمع انرژی‌های جفت بارهاست.

$$U = \sum_i W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \ldots + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \ldots + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} + \ldots \right) \qquad (3\text{-}26)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت کوتاه‌تری نوشت:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (3\text{-}27)$$

شرط $j > i$ برای دوری شمارش دوباره است. برای این که این شرط را بفهمید، به رابطه‌ی (۳-۲۶) توجه کنید. در صورت کسرهای آن زیرنویس q ها به ترتیب افزایشی نوشته شده‌اند (و بنابراین، مثلاً $q_3 q_2$ نداریم) . افزون بر این، هیچ دو زیرنویسی در یک کسر یکسان نیستند (یعنی $q_i q_i$ وجود ندارد). شرط $j > i$ از به حساب آوردن این گونه جمله‌ها جلوگیری می‌کند. چون نگهداشتن حساب ترتیب‌ها دشوار است، بهتر است هر دو نوع جمله‌های $q_i q_j$ و $q_j q_i$ (مانند $q_2 q_3$ و $q_3 q_2$) را در جمع (۳-۲۷) به حساب آوریم. با این کار، هر جمله را آگاهانه دو بار می‌شماریم. پس باید جمع را به دو تقسیم کنیم. در نتیجه، خواهیم داشت

$$U = W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V(r_i) \qquad (3\text{-}28)$$

کمیت درون پرانتز، $V(r_i)$ ، در رابطه‌ی (۳-۲۸) پتانسیل کل در مکان $\mathbf{r}_i$ (مکان بار i-ام) است که همه‌ی بارها، به جز بار i-ام، در آن نقطه تولید می‌کنند.

در رابطه‌ی (۳-۲۸) دیگر لازم نیست ترتیب افزایشی را در نظر بگیریم. اما هنوز شرط $i = j$ باقی است. چون جمله‌های مانند $q_i q_i / r_{ii}$ به برهم‌کنش بار iام با خودش مربوط است (و مقدار آن بینهایت است، چون $r_{ii} = 0$ است) و به آن **خود ـ انرژی**[*] می‌گویند. در عمل ما نگران این موضوع نیستیم. خود ـ انرژی مقداری ثابت (بینهایت) است و افزودن مقدار ثابت به انرژی را می‌توان نادیده گرفت، زیرا تنها جمله‌هایی در انرژی مهم اند که با تغییر مکان بارها تغییر کنند.

رابطه‌ی (۳-۲۸)، مقدار کار لازم برای سامان دادن به آرایه‌ای از بارهای نقطه‌ای است. اگر آرایه ازهم پاشیده شود، همین مقدار کار را باز پس خواهیم گرفت. این مقدار انرژی است که در آرایه ذخیره شده است و آن را انرژی پتانسیل آرایه می‌گویند.

---

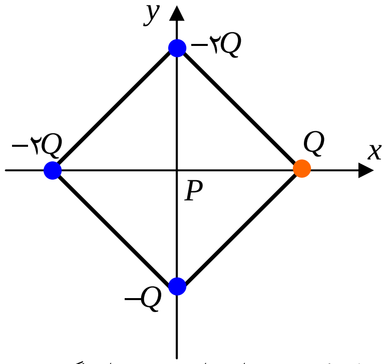
[*] self-energy

مثال ۲-۳ چهار بار در چهار گوشه‌ی مربع: چهار بار $-۲Q$ ، $-۲Q$ ، Q و $-Q$ برابر شکل (۹-۳) در چهار گوشه‌ی مربع به ضلع a قرار دارند. نقطه‌ی P در مبداء مختصات است

(الف): مولفه‌های x و y میدان $\mathbf{E}$ را در نقطه‌ی P پیدا کنید.

(ب): پتانسیل الکتریکی V را در نقطه‌ی P حساب کنید. فرض کنید پتانسیل در بینهایت، صفر است $V_\infty = 0$

(پ): بار دیگری به اندازه‌ی $+۹Q$ را به آرامی از بینهایت به نقطه‌ی P در وسط قاب می‌آوریم. چه مقدار کار لازم است؟



شکل ۹-۳ چهار بار در چهار گوشه‌ی مربع

حل (الف):

$$E_x = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{-۲Q}{\left(a/\sqrt{۲}\right)^۲}\hat{\mathbf{i}} + \frac{Q}{\left(a/\sqrt{۲}\right)^۲}(-\hat{\mathbf{i}})\right] = \frac{-٦Q}{٤\pi\varepsilon_\circ a^۲}\hat{\mathbf{i}} \qquad (۳-۲۹)$$

$$E_y = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{-Q}{\left(a/\sqrt{۲}\right)^۲}\hat{\mathbf{j}} + \frac{-۲Q}{\left(a/\sqrt{۲}\right)^۲}(-\hat{\mathbf{j}})\right] = \frac{۲Q}{٤\pi\varepsilon_\circ a^۲}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۳-۳۰)$$

(ب):

$$V = \sum \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{q_i}{r_i} = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{\sum q_i}{a/\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{٤\pi\varepsilon_\circ a}\left[-۲Q - ۲Q - Q + Q\right] = \frac{-٤\sqrt{۲}Q}{٤\pi\varepsilon_\circ a} \qquad (۳-۳۱)$$

(پ):

$$W = qV = (۹Q)\cdot V = \frac{-۳٦\sqrt{۲}Q^۲}{٤\pi\varepsilon_\circ a} \qquad (۳-۳۲)$$

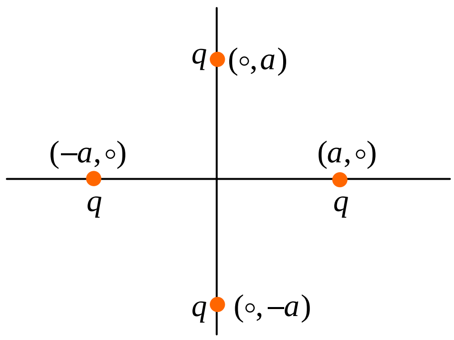
کار منفی است، چون بار خودبه خود به مبداء می‌رود. درست مانند دانه‌ی تسبیحی که در روی سیمی از بینهایت تا صفحه قاب می‌لغزد. برای این جابه‌جایی کار لازم نیست، بلکه برای بازگرداندنش به بینهایت باید کار انجام داد.

مثال ۳-۳ بازهم چهار بار نقطه‌ای: چهار بار یکسان با مقدار q برابر شکل (۱۰-۳) در صفحه‌ی xy قرار دارند.

(الف): پتانسیل الکتریکی V را در مبداء $(x,y)=(\circ,\circ)$ حساب کنید. فرض کنید پتانسیل در بینهایت صفر است.

(ب): فرض کنید $V(z)$ پتانسیل نقطه‌ای در روی محور z با مختصات $(\circ,\circ,z)$ است. برای $z>\circ$ تابع پتانسیل $V(z)$ را حساب کنید.

(پ): کار کل لازم برای سامان دادن این آرایه را حساب کنید.



شکل ۱۰-۳ چهار بار در صفحه‌ی xy

حل: **(الف)** با استفاده از اصل برهم‌نهی داریم

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\frac{q_i}{a}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{a} \qquad (3\text{-}33)$$

(ب): فاصله‌ی هر بار تا نقطه‌ی $(0,0,z)$ برابر $r=\sqrt{z^2+a^2}$ است. بنابراین، با استفاده از اصل برهم‌نهی داریم

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\frac{q_i}{r_i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{\sqrt{z^2+a^2}} \qquad (3\text{-}34)$$

(پ):

$$W=\sum_{i=1}^{4}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{4}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq}{2a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq}{\sqrt{2}a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq}{\sqrt{2}a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq}{2a}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\frac{q^2}{2a}+2\frac{2q^2}{\sqrt{2}a}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q^2}{a}+\frac{4q^2}{\sqrt{2}a}\right] \qquad (3\text{-}35)$$

مثال ۴-۳ انرژی و پتانسیل سه بار: بار $3Q$ در نقطه‌ی $(0,a)$، بار $-Q$ در $(-a,0)$ و بار $2Q$ $2Q$ در نقطه‌ی $(a,0)$قرار دارند.

(الف): انرژی پتانسیل الکتریکی، U ، این آرایه‌ی باری را حساب کنید.

(ب): پتانسیل الکتریکی، V، را در نقطه‌ی $(0,0)$ به‌دست آورید. فرض کنید در بینهایت پتانسیل صفر است.

(پ): بار چهارمی به اندازه‌ی $3Q$ را به آرامی از بینهایت به نقطه‌ی $(0,0)$می‌آوریم. برای این منظور چه مقدار کار باید انجام گیرد؟

حل: **(الف)**

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-Q)(2Q)}{2a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-Q)(3Q)}{\sqrt{2}a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2Q)(3Q)}{\sqrt{2}a}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-1\right) \qquad (3\text{-}36)$$

(ب):

$$V(P)-V(\infty)=V(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{a}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{a} \qquad (3\text{-}37)$$

(پ):

$$W=\Delta U=(3Q)\left[V(P)-V(\infty)\right]=(3Q)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{a}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{12Q^2}{a} \qquad (3\text{-}38)$$

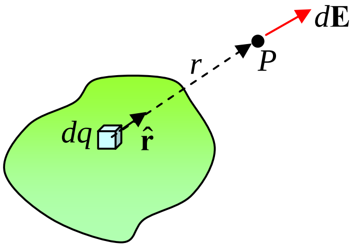
۳-۳-۲ پتانسیل توزیع پیوسته‌ی بار

اگر توزیع بار پیوسته باشد، می‌توان آن را به اجزاء کوچک با بار dq تقسیم کرد و پتانسیل هر جزء بار را در نقطه‌ی مورد نظر حساب و سپس بر روی آنها جمع بست. ما در این‌جا حالت عمومی توزیع حجمی بار را در نظر خواهیم گرفت. توزیع بار حجمی شکل (۳-۱۱) را در نظر بگیرید. این یک توزیع بار موضعی است، یعنی بار به ناحیه‌ی معینی از فضا محدود است و تا بینهایت ادامه ندارد. بنابراین، می‌توان پتانسیل را در بینهایت صفر پنداشت. پتانسیلی را که جزء بار dq در نقطه‌ی P

به فاصله‌ی r از آن تولید می‌کند، عبارت است از

$$dV = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_۰}\frac{dq}{r} \qquad (۳-۳۹)$$

با انتگرال‌گیری از dV پتانسیل کل حاصل از توزیع بار در نقطه‌ی P به‌دست می‌آید.



شکل ۱۱-۳ توزیع پیوسته‌ی بار

$$V(P) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \qquad (۳-٤۰)$$

توجه کنید که انتگرال روی بار dq گرفته می‌شود و r فاصله‌ی هر جزء بار تا نقطه‌ی P است و بنابراین، مقدار **ثابتی نیست**.

برای توزیع بار حجمی $dq = \rho d\tau$ است که اگر در رابطه‌ی (٤۰-۳) جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$V(P) = \int dV = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_۰}\int \frac{dq}{r} = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_۰}\int_{V'} \frac{\rho}{r} d\tau \qquad (۳-٤۱)$$

انتگرال اینک روی حجمی گرفته می‌شود که بار در آن حجم توزیع شده است. اگر توزیع بار سطحی یا خطی باشد رابطه‌ی (٤۱-۳) به صورت زیر در می‌آید

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma}{r} da \quad (\text{توزیع سطحی}) \qquad \text{و} \qquad V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda}{r} d\ell \quad (\text{توزیع خطی}) \qquad (۳-٤۲)$$

۴-۳ به‌دست آوردن میدان الکتریکی از پتانسیل الکتریکی

در رابطه‌ی (۹-۳) ارتباطی بین میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و پتانسیل الکتریکی V برقرار شد: $\Delta V = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$. اگر فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B کوچک و برابر $d\mathbf{s}$ باشد، رابطه‌ی (۹-۳) به شکل دیفرانسیلی زیر درمی‌آید.

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (۳-٤۳)$$

در مختصات کارتزی $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{i}} + E_y\hat{\mathbf{j}} + E_z\hat{\mathbf{k}}$ و $d\mathbf{s} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$ اند که اگر در رابطی (٤۳-۳) جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$dV = -\left(E_x\hat{\mathbf{i}} + E_y\hat{\mathbf{j}} + E_z\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}\right) = -E_x dx - E_y dy - E_z dz \qquad (۳-٤٤)$$

از این رابطه برمی‌آید که

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (۳-٤٥)$$

اینک به جاست که عملگر **گرادیان** را در مختصات کارتزی به صورت زیر تعریف کنیم

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۳-٤٦)$$

با این تعریف، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

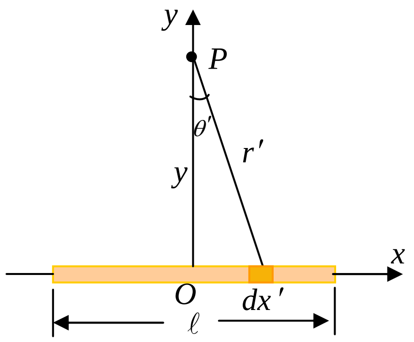
$$\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{i}} + E_y\hat{\mathbf{j}} + E_z\hat{\mathbf{k}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)V = -\nabla V$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla V \qquad (۳-٤۷)$$

توجه کنید که عملگر گرادیان روی کمیت اسکالر (پتانسیل V) اثر می‌کند و کمیت برداری میدان الکتریکی ($\mathbf{E}$) تولید می‌کند. از نظر ریاضی می‌توان گفت که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ برابر است با منهای گرادیان پتانسیل الکتریکی V. از نظر فیزیکی معنی علامت منها این است که اگر بار الکتریکی مثبتی را در جهتی مانند x جابه‌جا کنیم و V با این جابه‌جایی افزایش یابد ($\partial V/\partial x > ٠$)مولفه‌ی میدان الکتریکی در خلاف جهت حرکت بار غیرصفر است ($-E_x \neq ٠$). در مورد گرانش هم همین طور است: اگر جرمی را به اندازه‌ی h از سطح زمین دور کنیم و پتانسیل گرانشی افزایش پیدا کند، نیروی گرانش باید به سوی پایین باشد. اگر توزیع بار تقارن کروی داشته باشد، میدان الکتریکی آن تابعی از فاصله‌ی شعاعی، r ، از توزیع بار خواهد شد؛ یعنی $\mathbf{E} = E_r\hat{\mathbf{r}}$. در این صورت $dV = -E_r dr$ است. اگر $V(r)$ را بدانیم، می‌توانیم میدان $\mathbf{E}$ را به صورت زیر به‌دست آوریم

$$\mathbf{E} = E_r\hat{\mathbf{r}} = -\left(\frac{dV}{dr}\right)\hat{\mathbf{r}} \qquad (٣-٤٨)$$

برای مثال، دیدیم که پتانسیل الکتریکی بار نقطه‌ای q برابر $V(r) = q/٤\pi\varepsilon_٠ r$ است. با استفاده از رابطه‌ی بالا، میدان این بار نقطه‌ای به‌دست می‌آید و برابر $\mathbf{E} = \left(q/4\pi\varepsilon_0 r^2\right)\hat{\mathbf{r}}$ است .

مثال ۵-۳ پتانسیل و میدان میله‌ی باردار: میله‌ای به طول ℓ با چگالی بار خطی یکنواخت λ را برابر شکل (۱۲-۳) در نظر بگیرید. پتانسیل این توزیع بار را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی y از وسط میله به دست آورید. با استفاده از نتیجه‌ی خود، میدان الکتریکی میله را در نقطه‌ی P حساب کنید.



شکل ۱۲-۳ توزیع بار خطی روی میله

حل: جزء طول dx' را همانند شکل (۱۲-۳) در روی میله برگزینید. بار موجود در این جزء طول $dq = \lambda dx'$ است. مکان این چشمه‌ی بار در $(x',٠)$ و مکان نقطه‌ی P در $(٠,y)$ است. فاصله‌ی dx' تا P برابر $r' = \left(x'^٢ + y^٢\right)^{١/٢}$ است. پتانسیل این جزء بار در نقطه‌ی P عبارت است از

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\left(x'^2 + y^2\right)^{1/2}} \qquad (٣-٤٩)$$

اگر بینهایت را جایی فرض کنیم که پتانسیل صفر است، پتانسیل کل میله در نقطه‌ی P برابر است با

$$V = \int dV = \frac{\lambda}{٤\pi\varepsilon_٠}\int_{-\ell/٢}^{\ell/٢}\frac{dx'}{\sqrt{x'^٢ + y^٢}} = \frac{\lambda}{٤\pi\varepsilon_٠}\ell n\left[x' + \sqrt{x'^٢ + y^٢}\right]\Big|_{-\ell/٢}^{\ell/٢} = \frac{\lambda}{٤\pi\varepsilon_٠}\ell n\left[\frac{(\ell/٢) + \sqrt{(\ell/٢)^٢ + y^٢}}{-(\ell/٢) + \sqrt{(\ell/٢)^٢ + y^٢}}\right] \qquad (٣-٥٠)$$

در محاسبه‌ی انتگرال بالا از قاعده‌ی زیر استفاده شد

$$\int\frac{dx'}{\sqrt{x'^٢ + y^٢}} = \ell n\left(x' + \sqrt{x'^٢ + y^٢}\right) \qquad (٣-٥١)$$

نمودار پتانسیل $V(y)/V_٠$ در شکل (۱۳-۳) برحسب تابعی از y/ℓ نشان داده شده است که در آن $V_٠ = \lambda/٤\pi\varepsilon_٠$ است. در حد $y \gg \ell$ پتانسیل بالا به صورت زیر در می‌آید:

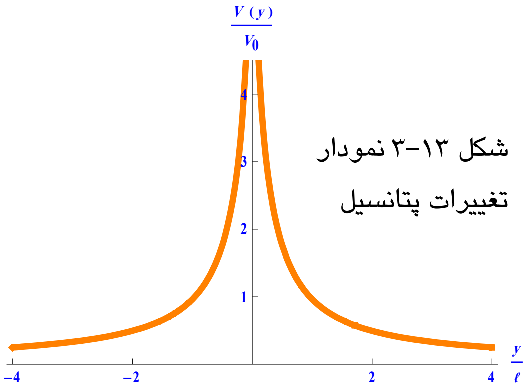
$$V=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ell n\left[\frac{(\ell/2)+(\ell/2)\sqrt{1+(2y/\ell)^2}}{-(\ell/2)+(\ell/2)\sqrt{1+(2y/\ell)^2}}\right]=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ell n\left[\frac{1+\sqrt{1+(2y/\ell)^2}}{-1+\sqrt{1+(2y/\ell)^2}}\right] \qquad (۳-۵۲)$$

$$\approx\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ell n\left(\frac{2}{2y^2/\ell^2}\right)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ell n\left(\frac{\ell^2}{y^2}\right)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ell n\left(\frac{\ell}{y}\right) \qquad (۳-۵۳)$$

میدان الکتریکی مربوط به پتانسیل رابطه‌ی (۳-۵۰) ، به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2+y^2}} \qquad (۳-۵۴)$$

این همان میدانی است که در فصل ۲ برای مثال ۹-۲ به‌دست آوردیم (رابطه‌ی ۹۳-۲ را ببینید).

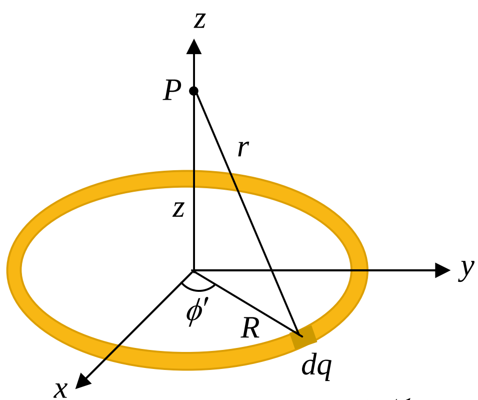


شکل ۱۳-۳ نمودار تغییرات پتانسیل

مثال ۶-۳ پتانسیل حلقه در روی محور آن: حلقه‌ای به شعاع R با چگالی بار خطی یکنواخت λ را برابر شکل (۱۴-۳) در نظر بگیرید. پتانسیل را در فاصله‌ی z از مرکز حلقه و در روی محور آن به دست آورید. با استفاده از $\mathbf{E}=-\nabla V$ مولفه‌ی z میدان الکتریکی را حساب کنید.

حل: جزء طول $d\ell=Rd\phi'$ را برابر شکل در روی حلقه برگزینید. بار موجود در این جزء طول $dq=\lambda d\ell=\lambda Rd\phi'$ است. پتانسیل آن در نقطه‌ی P عبارت است از

$$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\phi'}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad (۳-۵۵)$$



شکل ۱۴-۳: حلقه‌ی با بار خطی یکنواخت و شعاع R

پتانسیل الکتریکی کل حلقه در نقطه‌ی P با انتگرال گیری از رابطه‌ی (۳-۵۵) به‌دست می‌آید

$$V=\int dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}\oint d\phi'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad (۳-۵۶)$$

که در آن $Q=2\pi R\lambda$ بار کل حلقه است. در حد $z\gg R$ حلقه همانند بار نقطه‌ای Q با پتانسیل $(1/4\pi\varepsilon_0)(Q/z)$ خواهد بود. به روشنی دیده می‌شود که رابطه‌ی (۳-۵۶) به این مقدار کاهش می‌یابد. کافی است که در مخرج کسر از R^2 درمقایسه با z^2 چشم‌پوشی کنیم. به‌دست می‌آید

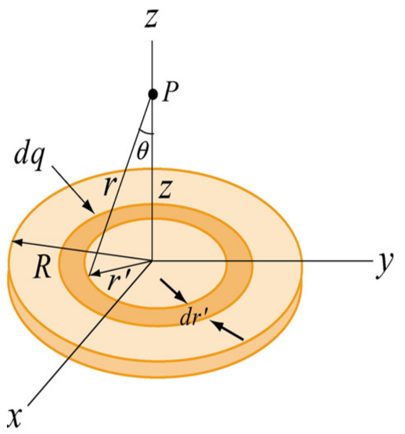
$$V\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z} \qquad (۳-۵۷)$$

مولفه‌ی z میدان الکتریکی مربوط به پتانسیل رابطه‌ی (۳-۵۶) عبارت است از

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(R^2+z^2)^{3/2}} \qquad (۳-۵۸)$$

که با پاسخ مثال ۱۲-۲ در فصل ۲ (رابطه‌ی ۱۰۸-۲) همخوانی کامل دارد.

مثال ۷-۳ پتانسیل قرص باردار: قرصی به شعاع R و چگالی بار سطحی σ برابر شکل (۱۵-۳) در صفحه‌ی xy قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را در فاصله‌ی z از مرکز قرص و در روی محور آن به‌دست آورید.



شکل ۱۵-۳ قرص باردار با چگالی σ

حل: جزء بار را به‌صورت حلقه‌ای به شعاع r' و ضخامت dr' همانند شکل (۱۵-۳) در نظر بگیرید. بار موجود روی این حلقه $dq=\sigma da=\sigma\left(2\pi r'dr'\right)$ است. نقطه‌ی P در روی محور به فاصله‌ی z از صفحه‌ی قرص است. فاصله‌ی نقطه‌ای در روی حلقه‌ی جزء بار تا نقطه‌ی P برابر $r=\left(r'^{۲}+z^{۲}\right)^{۱/۲}$ است. بنابراین، پتانسیل حلقه در نقطه‌ی P عبارت است از

$$dV=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{dq}{r}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{\sigma\left(۲\pi r'dr'\right)}{\sqrt{r'^{۲}+z^{۲}}} \qquad (۳-۵۹)$$

چون قرص از حلقه‌های هم‌مرکز تودرتو ساخته می‌شود، بنابراین، جمع پتانسیل‌های حلقه‌ها، پتانسیل کل قرص را به‌دست می‌دهد. پس، داریم

$$V=\int dV=\frac{\sigma}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{R}\frac{۲\pi r'dr'}{\sqrt{r'^{۲}+z^{۲}}}=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_{\circ}}\left[\sqrt{r'^{۲}+z^{۲}}\right]_{\circ}^{R}=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_{\circ}}\left[\sqrt{R^{۲}+z^{۲}}-|z|\right] \qquad (۳-۶۰)$$

در حالت حدی $|z|\gg R$ می‌توان نوشت

$$\sqrt{R^{۲}+z^{۲}}=|z|\left(۱+\frac{R^{۲}}{z^{۲}}\right)^{۱/۲}=|z|\left(۱+\frac{R^{۲}}{۲z^{۲}}+\cdots\right) \qquad (۳-۶۱)$$

و پتانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید

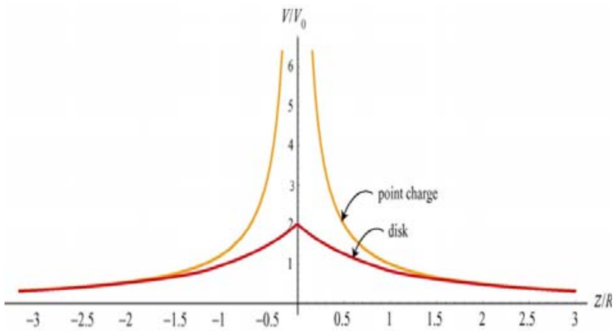
$$V\approx\frac{\sigma}{۲\varepsilon_{\circ}}\frac{R^{۲}}{۲|z|}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{\sigma(\pi R^{۲})}{|z|}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{Q}{|z|} \qquad (۳-۶۲)$$

که در آن $Q=\sigma\pi R^{۲}$ بار کل روی قرص است. همانگونه که انتظار داشتیم، پتانسیل الکتریکی در فاصله‌های دور از قرص، همانند پتانسیل حاصل از بار نقطه‌ای Q می‌شود. در شکل (۱۶-۳) پتانسیل ناشی از قرص و بار نقطه‌ای باهم مقایسه شده است. $V_0=Q/4\pi\varepsilon_0 R$. توجه کنید که پتانسیل در مرکزقرص، یعنی به ازای $z=0$ عبارت است از

$$V_c=\frac{\sigma R}{۲\varepsilon_{\circ}}=\frac{Q}{\pi R^{۲}}\frac{R}{۲\varepsilon_{\circ}}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{۲Q}{R}=۲V_{\circ} \qquad (۳-۶۳)$$

که برابر است با مقدار کار لازم برای این که بار نقطه‌ای Q را از بینهایت به مرکز قرص بیاوریم. اینک می‌توان میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P به‌دست آورد

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|}-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] \qquad (۳-۶۴)$$



شکل ۱۶-۳ مقایسه‌ی پتانسیل ناشی از قرص باردار و بار نقطه‌ای

که با نتیجه‌ی (۱۱۰-۲) در مثال ۱۴-۲ یکسان است. در حد $R \gg Z$ رابطه‌ی بالا به $\sigma/۲\varepsilon_۰$ کاهش می‌یابد که میدان الکتریکی صفحه‌ی بینهایت گسترده است.

مثال ۸-۳ میدان الکتریکی از پتانسیل الکتریکی: فرض کنید پتانسیل ناشی از یک توزیع بار الکتریکی در مختصات کارتزی به صورت زیر داده شده است

$$V(x,y,z) = Ax^۲y^۲ + Bxyz \qquad (۳\text{-}۶۵)$$

که در آن A و B مقادیر ثابت اند. میدان الکتریکی این توزیع بار را به‌دست آورید.

حل: میدان الکتریکی را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۴۵-۳) به دست آورد. داریم

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -۲Axy^۲ - Byz\,, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -۲Ax^۲y - Bxz\,, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -Bxy \qquad (۳\text{-}۶۶)$$

بنابراین، میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \left(-۲Axy^۲ - Byz\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(۲Ax^۲y + Bxz\right)\hat{\mathbf{j}} - Bxy\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۳\text{-}۶۷)$$

مثال ۹-۳ انرژی پتانسیل کره: حجم کره‌ای به شعاع a با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ انباشته شده است. انرژی پتانسیل U کره را بیابید. یعنی مقدار کاری که برای ساختن آن لازم است. کره‌ی توپُر را با برهم چیدن لایه‌ی نازک بسازید و از این واقعیت استفاده کنید که میدان الکتریکی در بیرون یک توزیع بار کروی با میدان ناشی ازیک بار نقطه‌ای جایگزیده در مرکز کره و با مقدار بار برابر بار کل کره برابر است. بار کل کره را Q بنامید و نشان دهید که می‌توان انرژی آن را به‌صورت $\frac{۳}{۵}\left(Q^۲/۴\pi\varepsilon_۰ a\right)$ نوشت.

حل: بار مو.جود در کره‌ای به شعاع r برابر $q = \left(۴\pi r^۳/۳\right)\rho$ است. میدان الکتریکی آن در بیرون کره با میدان الکتریکی بار نقطه‌ای به همین مقدار که در مرکز کره قرار دارد یکی است. پوسته‌ی بعدی به ضخامت dr که به این کره بیافزایید. بار این پوسته برابر $dq = \left(۴\pi r^۲dr\right)\rho$ است. کار لازم برای آوردن این بار dq (که انرژی پتانسیل پوسته در اثر وجود کره است) برابر است با

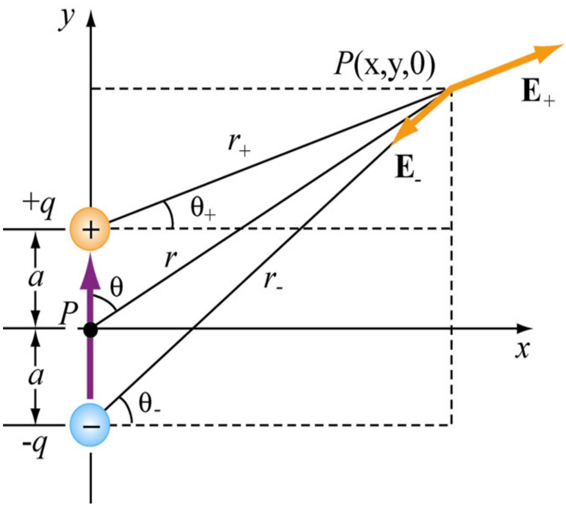
$$dW = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q\cdot dq}{r} = \frac{\left(۴\pi r^۳/۳\right)\rho\cdot\left(۴\pi r^۲\right)\rho}{۴\pi\varepsilon_۰ r} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\left(۴\pi\rho\right)^۲}{۳}r^۴dr \qquad (۳\text{-}۶۸)$$

برای تکمیل کره و رساندن شعاع آن از $r=۰$ به $r=a$ پوسته‌های بعدی را به آن می‌افزاییم. کار لازم برای آن

$$W = \int_۰^a \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\left(۴\pi\rho\right)^۲}{۳}r^۴dr = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\left(۴\pi\rho\right)^۲}{۳}\frac{a^۵}{۵} \qquad (۳\text{-}۶۹)$$

وقتی کره تکمیل شد، بارش برابر $Q = ۴\pi a^۳/۳$ می‌شود. بنابراین، $۴\pi\rho = ۳Q/a^۳$ است. انرژی پتانسیل U راکه همان کار W است می‌توان به صورت $\frac{۳}{۵}\left(Q^۲/۴\pi\varepsilon_۰ a\right)$ نوشت. توجه کنید که بعد کمیت $Q^۲/۴\pi\varepsilon_۰ a$ بعد انرژی است. توجه کنید که ما نگران خود- انرژی پوسته‌ها نازک نیستیم، چون با استفاده از تحلیل ابعادی دیده می‌شود که این انرژی با $\left(dq\right)^۲$ متناسب است و در نتیجه، کمیت کوچکی از مرتبه‌ی دوم است و می‌توان آن را نادیده گرفت.

مثال ۹-۳ پتانسیل دو قطبی الکتریکی: دوقطبی الکتریکی شکل (۱۷-۳) را در راستای محور y در نظر بگیرید و پتانسیل الکتریکی آن را در نقطه‌ی P واقع در صفحه‌ی xy پیدا کنید. از نتیجه‌ی خود استفاده کنید و میدان الکتریکی متناظر را به دست آورید.



شکل ۱۷-۳ پتانسیل و میدان دو قطبی الکتریکی

حل: پتانسیل را با استفاده از اصل برنهش می‌توان به صورت زیر نوشت

$$V=\sum_i V_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{q}{r_+}-\frac{q}{r_-}\right) \qquad (۳-۷۰)$$

که در آن $r_\pm^۲=r^۲+a^۲\mp ۲ra\cos\theta$ اند. در حالت حدی $r\gg a$ داریم

$$\frac{۱}{r_\pm}=\frac{۱}{r}\left[۱+\left(\frac{a}{r}\right)^۲\mp ۲\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]^{-۱/۲}$$
$$=\frac{۱}{r}\left[۱-\frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{r}\right)^۲\pm\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\cdots\right] \qquad (۳-۷۱)$$

و در نتیجه، پتانسیل دوقطبی الکتریکی را می‌توان با این تقریب به صورت زیر نوشت

$$V=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r}\left[۱-\frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{r}\right)^۲+\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta-۱+\frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{r}\right)^۲+\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\cdots\right]$$
$$\approx\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r}\frac{۲a\cos\theta}{r}=\frac{p\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}=\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} \qquad (۳-۷۲)$$

که در آن $\mathbf{p}=۲aq\,\hat{\mathbf{j}}$ گشتاور دوقطبی الکتریکی است. به روشنی دیده می‌شود که این پتانسیل تابعی از فاصله‌ی شعاعی r و زاویه‌ی قطبی θ است. به بیان دیگر، این پتانسیل برحسب متغیرهای مختصات کروی نوشته شده است. عملگر گرادیان در مختصات کروی به صورت زیر است

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}+\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (۳-۷۳)$$

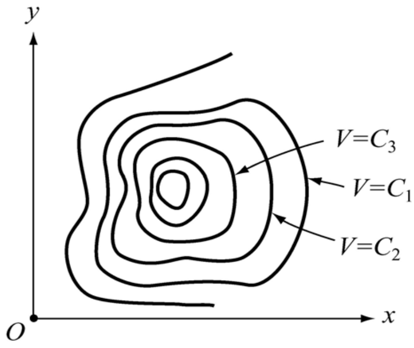
چون پتانسیل تابعی از r و θ است، میدان الکتریکی هم مولفه‌هایی در راستای $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ خواهد داشت. با استفاده از $\mathbf{E}=-\overrightarrow{\nabla V}$ داریم

$$E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{۲p\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۳}\ ,\qquad E_\theta=-\frac{۱}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{p\sin\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۳}\ ,\qquad E_\phi=\cdot \qquad (۳-۷۴)$$

این همان میدان است که در فصل ۲ و در رابطه‌ی (۵۰-۲) به دست آوردیم.

۵-۳ گرادیان و هم‌پتانسیل‌ها:

فرض کنید پتانسیل الکتریکی سامانه‌ای در دو بعد $V(x,y)$ است. خم‌هایی که با $V(x,y)$های ثابت تعریف می‌شوند، خم های هم‌پتانسیل نام دارند. نمونه‌ای از این خم‌های هم‌پتانسیل در شکل (۱۸-۳) نشان داده شده است. این خم‌ها نمایش



شکل ۱۸-۳ خم‌های هم‌پتانسیل

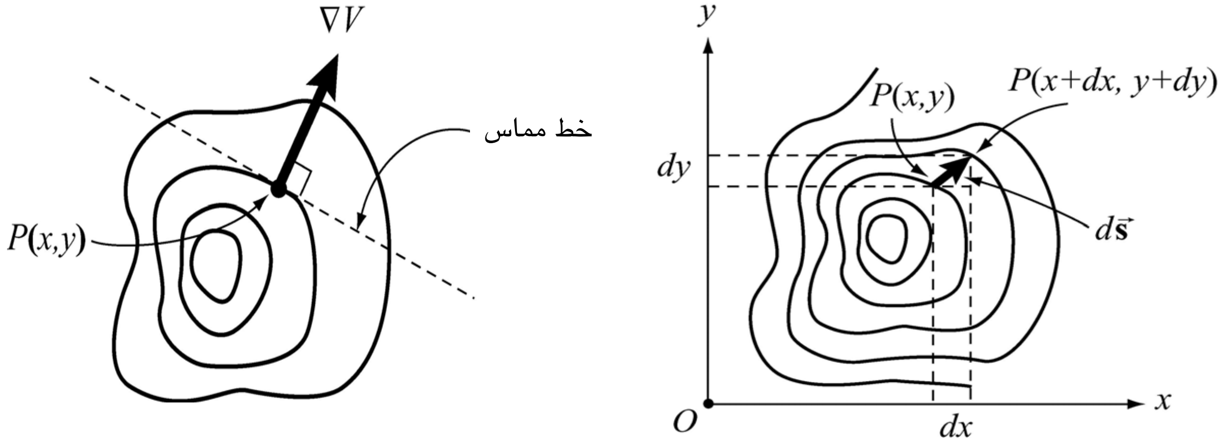
$V(x, y) = c_i$ اند که در آن c_i مقادیر ثابت اند. خم‌های هم پتانسیل در سه بعد، صفحه‌های هم پتانسیل اند که با تابع ثابت = $V(x, y, z)$ تعریف می‌شوند. چون $\mathbf{E} = -\overrightarrow{\nabla V}$ است، می‌توان نشان داد که در هر نقطه، جهت میدان $\mathbf{E}$ همواره در آن نقطه بر هم‌پتانسیل عمود است. این قضیه را در زیر برای دو بعد ثابت می‌کنیم. تعمیم آن به سه بعد سرراست است.

قضیه‌ی ۱-۳ میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در هر نقطه بر هم‌پتانسیل در آن نقطه عمود است.

اثبات: با توجه به شکل (۱۹-۳) ، فرض کنید در نقطه‌ی $P(x, y)$ پتانسیل $V(x, y)$ است. پتانسیل در نقطه‌ی همسایه $P(x+dx, y+dy)$ را $V(x+dx, y+dy)$ بنامید. تغییر پتانسیل بین این دو نقطه‌ی همسایه برابر است با

$$dV = V(x+dx, y+dy) - V(x, y)$$
$$= \left[V(x, y) + \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \cdots\right] - V(x, y) \approx \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy \tag{۳-۷۵}$$

اگر در دوبعد بردار جابه‌جایی را با $d\mathbf{s} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}}$ نشان دهیم، می توان dV را به صورت زیر نوشت



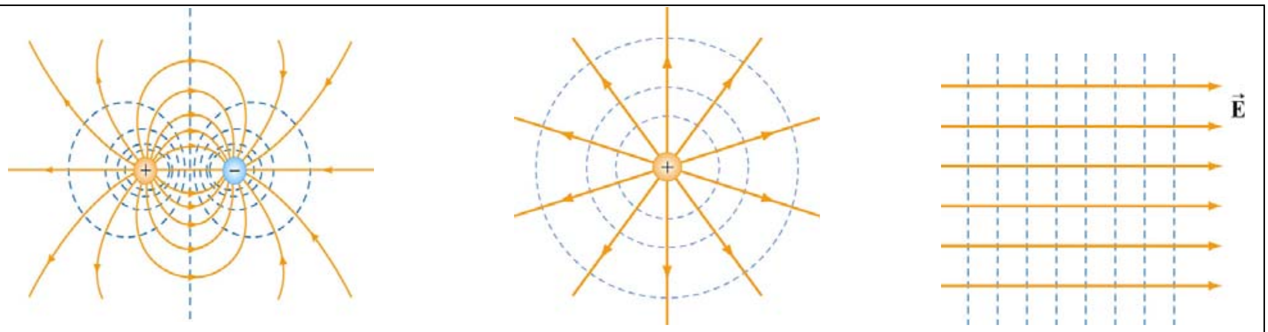
شکل ۱۹-۳ تغییر V در جابه‌جایی از یک هم‌پتانسیل به هم‌پتانسیل همسایه

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}}\right) = (\nabla V)\cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \tag{۳-۷۶}$$

اگر جابه‌جایی $d\mathbf{s}$ در امتداد هم‌پتانسیلی باشد که از نقطه‌ی $P(x, y)$ می‌گذرد، آنگاه $dV = ۰$ است؛ چون جابه‌جایی روی مسیری انجام می‌گیرد که پتانسیل در همه‌ی نقاط مسیر یکسان است. یعنی در امتداد آن هم‌پتانسیل، $\mathbf{E} \perp d\mathbf{s}$ است. در شکل (۲۰-۳) نمونه‌هایی از هم‌پتانسیل ها و میدان نشان داده شده اند. در سه بعد، هم‌پتانسیل‌ها سطوح خواهند بود. از رابطه‌ی (۷۶-۳) دیده می‌شود که وقتی $\overrightarrow{\nabla V}$ با $d\mathbf{s}$ موازی شود، dV بیشینه مقدار خود را خواهد داشت

$$Max\left(\frac{dV}{ds}\right) = |\nabla V| \tag{۳-۷۷}$$

از نظر فیزیکی این بدان معنی است که $\overrightarrow{\nabla V}$ همواره در جهتی است که تغییر V نسبت به جابه‌جایی بیشینه است. برای فهمیدن این نکته، دره ای را در نظر بگیرید. یالی که بیشترین شیب را دارد، جهت $\overrightarrow{\nabla V}$ است.



شکل ۲۰-۳ میدان الکتریکی و خم‌های هم‌پتانسیل. از راست به چپ: میدا ثابت، میدان بار نقطه‌ای و میدان دوقطبی

ویژگی‌های هم‌پتانسیل‌ها را می‌توان به صورت زیر جمع‌بندی کرد:

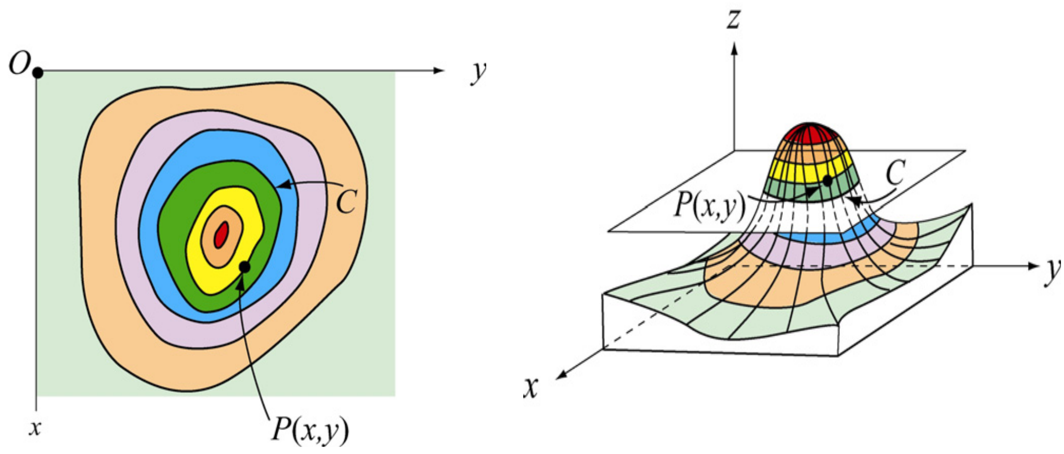
(۱) خط‌های میدان بر هم‌پتانسیل‌ها عمود و جهت آن از پتانسیل بالا به سوی پتانسیل پایین‌تر است.

(۲) بنابه تقارن، سطح‌های هم‌پتانسیل مربوط به بار نقطه‌ای مجموعه‌ی کره‌های هم‌مرکز اند. سطوح هم‌پتانسیل مربوط به میدان الکتریکی ثابت، صفحه‌های عمود بر خط‌های میدان است.

(۳) میدان الکتریکی مولفه‌ی مماس برسطح هم‌پتانسیل ندارد، چه در غیر این صورت، برای جابه‌جایی بار در روی سطح هم‌پتانسیل باید کار انجام داد.

(٤) کار لازم برای جابه‌جایی بار در روی سطح هم‌پتانسیل صفر است.

مانسته‌ی گرانشی هم‌پتانسیل را می‌توان با نقشه‌ی برجسته در شکل (۲۱-۳) نشان داد. هر خم بسته در این نقشه، ارتفاع معینی



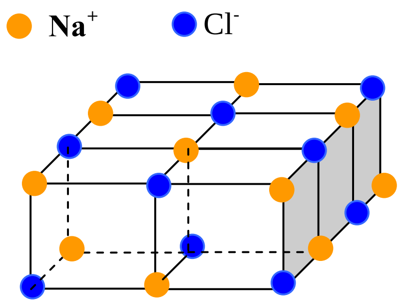
شکل ۲۱-۳ هم‌پتانسیل‌های گرانشی و نقشه‌ی برجسته

از سطح دریا را نشان می‌دهد. به طور ریاضی، آن را با ثابت $= z = f(x, y)$ نشان می‌دهند. چون پتانسیل گرانشی در نزدیکی سطح زمین به صورت $V_g = gz$ است، این خم‌ها هم‌پتانسیل‌های گرانشی اند.

۶-۳ یک کاربرد عملی : انرژی بلور یونی

محاسبه‌ی انرژی پیوندی در فیزیک اتمی و فیزیک حالت جامد اهمیت زیادی دارد. در این‌جا با استفاده از یافته‌های این فصل می‌خواهیم انرژی پیوندی الکتروستاتیک بلورهای یونی را حساب کنیم. بلور یونی مانند سدیم کلراید یک شبکه‌ی سه بعدی است

که یون‌های مثبت Na^+ و Cl^- همانند شکل (۲۲-۳) یک در میان در گوشه‌های شبکه قرار دارند. با دانشی که به‌دست آورده‌ایم می توانیم انرژی لازم برای از هم گسستن بلور و تجزیه‌ی آن به یون‌هایش را حساب و با مقدار تجربی مقایسه کنیم.

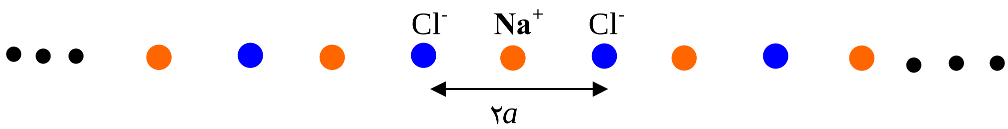


شکل ۲۲-۳ شبکه‌ی بلور سدیم کلراید

ما با این تقریب آغاز میکنیم که توزیع بار هر یک از یون‌ها کروی است و با یون‌های همسایه‌اش هم‌پوشانی ندارد. بنابراین، انرژی پتانسیل برهم‌کنش یک یون با یک یون همسایه عبارت است از

$$U = \frac{\pm e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ} R} \qquad (۳-۷۸)$$

در این رابطه، R فاصله‌ی بین دو یون و e بار الکتریکی یون است. توجه کنید که یک یون منفی هم با یون منفی و هم با یون مثبت برهم‌کنش می‌کند. همچنین، یون مثبت با یون‌های مثبت و یون‌های منفی برهم‌کنش می‌کند. بنابراین، در رابطه‌ی بالا علامت مثبت برای برهم‌کنش یون‌های همنام و علامت منفی برای برهم‌کنش بین بارهای ناهمنام است. برای این که انرژی پتانسیل کل را حساب کنیم باید در رابطه‌ی (۷۸-۳) روی همه‌ی یون‌های بلور جمع ببندیم. یک چنین محاسبه‌ای را برای بلور یک بعدی انجام می‌دهیم. نخست یک یون Na^+ را در بلور به عنوان یون مرجع در نظر می‌گیریم (شکل (۲۳-۳) را نگاه کنید. انرژی پتانسیل برهم‌کنش یون مرجع را با همه‌ی یون‌هایی که روی خط بینهایت دراز قرار دارند، حساب می‌کنیم. چون شبکه‌ی ما یک بعدی است، از اثرهای سطحی در این محاسبه چشم‌پوشی می‌کنیم.



شکل ۲۳-۳ شبکه‌ی یک بعدی ساده‌ی بینهایت دراز

دو یون Cl^- به فاصله‌ی $R = a$ از یون مرجع Na^+ وجود دارند و دو یون Na^+ در فاصله‌ی $R = ۲a$ از یون مرجع Na^+ قرار دارند و.... بنابراین، انرژی این مجموعه عبارت است از

$$U_{ref} = -\frac{۲e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ} a}\left(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots\right) \qquad (۳-۷۹)$$

ضریب ۲ در بیرون پرانتز به این خاطر است که در سمت راست و چپ یون مرجع دو یون یکسان وجود دارد. سری رابطه‌ی (۷۹-۳) به کندی همگرا می‌شود. اگر آن را با بسط سری زیر مقایسه کنیم، می‌توانیم سری رابطه‌ی (۷۹-۳) را جمع ببندیم

$$\ell n\left(۱+x\right) = x - \frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۴}}{۴}+\cdots \qquad (۳-۸۰)$$

برای $x = ۱$ این سری همانند سری رابطه‌ی (۷۹-۳) است. بنابراین، داریم

$$U_{\text{ref}} = -\frac{۲e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ} a}\ell n ۲ = -۱,۳۸۶\frac{e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ} a} \qquad (۳-۸۱)$$

اگر یون مرجع را یون Cl^- هم برمی‌گزیدیم، انرژی مرجع همین مقدار می‌شد. این گونه محاسبه برای شبکه‌ی سه بعدی پیچیده تر است، اما محاسبه‌های عددی مقدار زیر را به دست می‌دهند

$$U_{ref} = -۱,۷۴۷۶\left(e^{۲}/۴\pi\varepsilon_{\circ} a\right) \qquad (۳-۸۲)$$

چون در شبکه‌ی بینهایت گسترده، مکان هر یون Na^+ با مکان هر یون Cl^- هم‌ارز است، انرژی پتانسیل کل با جمع بستن روی رابطه‌ی (۸۲−۳) برای هر یون مرجع ممکن و تقسیم آن بر ۲ به‌دست می‌آید. (تقسیم بر ۲ کردن به این خاطر است که در یک چنین جمع بستن، انرژی پتانسیل هر جفت دوبار شمارده می‌شود.) اگر تعداد یون‌های بلور $۲N$ باشد (N یون Na^+ و N یون Cl^-) انرژی پتانسیل کل برابر

$$U=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۲N)U_{ref} \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{N}=U_{ref} \qquad (۳−۸۳)$$

می‌شود. ثابت شبکه‌ی NaCl برابر $۲a=۵{,}۶۳\times۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{m}$ است. نتیجه‌ی محاسبه‌ی نظری ما در رابطه‌های (۸۲−۳) و (۸۳−۳) برحسب الکترون ولت، برابر $U/N=-۸{,}۹۴\ \mathrm{eV}$ است. (از $۱\mathrm{eV}=۱{,}۶\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{J}$ برای تبدیل یکای انرژی از ژول به الکترون ولت استفاده شد.) مقدار اندازه‌گیری شده $U/N=-۷{,}۹۳\ \mathrm{eV}$ است. اختلاف جزیی بین مقدار نظری و تجربی به این خاطر است که توزیع بار یون‌ها باهم هم‌پوشانی دارند و نیز توزیع آنها کاملا کروی نیست. این هر دو اثر را ما نادیده گرفتیم.

پرسش‌های مفهومی

۱− فرق بین پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی چیست؟

۲− میدان الکتریکی یکنواختی موازی محور x است. در چه جهتی می‌توان یک بار الکتریکی را بدون انجام دادن کار جابه‌جا کرد؟

۳− چرا سطوح هم‌پتانسیل همواره بر خطهای میدان الکتریکی عمود اند؟

۴− میدان الکتریکی در درون پوسته‌ی کروی توخالی صفر است. آیا از این واقعیت می توان نتیجه گرفت که پتانسیل هم در درون کره صفر است؟

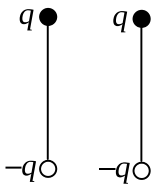
۵− اگر ذره‌ای با بار منفی را در یک میدان الکتریکی قرار دهید

(**الف**): بار الکتریکی از پتانسیل الکتریکی بالاتر به پتانسیل الکتریکی پایین‌تر واز انرژی پتانسیل الکتریکی پایین‌تر به انرژی پتانسیل الکتریکی بالاتر حرکت خواهد کرد.

(**ب**): بار الکتریکی از پتانسیل الکتریکی بالاتر به پتانسیل الکتریکی پایین‌تر واز انرژی پتانسیل الکتریکی بالاتر به انرژی پتانسیل الکتریکی پایین‌تر حرکت خواهد کرد.

(**پ**): بار الکتریکی از پتانسیل الکتریکی پایین‌تر به پتانسیل الکتریکی بالاتر واز انرژی پتانسیل الکتریکی پایین‌تر به انرژی پتانسیل الکتریکی بالاتر حرکت خواهد کرد.

(**ت**): بار الکتریکی از پتانسیل الکتریکی پایین‌تر به پتانسیل الکتریکی بالاتر واز انرژی پتانسیل الکتریکی بالاتر به انرژی پتانسیل الکتریکی پایین‌تر حرکت خواهد کرد.



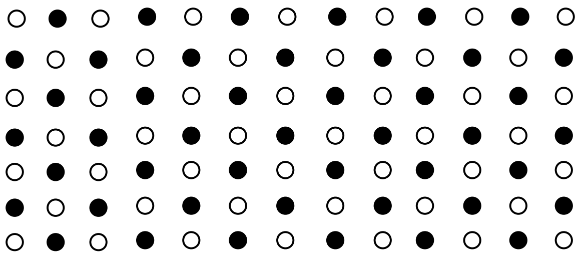
۷− دو دوقطبی در فاصله‌ی بینهایت دوری از هم اند. کار لازم برای آوردن آنها به مکان‌هایی که در شکل دیده می‌شود، برابر است با

(الف): صفر (ب): مثبت است. (پ): منفی است.

(ت): علامت کار به طول (غیر صفر و برابر) دوقطبی‌ها بستگی دارد.

مسئله‌ها

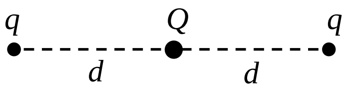
۳-۱ هشت وجهی: سه پروتون و سه الکترون در راس‌های یک هشت وجهی منتظم به ضلع a قرار دارند. می‌خواهیم انرژی سامانه را به‌دست آوریم، یعنی کار لازم برای ساختن این آرایه را با آوردن بارها از فاصله‌های دور از هم حساب کنید. دو آرایه‌ی متفاوت وجود دارد آنها را تعیین کنید. انرژی هر یک از آرایه‌ها را بیابید.



شکل ۲۴-۳ بلور یونی دو بعدی

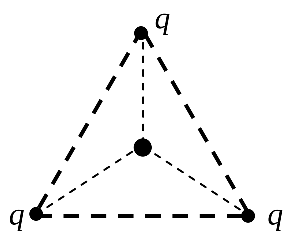
۳-۲ انرژی پتانسیل بلور دو بعدی: بلور یونی دو بعدی صفحه‌ای است که بارهای مساوی و ناهم‌نام به طور متناوب به فاصله‌ی a از یکدیگر چیده شده اند. از یک برنامه‌ی گامپیوتری استفاده کنید و انرژی پتانسیل بر واحد یون را برای بلور دو بعدی بینهایت گسترده حساب کنید. شکل (۲۷-۳) را ببینید.

۳-۳ **(الف)**: ترازمند با انرژی صفر: دو بار نقطه‌ای q برابر شکل (۲۵-۳) به فاصله‌ی d از بار نقطه‌ای Q قرار دارند. به ازای چه مقداربرای Q این سامانه در ترازمندی است؟ یعنی نیروی وارد به هر بار صفر است (این ترازمندی ناپایدار است می‌توان آن را با نگاه کردن به جابه‌جایی عمودی Q به روشنی دید.)



شکل ۲۵-۳ سه بار ترازمند

(ب): در شکل (۲۶-۳) سه بار q در سه راس یک مثلث متساوی‌اضلاع قرار دارند. پرسش بخش (الف) را برای این آرایه پاسخ دهید.



شکل ۲۶-۳ چهار بار ترازمند

(پ): برای هر دو حالت نشان دهید که انرژی کل سامانه‌ها صفر است.

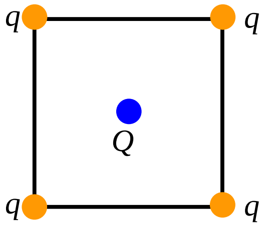
(ت): با توجه به نتیجه‌گیری بالا، درستی گزاره‌ی "انرژی پتانسیل هر مجموعه‌ی بارهای الکتریکی در حالت ترازمندی صفر است." را ثابت کنید. راهنمایی: هدف این است که نشان دهید برای بردن بارها به بینهایت کار کل صفر است. چون نیروی الکتروستاتیک پایستار است، کافی است نشان دهید که برای یک مسیر خاص بارها کار صفر است و در واقع یک مسیر خاصی وجود دارد که نتیجه را به روشنی نشان می‌دهد[۲] .

۳-۴ **نوسان بار در صفحه‌ی حلقه**: حلقه‌ای به شعاع R و چگال بار خطی یکنواخت λ را در نظر بگیرید. ذره‌ای با بار مثبت q و جرم m در مرکز حلقه در حال سکون است. به ذره تلنگر کوچکی وارد می‌کنیم. اگر بار مثبت q مقید به حرکت در صفحه‌ی حلقه باشد، نشان دهید که حرکتش نوسانی است. برای نوسان‌های کوچک بسامد حرکت را بیابید. راهنمایی: انرژی پتانسیل ذره را هنگامی‌که در فاصله‌ی اندک r از مرکز حلقه است،حساب کنید و سپس بر روی حلقه انتگرال بگیرید. شما نیاز دارید از بسط تیلور $1/\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon/2-3\varepsilon^{2}/8$ استفاده کنید

۳-۵ **پایدار یا ناپایدار**: چهار ذره برابر شکل (۲۷-۳) در چهار گوشه‌ی مربع ثابت شده‌اند. بار الکتریکی هر ذره q است. در مرکز مربع بار ناهمنام Q قرار دارد. به ازای چه مقدار Q این سامانه در ترازمندی پایدار است؟ این همان مسئله‌ی ۱۱-۲ در

[۲] Crosignani, B, and Di Porto, P. “Energy of a charge system in an equilibrium configuration,” *American Journal of Physics*, **45**, 876 (1977).

فصل ۲ است. در آنجا پاسخ را با استفاده از نیرو به‌دست آوردید. اینک مسئله را با استفاده از انرژی حل کنید. برتری این روش این است که نیازی به مولفه‌های نیرو نیست. با این حال، اکر دقت نکنید، ریاضیات ممکن است پیچیده شود. اگر از نرم افزار *Mathematica* استفاده کنید، مسئله اسان‌تر می‌شود: تصور کنید که بار $-Q$ را به مقدار جزئی به نقطه‌ی همسایه‌ی (x,y) جابه‌جا می‌کنید. با استفاده از دستور `Series` انرژی این بار را در مکان جدیدش در پایین‌ترین مرتبه‌ی غیربدیهی x و y حساب کنید. اگر انرژی، دست‌کم در یک جهت جابه‌جایی، کاهش پیدا کند، ترازمندی ناپایدار است. ترازمندی نسبت به جابه‌جایی عمود بر صفحه‌ی مربع پایدار است، در صفحه‌ی مربع چه رخ می‌دهد؟ (*توجه:* اگر مسئله‌ی ۱۱–۲ را حل نکرده‌اید، بهتر است نخست آن را حل کنید و سپس به این مسئله بپردازید.)



شکل ۲۷–۳ چهار بار و یک بار

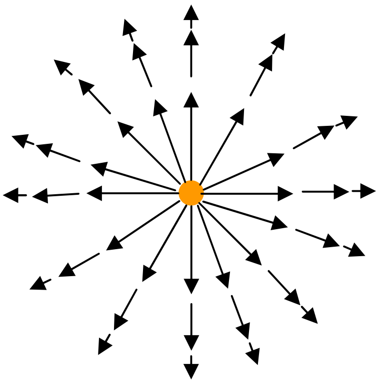
۴- قانون گوس

۴-۱ خط‌های میدان الکتریکی

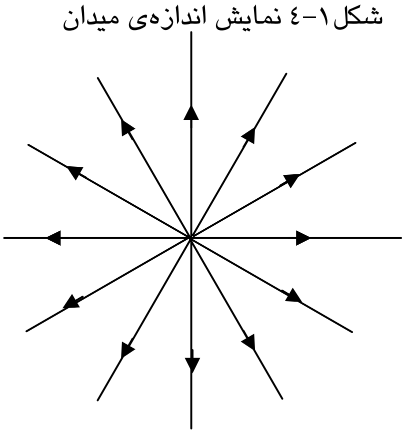
برای این که بتوان میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ ناشی از یک آرایه‌ی بار را حساب کرد، باید ریاضیات مربوط به آن را آموخت. میدان الکتریکی یک میدان برداری است و برای شناختن ویژگی‌های میدان‌های برداری باید دیورژانس (واگرایی) و کرل (تاو) آن را شناخت. در واقع، دانش ریاضی مربوط به میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ از محاسبه‌ی دیورژانس و کرل آن آغاز می‌شود. در این فصل دیورژانس را مستقیم از رابطه‌ی (۱۰-۲) به‌دست خواهیم آورد. محاسبه‌ی کرل $\mathbf{E}$ را به فصل ۵ واگذار می‌کنیم. پیش از آنکه به این محاسبه بپردازیم، با یک مشاهده کیفی آغاز می‌کنیم: بنا به قانون کولمب، میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی r از آن عبارت است از:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (٤-١)$$

در هر نقطه‌ی فضا، به فاصله‌ی r از بار، جهت و اندازه‌ی میدان الکتریکی باید مشخص شود. رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که جهت میدان $\mathbf{E}$ همواره در راستای r و در نتیجه شعاعی است و اندازه‌ی آن به صورت $1/r^2$ با فاصله از بار تغییر می‌کند. با دور شدن از بار، اندازه‌ی میدان هم کاهش می‌یابد. این رفتار میدان الکتریکی در شکل (٤-١) نشان داده شده است. در هر نقطه‌ی فضا، اندازه‌ی میدان $\mathbf{E}$ با طول بردار در آن نقطه نشان داده شده است. شیوه‌ی بهتری برای نمایش این میدان وجود دارد: به جای اینکه به هر نقطه برداری با طول معین نسبت بدهید، در هر راستایی بردارها را همانند شکل (٤-٢) به یکدیگر وصل کنید. اما به نظر می‌رسد که در یک چنین نمایشی اطلاعات مربوط به اندازه‌ی میدان در فاصله r که در شکل (٤-١) با طول بردار در آن نقطه مشخص شده بود، از دست رفته است. در واقع این نگرانی بی مورد است. چون، حالا اندازه‌ی میدان در هر فاصله‌ی r با **چگالی خط‌ها** در آن فاصله داده شده است. البته، در فضای دو بعدیِ شکل (٤-٢) این وضعیت به درستی نشان داده نشده‌است و حتی اندکی گمراه کننده است. زیرا، چگالی خط‌هایی که محیط دایره‌ای به شعاع r را قطع می‌کنند برابر تعداد خط‌ها (n) تقسیم بر محیط دایره ($2\pi r$)؛ یعنی $n/2\pi r$ است. پس، در این صورت چگالی خط‌ها با $1/r$ تغییر می‌کند و در نتیجه نمی‌تواند نمایش شدت میدان الکتریکی باشد؛ چون شدت میدان الکتریکی با فاصله به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند. اما اگر شکل (٤-٢) را در فضای سه بعدی تصور کنید، آنگاه خط‌ها سطح کره‌ای به شعاع r را قطع خواهند کرد و چگالی خط‌ها $n/4\pi r^2$ خواهد شد، که به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند. این خط‌های **پیوسته** نمایش میدان اند و ***خط‌های میدان*** می‌نامیم. خط‌های میدان خطوطی در فضا هستند که در هر نقطه، خط مماس بر آنها در راستای میدان $\mathbf{E}$ است.



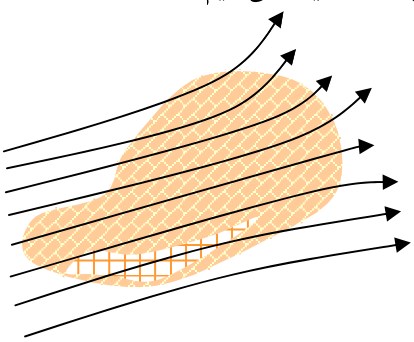
شکل ۱-٤ نمایش اندازه‌ی میدان



شکل ۲-٤ نمایش خط‌های میدان

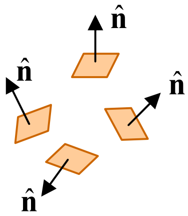
۴-۲ شار میدان الکتریکی

رابطه‌ی بین میدان الکتریکی و چشمه‌ی تولید کننده‌ی آن را با روشی بسیار ساده می‌توان نشان داد. به زودی خواهیم دید که این روش بسیار سودمند است. برای توصیف روش مورد نظر، نخست کمیتی به‌نام **شار**[*] را تعریف می‌کنیم.

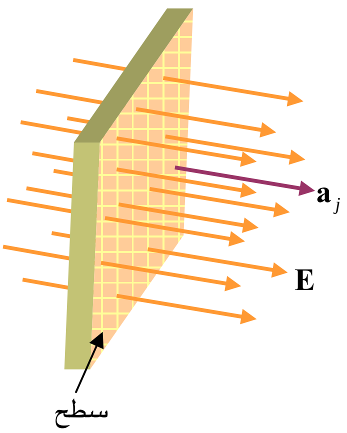


شکل ٤-٣ سطح بسته و خط میدان

ناحیه‌ای از فضا را در نظر بگیرید که در آن میدان الکتریکی وجود دارد. میدان الکتریکی با چند خط میدان نشان داده شده است. سطح دلخواه بسته‌ای مانند سطح یک بادکنک را در این فضا تجسم کنید. سطح بسته و خط‌های میدان در شکل (٤-٣) دیده می‌شوند. سطح بسته را به بخش‌های کوچکی تقسیم کنید. این بخش‌ها به اندازه‌ای کوچک‌اند که هر یک را می‌توان سطح تخت فرض کرد. در این صورت، میدان برداری در سطح هر بخش از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر تغییر چندانی نخواهد داشت. هر بخش مساحتی برابر a دارد و جهت معینی را تعریف می‌کند. جهت هر بخش برابر شکل (٤-٤) با برداری عمود بر سطح آن و به سوی **بیرون** ازآن تعریف می‌شود. (چون سطح بسته است، می‌توانید درون و بیرون سطح را به سادگی از هم تمیز دهید. بنابراین، ابهامی در واژه‌ی به "سوی بیرون" وجود ندارد. ما از ترکیب واژه‌ای "برون‌سو" هم برای آن استفاده خواهیم کرد.) اندازه‌ی مساحت و جهت j – امین بخش را با بردار $\mathbf{a}_j$ نشان دهید. یعنی $\mathbf{a}_j = a_j \hat{\mathbf{n}}_j$ است که در آن $\hat{\mathbf{n}}_j$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح j – امین جزء سطح و به سوی بیرون از آن است. $\mathbf{a}_j$ جهت‌گیری و اندازه‌ی جزء سطح j – ام را به‌دست می‌دهد. تا زمانی که جزء سطح کوچک است، $\mathbf{a}_j$ بستگی به این ندارد که سطح چگونه تقسیم‌بندی شده است.. در شکل (٤-٥) بخشی از سطح بسته نشان داده شده است. فرض کنید میدان الکتریکی در مکان j – امین جزء سطح برابر $\mathbf{E}_j$ است. ضرب داخلی $\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j$ یک عدد است. این عدد را شار گذرنده از آن جزء سطح می‌نامیم. (برای این که ریشه‌ی این نامگذاری را بفهمید، جریان آب رودخانه را در نظر بگیرید. هر مولکول آب سرعتی دارد که از مکانی به مکان دیگر تغییر می‌کند، اما در هر مکان سرعت مولکول نسبت به زمان ثابت است. مجموعه‌ی سرعت‌های مولکول‌های آب رودخانه را می‌توان با میدان برداری $\mathbf{v}$ یا میدان سرعت نشان داد. قابی را با جهت‌گیری $\mathbf{a}$ در رودخانه فرو ببرید. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ آهنگ شارش (با یکای مترمکعب بر ثانیه) آب از درون است. سطحی را در نظر بگیرید



شکل ٤-٤ جهت‌گیری بخش‌های سطح



شکل ٤-٥ خط‌های میدان و جزء سطح

که در شکل (٤-٦) نشان داده شده است. به سطح A "بردار سطح" $\mathbf{A} = A\,\hat{\mathbf{n}}$ را نسبت بدهید. اندازه‌ی $\mathbf{A}$ با مساحت سطح A برابر و جهت آن بر سطح عمود است، چون بردار یکه $\hat{\mathbf{n}}$ بر سطح عمود است. اگر این سطح درمیدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}$ عمود بر سطح (یعنی $\mathbf{E}$ در جهت بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{n}}$ باشد) قرار گیرد شار Φ گذرنده از سطح برابر

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} A = EA \qquad (٤-٢)$$

است. پس، شار گذرنده از یک سطح تعداد خط‌هایی است که به طور عمودی از آن سطح می‌گذرند.

اگر میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ همانند شکل (٤-٦) با خط عمود بر سطح، یعنی با $\hat{\mathbf{n}}$ ، زاویه‌ی θ بسازد، آنگاه شار گذرنده از سطح برابر

[*] Flux

$$\Phi_E = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = EA\cos\theta = E_n A \qquad (٤-٣)$$

است که در آن $E_n = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ مولفه‌ی عمود بر سطح میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ است.
توجه کنید که بنا به تعریف بردار یکه‌ی عمود بر سطح $\hat{\mathbf{n}}$، شار میدان الکتریکی Φ_E هنگامی مثبت است که خط‌های میدان از سطح خارج می‌شوند. اگر خط‌های میدان به سطح وارد شوند، Φ_E منفی است. به بیان دیگر، بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{n}}$ همواره به سطح عمود و به سوی بیرون از سطح تعریف می‌شود.
به طور کلی، سطح ممکن است رویه‌ای خمیده باشد و جهت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر در روی سطح تغییر کند. برای هر میدان برداری $\mathbf{u}(\mathbf{r})$، شار میدان (Φ_u) گذرنده از سطح S به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi_u = \int_S \mathbf{u}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{a}(\mathbf{r}) \qquad (٤-٤)$$

که در آن $d\mathbf{a} = da\,\hat{\mathbf{n}}$ بردار سطح عمود بر جزء سطح da است. تاکید می‌کنم که بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{n}}$ بر جزء سطح da عمود و به سوی بیرون از جزء سطح است.
شار میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ که از جزء سطح ΔA_i در شکل (٤-٧) می‌گذرد

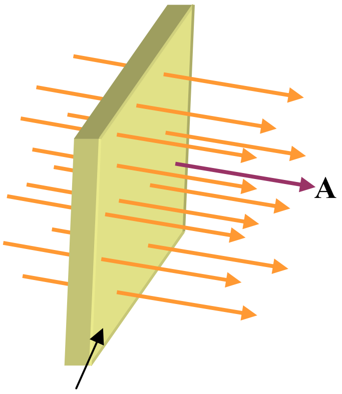
$$\Delta\Phi_E = \mathbf{E}_i\cdot\Delta\mathbf{A}_i = E_i\,\Delta A_i\cos\theta \qquad (٤-٥)$$

است. اگر شارهای گذرنده از بخش‌های سطح را جمع کنیم، شار گذرنده از کل سطح به‌دست می‌آید که یک کمیت اسکالر است و ما آن را با نماد Φ نشان می‌دهیم.
شار کل گذرنده از تمامی سطح S از جمع شارهای گذرنده از هر جزء سطح به دست می‌آید.

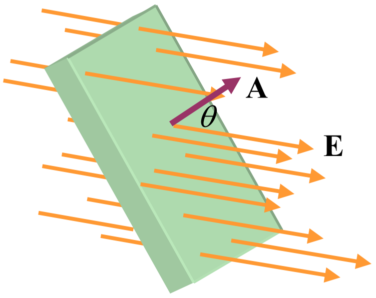
$$\Phi = \sum_j \mathbf{E}_j\cdot\Delta\mathbf{A}_j \qquad (٤-٦)$$

اگر اندازه‌ی بخش‌های ΔA_i روی سطح کوچک‌تر و تعدادشان بسیار زیاد باشد، از گسستگی به پیوستار می‌رسیم و علامت جمع گسسته به انتگرال بر روی سطح تبدیل می‌شود. در این صورت جزء سطح به $\Delta\mathbf{A}_i \to d\mathbf{a}$ میل می‌کند. خواهیم داشت

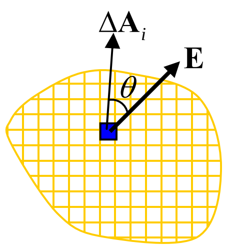
$$\Phi_E = \lim_{\Delta A\to 0}\sum \mathbf{E}_i\cdot\Delta\mathbf{A}_i = \int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \qquad (٤-٧)$$



شکل ٤-٥ خط‌های میدان گذرنده از سطح



شکل ٤-٦ خط‌های میدان و بردار سطح که با هم زاویه‌ی θ می‌سازند



شکل ٤-٧ میدان الکتریکی گذرنده از جزء سطح ΔA. میدان با خط عمود بر سطح زاویه‌ی θ می‌سازد

نکته ۱: چون شدت میدان $\mathbf{E}$ در هر نقطه با چگالی خط‌های میدان (تعداد خط‌ها در واحد سطح) تعیین می‌شود، بنابراین، شار میدان الکتریکی $\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$ با تعداد خط‌های میدان که از سطح S می‌گذرند، متناسب است. در رابطه‌ی (٤-٧) ضرب داخلی $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$ مولفه‌ی عمودی بر سطحِ میدان را برمی‌گزیند.♣

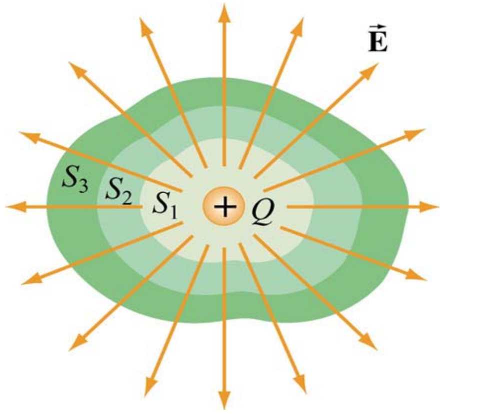
برای این که بتوان انتگرال بالا را حساب کرد، نخست باید سطح S را مشخص کنیم و سپس بر روی $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$ ها جمع ببندیم.
بیشتر وقت‌ها ما با سطح بسته سروکار خواهیم داشت. سطح بسته، سطحی است که حجمی را دربر دارد. برای مثال، رویه‌ی

کره یک سطح بسته است.

ساده‌ترین حالت را در نظر بگیرید: فرض کنید میدان الکتریکی از بار نقطه‌ای و منزوی q ناشی شده است و سطح، کره‌ی به شعاع r است که مرکزش در مکان بار q است. برای یک بار نقطه‌ای که در مرکز مختصات قرار دارد، شار گذرنده از سطح کره‌ای عبارت است از

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \oint_S \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\right)\cdot(r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,\hat{\mathbf{r}}) = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (۴-۸)$$

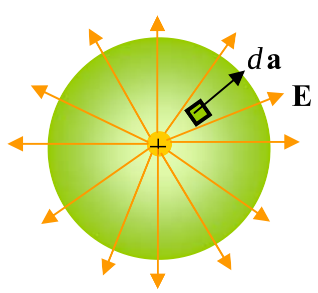
این پاسخ به r بستگی ندارد و مقدار ثابتی است. همان تعداد خط‌های میدان که از بار q آغاز شده‌اند از سطح **هر** کره‌ای و با **هر** شعاعی خواهند گذشت. در واقع، لازم نیست که این سطح کروی باشد، بلکه همانند شکل (۸-۴) ، **هر سطحی با هر** شکل که بار q را در برداشته باشد همان تعداد خطوط میدان را از خود عبور خواهد داد. بنابراین، **شار گذرنده از هر سطح بسته‌ای که بار q را احاطه کرده باشد برابر q/ε_0 است.**



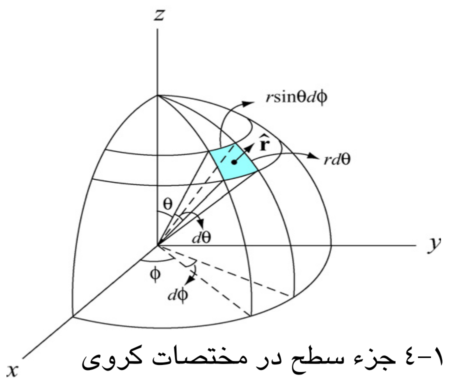
شکل ۸-۴ سطوح مختلف، اما شار خروجی یکسان

نکته ۲: شارمیدان گذرنده از یک سطح، تعداد خط‌های میدان است که از آن سطح می‌گذرند.♣

نکته‌ی ۳ در فصل ۱ در باره‌ی میدان و کنش از راه دور سخن گفتیم. میدان الکتریکی مفهوم مهمی است، چون اجازه می‌دهد تا به فرایندهای الکتریکی به‌صورت کنش‌های موضعی یا کنش‌های تماسی بنگریم. به بیان دیگر، می‌توان نیروی الکتریکی وارد به بار آزمون را نتیجه‌ی تغییر حالت فضای اطراف بار آزمون بدانیم که بارهای دیگر ایجاد می‌کنند. به این ترتیب نیازی به کنش از راه برای توصیف نیرو نیست. کنش از راه دور با تئوری نسبیت ناسازگار است و بنابراین، پذیرفتنی نیست: اگر باری می‌توانست بر روی بار دیگر مستقیماً اثر بگذارد، آنگاه حضور هر بار الکتریکی در یک نقطه‌ی فضا را بار دیگری در نقطه‌ای دیگر به طور **آنی** احساس می‌کرد. این بدان معنی است که انتشار خبر با سرعت فراتر از سرعت نور ممکن است. اما اگر کنش میان دو بار توسط میدان انتقال یابد دیگر نیازی به انتشار آنی آن نیست. هر بار الکتریکی در فضای پیرامون خود اختلال ایجاد می‌کند و این اختلال همانند موج با سرعت نور انتشار می‌یابد و به بار الکتریکی دیگر می‌رسد. همانگونه که خواهیم دید میدان‌ها انرژی و تکانه حمل می‌کنند و در نتیجه مانند حالتهای دیگر ماده (جامد، مایع، گاز، پلاسما و ...) شکلی از ماده اند.♣



شکل ۹-۴ سطح کروی شامل بار $+q$



شکل ۱۰-۴ جزء سطح در مختصات کروی

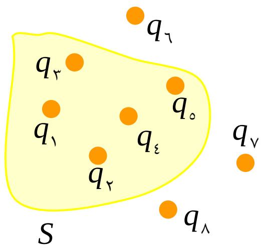
در رابطه (٤-٨) جزء سطح $d\mathbf{a}$ را برابر $r^{2}\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}}$ قرار دادیم. این کمیت، جزء سطح در مختصات کروی است. جزء سطح کوچکی درروی کره در مختصات کروی، همانند شکل (٤-٩) برابر $r^{2}\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}}$ است. جزییات آن در شکل (٤-١٠) دیده می‌شود.

شار میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای را با رابطه (٤-٨) حساب کردیم. اگر به جای یک بار نقطه‌ای جایگزیده در مرکز مختصات، مجموعه‌ای از بارها در اطراف پراکنده باشند، میدان این مجموعه‌ی بارها در نقطه‌ای مانند P بنا به اصل برنهش برابر است با جمع برداری میدان‌های هر یک از بارها در نقطه‌ی P. بنابراین، داریم

$$\mathbf{E}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i \qquad (٤-٩)$$

و شار گذرنده از هر سطحی که این بارها را در برداشته باشد، عبارت است از

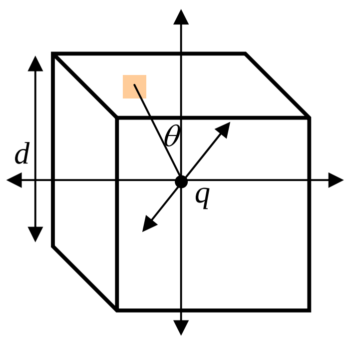
$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{n}\left(\oint_S \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{a}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}q_i\right) \qquad (٤-١٠)$$



شکل ٤-١١ بارهای درون سطح در شار گذرنده از سطح S سهیم دارند، اما بارهای بیرون سهمی در شار ندارند.

انتگرال بالا تعداد همه‌ی خط‌های میدان است که سطح بسته S را قطع می‌کنند. بارهایی که در بیرون این سطح بسته قرار دارند سهمی در شار میدان الکتریکی نخواهند داشت؛ چون خط‌های میدان این بارها از یک سوی وارد سطح و از سوی دیگر خارج می‌شوند و در نتیجه یکدیگر را حذف می‌کنند. در شکل (٤-١١) بارهای $q_1,q_2,\cdot,\cdot,q_5$ در درون سطح بسته‌ی S قرار دارند و در شار گذرنده از سطح سهیم اند؛ اما بارهای q_6,q_7 و q_8 در بیرون سطح S اند و در نتیجه، در محاسبه‌ی شار گذرنده از سطح S سهمی ندارند.

مثال ۱-۴ شار بار نقطه‌ای واقع در مرکز یک مکعب:



شکل ٤-١٢ شار گذرنده از یک رویه‌ی مکعب در اثر بار نقطه‌ای واقع در مرکز آن

در شکل (٤-١٢) بار نقطه‌ای q در مرکز مکعبی به ضلع d قرار دارد. شار گذرنده از یک رویه‌ی مکعب را با استفاده از تعریف شار به‌دست آورید. (این مسئله با روش ساده‌تری هم قابل حل است و در بخش ٢- ٣-٤ دوباره آن را حل خواهیم کرد.)

حل: با به تعریف شار، شار گذرنده از رویه‌ی بالایی واقع در $(z=d/2)$ را حساب می‌کنیم.

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\int E da\cos\theta=\int E\,(dx\,dy)\cos\theta \qquad (٤-١١)$$

میدان در نقطه ای در روی سطح بالایی مکعب $(1/4\pi\varepsilon_0)(q/r^2)$ است که در آن $r^2=x^2+y^2+(d/2)^2$ است. در اینجا r فاصله ی بین بار و نقطه‌ای است که در آنجا می خواهیم میدان را حساب کنیم. هم چنین، با توجه به شکل (٤-١٢) داریم

$$\cos\theta=\frac{d/2}{r}=\frac{d/2}{\sqrt{x^2+y^2+(d/2)^2}} \qquad (٤-١٢)$$

بنابراین، می‌توان نوشت

$$\Rightarrow \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int E\, da \cos\theta = \int E\,(dx\, dy)\cos\theta$$

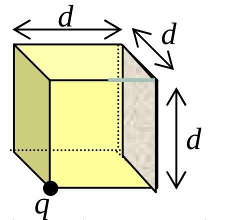
$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-d/2}^{d/2} dx \int_{-d/2}^{d/2} dy \left(\frac{q}{x^2+y^2+(d/2)^2}\right)\left(\frac{d/2}{\sqrt{x^2+y^2+(d/2)^2}}\right) \qquad (۴-۱۳)$$

انتگرالنده تابع زوجی از x و y است. برای هر یک از متغیرها می‌توان انتگرال را از صفر تا $d/2$ حساب کرد و سپس در ۲ ضرب کرد. بهتر است از کمیت های بدون بعد $x \equiv \bar{x}\, d/2$ و $y \equiv \bar{y}\, d/2$ استفاده کنیم:

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)(2)(2)q\int_0^1 (d/2)d\bar{x}\int_0^1 (d/2)d\bar{y}\left(\frac{1}{(d/2)^2(\bar{x}^2+\bar{y}^2+1)}\right)\left(\frac{d/2}{(d/2)\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{4q\,(d/2)^3}{(d/2)^3}\int_0^1 d\bar{x}\int_0^1 d\bar{y}\,\frac{1}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2+1)^{3/2}} = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^1 d\bar{x}\,\frac{1}{(\bar{x}^2+1)\sqrt{\bar{x}^2+2}}$$

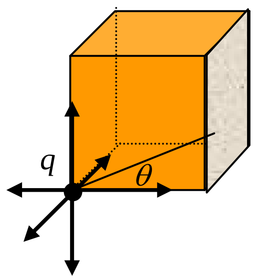
$$= \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{\pi}{6} = \frac{q}{6\varepsilon_0} \qquad (۴-۱۴)$$



شکل ۴-۱۳ بار در یک گوشه‌ی مکعب

مثال ۴-۲ بار q برابر شکل (۴-۱۳) در یک گوشه‌ی مکعبی به ضلع d قرار دارد. شار گذرنده از رویه‌ی روبروی مکعب را به دست آورید. یعنی $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$ گذرنده از رویه‌ی خاکستری را حساب کنید.

حل: مانند مسئله‌ی پیش، این مسئله را هم می‌توان به دو روش حل کرد. در اینجا با توجه به تعریف شار آن را حل می‌کنیم. در بخش ۴-۳-۲ (مثال ۴-۱۳) روش دیگری را برای حل آن به کار خواهیم برد. مکان بار q را مبداء مختصات فرض کنید (شکل (۴-۱۴ را ببینید). شار گذرنده از یک سطح (در این جا شار گذرنده از سطح $z = d$) را حساب می‌کنیم:



شکل ۴-۱۴ مختصات بار q

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_0^d dx\int_0^d dy\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{x^2+y^2+d^2}\right)\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} \qquad (۴-۱۵)$$

توجه کنید که این رابطه همانند انتگرال مسئله‌ی پیش است و تنها $d/2$ جایگزین d شده است. مانند مسئله‌ی بالا اگر تغییر متغیری به کمیت های بدون بعد بدهیم خواهیم داشت

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)q\int_0^1 d\bar{x}\int_0^1 d\bar{y}\,\frac{1}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2+1)^{3/2}}$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)q\,\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\pi}{6} = \frac{q}{24\varepsilon_0} \qquad (۴-۱۶)$$

۴-۳ قانون گوس

۴-۳-۱ شکل انتگرالی قانون گوس

شار کل گذرنده از یک سطح بسته با مقداربار کل موجود در درون سطح متناسب است. این گزاره‌ی کوتاه، بیان قانون گوس

است. بیان ریاضی آن هم ساده است

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \equiv \frac{1}{\varepsilon_\circ} q_{\text{enc}} \qquad (۱۷-٤)$$

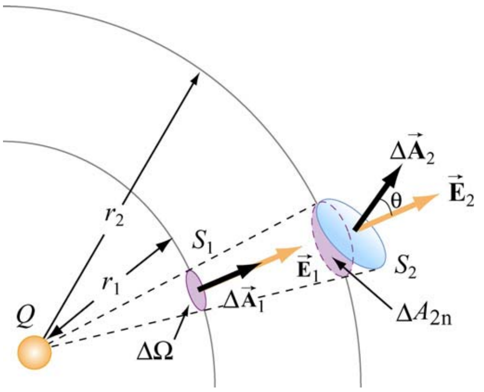
q_{enc} بار کل درون سطح بسته‌ی S است. سطح بسته را سطح گوس خواهیم خواند. سطح گوس یک سطح واقعی نیست بلکه، یک سطح پنداری است. در شکل (۸-٤) هر یک از سطوح $S_۱$ ، $S_۲$ و $S_۳$ یک سطح گوس است. یکی از توجیه‌های درستی قانون گوس این است که تعداد خط‌های میدان که از بار الکتریکی آغاز می‌شوند، مستقل از شکلی است که برای سطح گوس پنداری برمی‌گزینیم تا بار را احاطه کند. برای این که قانون گوس را ثابت کنیم، نخست باید با مفهوم زاویه‌ی فضایی آشنا شویم.

زاویه‌ی فضایی مانسته‌ی سه بعدی زاویه‌ی معمولی است. زاویه‌ی معمولی $\Delta\phi$ با نسبت طول کمانی از دایره به شعاع r همان دایره تعریف می‌شود: $\Delta\phi \equiv \Delta s/r$. چون طول پیرامون دایره $s = ۲\pi r$ است، زاویه‌ی مرکزی مربوط به آن $\phi = \frac{۲\pi r}{r} = ۲\pi$ است. در سه بعد،جزء کمان Δs از یک دایره، با جزء سطح $\Delta\mathbf{A}$ از سطح کره‌ای به شعاع r جایگزین می‌شود. جزئی از سطح کره‌ی $S_۱$ با شعاع $r_۱$ برابر $\Delta\mathbf{A}_۱ = \Delta A_۱\hat{\mathbf{r}}$ است. در شکل (۱۵-٤) جزء سطح $\Delta\mathbf{A}_۱$ را بر روی کره‌ی $S_۱$ به شعاع $r_۱$ (۱۳-٤) در نظر بگیرید. زاویه‌ی فضایی $\Delta\Omega$ مربوط به این جزء سطح با راسی که در مرکز کره قرار دارد، عبارت است از

$$\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta\mathbf{A}_۱\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r_۱^۲} \qquad (۱۸-٤)$$

زاویه‌ی فضایی کمیتی بدون بعد با یکای استرادیان (Sr) است. چون سطح کره‌ی $S_۱$ برابر $٤\pi r_۱^۲$ است، پس اندازه‌ی زاویه‌ی فضایی کره

$$\Omega = \frac{٤\pi r_۱^۲}{r_۱^۲} = ٤\pi \qquad (۱۹-٤)$$



شکل ۱۵-٤ جزء سطح و زاویه‌ی فضایی آن

است. حال کره‌ی $S_۲$ به شعاع $r_۲$ را در شکل (۱۵-٤) در نظر بگیرید که با کره‌ی $S_۱$ هم‌مرکز است. جزء سطح $\Delta\mathbf{A}_۲$ از کره‌ی $S_۲$، با بردار یکه‌ی شعاعی زاویه‌ی θ می‌سازد. پس زاویه‌ی فضایی مربوط به این جزء سطح در روی کره‌ی $S_۲$ عبارت است از

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\mathbf{A}_۲\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r_۲^۲} = \frac{\Delta A_۲\cos\theta}{r_۲^۲} = \frac{\Delta A_{۲n}}{r_۲^۲} \qquad (۲۰-٤)$$

که در آن $\Delta A_{۲n} = \Delta A_۲\cos\theta$ تصویر جزء سطح $\Delta A_۲$ است که بر شعاع کره عمود است. همان طور که از شکل (۱۵-٤) پیداست، زاویه‌های فضایی مربوط به $\Delta A_۱$ و $\Delta A_۲$ باهم برابرند

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A_۱}{r_۱^۲} = \frac{\Delta A_۲\cos\theta}{r_۲^۲} \qquad (۲۱-٤)$$

حال، فرض کنید بار Q در مرکز این کره‌ها قرار دارد. شدت میدان الکتریکی در مرکز جزء سطح $\Delta A_۱$ را $E_۱$ و شدت میدان الکتریکی در مرکز جزء سطح $\Delta A_۲$ را $E_۲$ بنامید. این دو شدت میدان با قانون کولمب به یکدیگر مربوط اند

$$E_i = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{r_i^۲} \quad\Rightarrow\quad \frac{E_۲}{E_۱} = \frac{r_۱^۲}{r_۲^۲} \qquad (۲۲-٤)$$

شار الکتریکی گذرنده از جزء سطح $\Delta A_۱$ کره‌ی $S_۱$ برابر است با

$$\Delta\Phi_۱ = \mathbf{E}_۱\cdot\Delta\mathbf{A}_۱ = E_۱\Delta A_۱ \qquad (۲۳-٤)$$

و شار الکتریکی گذرنده از جزء سطح ΔA_2 کره‌ی S_2 عبارت است از

$$\Delta\Phi_1 = \mathbf{E}_2\cdot\Delta\mathbf{A}_1 = E_2\,\Delta A_2\cos\theta = E_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\cdot\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right)\Delta A_1 = E_1\,\Delta A_1 = \Delta\Phi_1 \qquad (4\text{-}24)$$

بنابراین، می بینیم که شار گذرنده از جزء سطح‌های با زاویه‌ی فضایی یکسان، مقداری ثابت و مستقل از شکل و جهت‌گیری جزء سطح است.

رابطه (۴-۱۷) بیان انتگرالی **قانون گوس** است. در این قانون البته اطلاعات جدیدی، افزون بر آنچه که از قانون کولمب و اصل برنهش آموختیم وجود ندارد، ولی توان محاسباتی آن فوق العاده است. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد رفتار $1/r^2$ قانون کولمب است. بدون این رفتار محاسبه‌ی کلیدی در رابطه (۴-۸) امکان پذیر نبود. در رابطه (۴-۸) شعاع کره حذف و انتگرال مستقل از r شد. اگر این حذف شدن شعاع میسر نمی‌شد، شار میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ نه تنها به بار کل درون سطح بستکی پیدا می‌کرد، به شکل سطح بسته انتخابی نیز وابسته می‌شد.

سطح بسته شکل (۴-۸) یک سطح ساده است. می‌توان سطح‌های بسته با هندسه‌ی پیچیده‌تری را تصور کرد که در آنها خطهای میدان بیش از یک بار سطح را قطع کنند. قانون گوس برای این گونه رویه‌ها هم درست است؛ چون در کلی‌ترین حالت می‌توان نشان داد که تعداد دفعاتی که خطوط میدان بارهای درون یک سطح آن را قطع می‌کنند، **فرد** است و تعداد دفعاتی که خط‌های میدان بارهای بیرون سطح آن را قطع می‌کنند، **زوج** است.

در رابطه (۴-۱۷)، بار کل درون سطح بسته، q_{enc}، می‌تواند مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای و یا هر توزیع بار پیوسته باشد. بنابراین، بسته به این که توزیع بار نقطه‌ای، خطی، سطحی تا حجمی باشد، داریم

$$q_{enc} = \sum_{i=1}^{n} q_i \ , \quad q_{enc} = \int_L \lambda\, d\ell \ , \quad q_{enc} = \int_S \sigma\, da, \quad q_{enc} = \int_V \rho\, d\tau \qquad (4\text{-}25)$$

قانون گوس در رابطه (۴-۱۷) یک معادله‌ی انتگرالی است. این رابطه یکی از چهار معادله‌ی بنیادی الکترودینامیک به نام معادلات مکسول است. می‌توان آن را به شکل دیفرانسیلی هم نوشت و ما در بخش به آن خواهیم پرداخت.

۴-۳-۲ کاربردهای قانون گوس

قانون گوس همواره درست و روش مناسب و سودمندی برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی است. با وجود این، دست‌کم در شکل انتگرالی، همیشه قابل استفاده نیست. فقط هنگامی می‌توان از آن استفاده کرد که سامانه‌ی مورد بررسی تقارن داشته باشد. این تقارن‌ها عبارت اند از تقارن کروی، استوانه‌ای و صفحه‌ای. در چنین وضعیت‌هایی یافتن میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ بسیار آسان‌تر از شیوه‌های دیگر است. درمثال‌های زیر تقارن سامانه و سطح گوس مناسب با تقارن و سرانجام محاسبه‌ی میدان الکتریکی نشان داده شده‌اند.

هنگام استفاده از قانون گوس در شکل انتگرالی آن، دنبال کردن گام‌های زیر می‌تواند سودمند باشد

(۱) با توجه به توزیع بار، تقارن مربوط به آن را مشخص کنید.

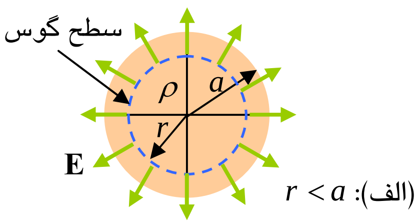
(۲) " سطح گوس" را چنان برگزینید که در روی آن (یا در روی بخش‌هایی از آن) اندازه‌ی میدان الکتریکی ثابت است. جهت میدان الکتریکی را در روی سطح گوس مشخص کنید.

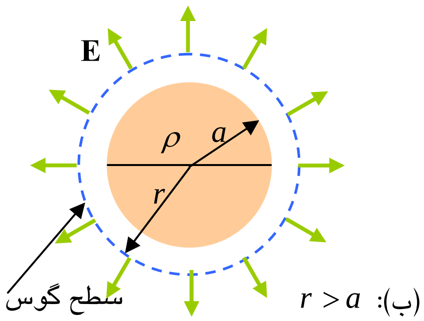
(۳) فضا را به ناحیه‌های متمایز تقسیم کنید. در هر ناحیه، بار موجود در درون سطح گوس، q_{enc} ، را حساب کنید.

(٤) شار میدان الکتریکی، Φ_E ، گذرنده از سطح گوس را در هر ناحیه‌ی فضا به‌دست آورید.
(٥) شار میدان الکتریکی Φ_E را مساوی $q_{\text{enc}}/\varepsilon_0$ قرار دهید و اندازه‌ی میدان الکتریکی را حساب کنید.
در مثال‌های زیر این گام‌ها را پی می‌گیریم

مثال ۳-۴ میدان الکتریکی توزیع بار کروی: میدان الکتریکی حاصل از یک کره باردار به شعاع a و چگالی بار حجمی یکنواخت ρ را در بیرون کره $(r>a)$ و در درون کره $(r<a)$ به‌دست آورید.

حل: (١) روشن است که توزیع بار الکتریکی تقارن کروی دارد. (٢) چون توزیع بار یکنواخت است، جهت میدان در روی کره‌ای به شعاع r ، همواره در راستای شعاع و به سوی بیرون است. در روی این کره، اندازه‌ی میدان الکتریکی مقدار ثابتی است. بنابراین، سطح گوس را همانند شکل (٤-١٦) کره‌ای به شعاع r و هممرکز با توزیع بار در نظر می‌گیریم. (٣) ناحیه‌های $r \le a$ و $r \ge a$ را جداگانه بررسی می‌کنیم.





شکل ٤-١٦ سطح گوس برای کره‌ی با توزیع بار یکنواخت

(٤) محاسبه‌ی شار میدان الکتریکی گذرنده از سطح گوس

(الف) $r \le a$: سطح گوس، همانند شکل (٤-١٦ الف) کره ای به شعاع $r<a$ است. شار گذرنده از این سطح برابر

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \qquad (٤-٢٦)$$

است. ما در پی یافتن $\mathbf{E}$ هستیم، اما $\mathbf{E}$ در زیر علامت انتگرال قرار دارد. در این جا، تقارن مسئله اهمیت پیدا می‌کند و به یاری می‌آید و اجازه می‌دهد تا آن را از زیر انتگرال بیرون بیاوریم. چون اندازه‌ی میدان در همه‌ی نقاط روی سطح گوس مقدار ثابتی است و جهتش در راستای شعاعی است. همچنین، بردار $\mathbf{da}$ در راستای شعاع و همسو با $\mathbf{E}$ است. بنابراین

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}|da = E\oint_S da = E\left(4\pi r^2\right) \qquad (٤-٢٧)$$

(٥) بار موجود در درون سطح گوس: چون توزیع بار یکنواخت است، بنابراین، مقدار بار در درون سطح گوس عبارت است از

$$q_{\text{enc}} = \int_V \rho\, d\tau = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \qquad (٤-٢٨)$$

حال با استفاده از قانون گوس و از برابری رابطه‌های (٤-٢٧) و (٤-٢٨) اندازه‌ی میدان الکتریکی به‌دست می‌آید. داریم

$$\Phi_E = E\,(4\pi r^2) = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad ; \qquad r \le a \qquad (٤-٢٩)$$

اگر با کل برابر Q باشد، چگالی بار را می‌توان به صورت $\rho = Q/\left(4\pi a^3/3\right)$ نوشت و میدان E برحسب بار کل برابر است با

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \quad ; \qquad r \le a \qquad (٤-٣٠)$$

چون جهت میدان در راستای شعاع است، رابطه‌ی بالا در شکل برداری آن عبارت است از

$$\mathbf{E}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{\mathbf{r}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\mathbf{r}=\frac{\left(4\pi a^3/3\right)\rho}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\mathbf{r}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}\qquad ;\qquad r\le a \tag{٤-٣١}$$

(ب) $r\ge a$: در این حالت سطح گوس، همانند شکل (٤-١٦ ب) کره‌ای به شعاع $r>a$ و هممرکز با توزیع بار است. چون شعاع سطح گوس بزرگ‌تر از شعاع توزیع بار است، سطح گوس تمامی بار Q را دربر دارد. پس، در این حالت بار کل محصور در سطح گوس $q_{\text{enc}}=Q=4\pi\rho a^3/3$ است. شار گذرنده از این سطح گوس عبارت است از

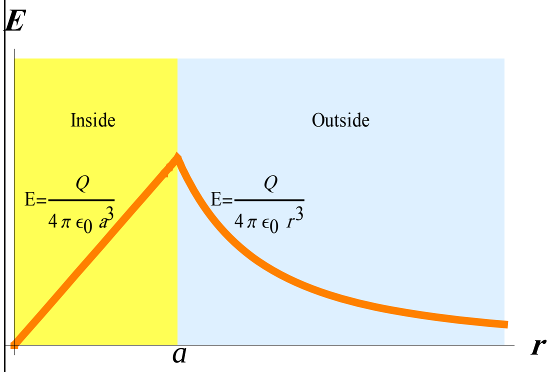
$$\Phi_E=\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=E\oint_S da=E\left(4\pi r^2\right) \tag{٤-٣٢}$$

در اینجا هم از تقارن مسئله استفاده کردیم و E را از زیر انتگرال بیرون آوردیم. در نتیجه، از برابری Φ_E و $q_{\text{enc}}/\varepsilon_0$ داریم:

$$E\left(4\pi r^2\right)=\frac{Q}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\qquad ;\qquad r\ge a \tag{٤-٣٣}$$

یا در شکل برداری آن

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\qquad ;\qquad r\ge a \tag{٤-٣٤}$$



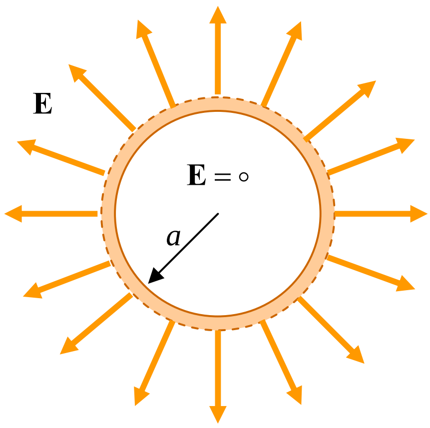
شکل ٤-١٥ نمودار میدان الکتریکی کره‌ی باردار برحسب فاصله از مرکز آن

توجه کنید که در بیرون توزیع بار (یعنی $r>a$) میدان همانند میدان بار نقطه‌ای Q است که در مرکز کره قرار دارد. در شکل (٤-١٥) نمودار رفتار میدان برحسب فاصله r نشان داده شده است.

نکته: در مثال (٤-٣) اگر سطح گوس را غیرکروی برمی‌گزیدیم و یا ρ تقارن کروی نمی‌داشت باز هم شار میدان E برابر $q_{\text{enc}}/\varepsilon_0$ می‌شد، ولی دیگر نمی‌توانستیم $\mathbf{E}$ را از زیر علامت انتگرال خارج کنیم. چون دیگر نمی‌توانستیم مطمئن باشیم که $\mathbf{E}$ در راستای شعاع است و یا اندازه آن در تمام نقاط روی سطح گوس مقدار ثابتی است. **تقارن** برای کاربرد قانون گوس در شکل انتگرالی کلیدی است.♣

مثال ۴-۴ پوسته‌ی کروی: بار $+Q$ در سطح پوسته‌ی کروی بسیار نازکی به شعاع a به‌طور یکنواخت توزیع شده است. میدان الکتریکی را در بیرون و در درون پوسته حساب کنید.

حل: (این همان مثال ٢-١٦ است که با استفاده از قانون کولمب آن را حل کردیم. حل آن با بهره گرفتن از قانون گوس بسیار ساده‌تر است). توزیع بار تقارن کروی دارد. چگالی بار سطحی $\sigma=Q/4\pi a^2$ است. میدان الکتریکی باید شعاعی و همانند شکل (٤-١٧) برون‌سو باشد. فضا را به دو ناحیه‌ی $r\le a$ و $r\ge a$ تقسیم و هر یک را جداگانه بررسی می‌کنیم.



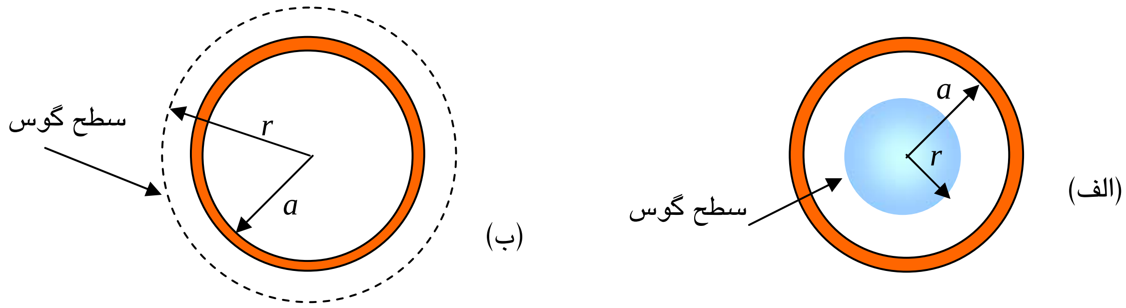
شکل ٤-١٧ میدان الکتریکی پوسته‌ی کروی با توزیع بار یکنواخت

(الف): $r\le a$ (درون پوسته): در این حالت سطح گوس را مانند شکل (٤-١٨ الف) کره‌ای به شعاع $r<a$ برگزینید. مقدار بار موجود در درون این سطح گوس صفر

است: $q_{\text{enc}}=0$ ؛ چون همه‌ی بار در روی سطح پوسته‌ی کروی قرار دارد که در بیرون سطح گوس است. سطح گوس هیچ باری را احاطه نکرده است. بنابراین، با استفاده از قانون گوس، $\Phi_E=q_{\text{enc}}/\varepsilon_0$، داریم

$$\Phi_E=\oint_S \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{a}=\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}\;\Rightarrow\; E\left(4\pi r^2\right)=0\;\Rightarrow\; E=0\quad;\quad r<a \qquad (4-35)$$

(ب): $r\geq a$ در این حالت، سطح گوس همانند شکل (۱۸-۴ ب)، کره‌ای به شعاع $r\geq a$ است. حالا شعاع سطح گوس بزرگ‌تر از



شکل ۱۸-۴ سطح گوس برای پوسته‌ی کروی با بار یکنواخت: (الف) $r<a$ و (ب) $r>a$

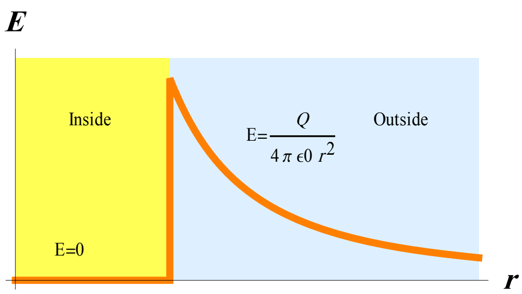
شعاع پوسته است. در نتیجه، همه‌ی بار در درون سطح گوس قرار دارد: $q_{\text{enc}}=Q$. پس، بنابه قانون گوس داریم

$$\Phi_E=\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}\;\Rightarrow\; E\oint_S da=E\left(4\pi r^2\right)=\frac{Q}{\varepsilon_0}\;\Rightarrow\;\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\quad;\quad r\geq a \qquad (4-36)$$

توجه کنید که میدان الکتریکی در بیرون پوسته همانند میدان بار نقطه‌ای Q جایگزیده در مرکز کره است. همچنین توجه کنید که این همان پاسخ مثال ۱۶-۲ در رابطه‌ی (۱۲۹-۲) است. رفتار کیفی میدان در شکل (۱۹-۴) دیده می‌شود. میدان در گذار از سطح در $r=a$ گسسته است: $\lim_{x\to a_+}E\neq\lim_{x\to a_-}E$. این پدیده را در بخش های آینده در همین فصل بررسی خواهیم کرد. وقتی از ناحیه‌های $r<a$ و $r>a$ به سطح باردار پوسته نزدیک می‌شویم، میدان به اندازه‌ی

$$\Delta E=E_+-E_-=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}-0=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (4-37)$$

تغییر می‌کند

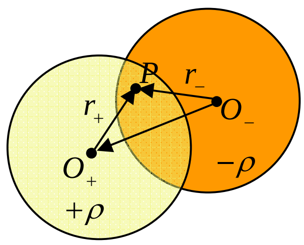


شکل ۱۹-۴ اندازه‌ی میدان الکتریکی E برحسب r

مثال ۵-۴ میدان در ناحیه‌ی همپوشی دو کره: دو کره، هریک به شعاع R با چگالی بار الکتریکی $+\rho$ و $-\rho$ اند. این دو کره مطابق شکل (۲۰-۴) با هم تداخل کرده اند. برداری که مرکز کره منفی را به مرکز کره مثبت وصل می‌کند **s** است. میدان الکتریکی را در ناحیه همپوشی حساب کنید و نشان دهید که مقدار ثابتی است

حل: درمثال ۳-۴ میدان را در درون کره‌ی باردار حساب کردیم. بنابه رابطه‌ی (۳۱-۴) میدان در درون کره‌ی باردار عبارت است از

$$\mathbf{E}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} \qquad (4-38)$$



شکل ۲۰-۴ میدان در ناحیه‌ی همپوشی دو کره

ناحیه‌ی هم‌پوشی بخشی از هر دو کره است و میدان در نقطه‌ای مانند P از هر دو کره‌ی مثبت و کره‌ی منفی ناشی می‌شود. پس، بنابه به اصل برنهش، میدان در این نقطه از جمع برداری میدان در درون کره مثبت ومیدان در درون کره منفی به‌دست می‌آید. میدان در درون کره‌ی مثبت (رابطه‌ی ۳۱-٤ را ببینید) برابر

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{۳\varepsilon_\circ}\mathbf{r}_+ \qquad (٤-۳۹)$$

است. به‌همین ترتیب، میدان در درون کره‌ی منفی

$$\mathbf{E}_- = \frac{-\rho}{۳\varepsilon_\circ}\mathbf{r}_- \qquad (٤-٤٠)$$

است. $\mathbf{r}_+$ و $\mathbf{r}_-$ به ترتیب بردارهایی از مرکز کره‌ی مثبت و مرکز کره‌ی منفی تا نقطه‌ی P اند. پس،

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{۳\varepsilon_\circ}\mathbf{r}_+ - \frac{\rho}{۳\varepsilon_\circ}\mathbf{r}_- = \frac{\rho}{۳\varepsilon_\circ}\left(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-\right) \qquad (٤-٤١)$$

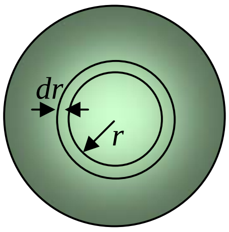
با توجه به شکل (۱۹-٤) دیده می‌شود که $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- = \mathbf{s}$ است. بنابراین داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{۳\varepsilon_\circ}\left(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-\right) = \frac{\rho}{۳\varepsilon_\circ}\mathbf{s} \qquad (٤-٤۲)$$

چون $\mathbf{s}$ بردار ثابتی است، در نتیجه میدان هم در ناحیه‌ی هم‌پوشی ثابت است. یعنی در همه‌ی نقاط درون این ناحیه میدان با رابطه‌ی (٤۲-٤) داده می‌شود.

مثال ۶-۴ کره‌ی با توزیع بار نا یکنواخت: چگالی بار حجمی کره‌ای به شعاع R نایکنواخت و به‌صورت $\rho = \rho_\circ\left(r/R\right)$ است. $\rho_\circ$ مقداری ثابت و r فاصله از مرکز کره است.

(الف): بار کل درون کره چیست؟ **(ب)** : میدان الکتریکی را در همه جا (در درون و بیرون کره) حساب کنید.



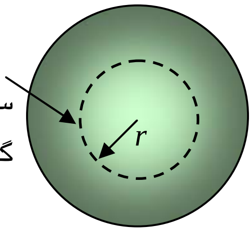
شکل ۲۱-٤ جزء حجم درکره‌ی با توزیع بار نایکنواخت

حل: (الف) جزء حجم را برابر شکل (۲۱-٤) پوسته‌ی کروی به شعاع r و ضخامت dr در نظر بگیرید. حجم این پوسته $d\tau = ٤\pi r^۲ dr$ و بار آن برابر $dq = \rho ٤\pi r^۲ dr$ است. چون کره مجموعه‌ای از پوسته‌های هم‌مرکز است، پس، بار کل درون کره برابر است با

$$Q = \int \rho\, d\tau = \int_\circ^R \rho_\circ\left(\frac{r}{R}\right)\left(٤\pi r^۲ dr\right) = \frac{\rho_\circ ٤\pi}{R}\int_\circ^R r^۳ dr = \frac{\rho_\circ ٤\pi}{R}\frac{r^٤}{٤}\bigg|_\circ^R$$

$$= \frac{\rho_\circ ٤\pi}{R}\frac{R^٤}{٤} = \rho_\circ \pi R^۳ \qquad (٤-٤۳)$$

(ب): فضا دو ناحیه دارد: ناحیه‌ی $r < R$ (درون توزیع بار) و $r > R$ (بیرون کره‌ی باردار). پس، قانون گوس را برای هر یک از این ناحیه‌ها به‌طور جداگانه به‌کار می‌بریم. برای ناحیه‌ی $\mathbf{I}$ ($r < R$) سطح گوسی را به‌صورت کره‌ای با شعاع $r < R$ برابر شکل (۲۲-٤) برگزینید. اندازه‌ی میدان در روی سطح این کره ثابت و جهتش در راستای شعاع است. به بیان دیگر میدان $\mathbf{E}$ در جهت بردار $d\mathbf{a}$ است و در نتیجه، $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = E da$ است. شار گذرنده از این سطح برابر است با



شکل ۲۲-٤ سطح گوس در ناحیه‌ی $r < R$

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \oint E\, da = E\oint da = E\,(4\pi r^2) \qquad (٤-٤٤)$$

اینک باید مقدار بار موجود در درون سطح گوس، $q_{\rm enc}$ ، را حساب کنیم. چون توزیع بار یکنواخت نیست، باید در حجمی که سطح گوس مرزهای آن است، از چگالی بار انتگرال بگیریم:

$$q_{\rm enc} = \int_V \rho\, d\tau = \int_V \rho_\circ \left(\frac{r'}{R}\right)\left(r'^{٢}\sin\theta d\theta d\phi dr'\right) \qquad (٤-٤٥)$$

$r^{٢}\sin\theta d\theta d\phi dr$ جزء حجم در مختصات کروی است. چون $\int_\circ^\pi \sin\theta d\theta = ٢$ و $\int_\circ^{٢\pi} d\phi = ٢\pi$است، در نتیجه، رابطه‌ی (٤-٤٥) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$q_{enc} = \int_V \rho\, d\tau = \int_V \rho_\circ \left(\frac{r'}{R}\right)\left(r'^{٢}\sin\theta d\theta d\phi dr'\right) = (٢)(٢\pi)\frac{\rho_\circ}{R}\int_\circ^r r'^{٣}dr' = \frac{٤\pi\rho_\circ r^{٤}}{٤R} = \frac{\pi\rho_\circ r^{٤}}{R} \qquad (٤-٤٦)$$

بنابراین، از برابری $\Phi_E = q_{\rm enc}/\varepsilon_\circ$ به‌دست می‌آید

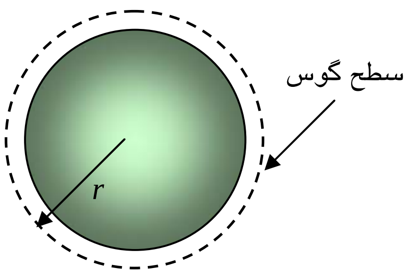
$$E\,(٤\pi r^{٢}) = \frac{\rho_\circ \pi r^{٤}}{R\varepsilon_\circ} \quad\Rightarrow\quad E_I = \frac{\rho_\circ r^{٢}}{٤R\varepsilon_\circ} \quad ; \quad r<R \qquad (٤-٤٧)$$

برای این که تاکید کنیم E مربوط به ناحیه‌ی $r<R$ است آن را با E_I نشان دادیم. نمایش برداری میدان عبارت است از

$$\mathbf{E}_I = \frac{\rho_\circ r^{٢}}{٤R\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{r}} \qquad ; \quad \circ<r<R \qquad (٤-٤٨)$$

ناحیه II ($r>R$): سطح گوس باز هم کره‌ای است که شعاع آن $r>R$ است (شکل ٢٣-٤). بنا به قانون گوس، داریم

$$\oint_S \mathbf{E}_{II}\cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{\rm enc}}{\varepsilon_\circ} \qquad (٤-٤٩)$$



شکل ٢٣-٤ سطح گوس درناحیه‌ی $r>R$

چون شعاع سطح گوس بزرکتر از شعاع توزیع بار است، همه‌ی بار را دربر دارد. مقدار آن در رابطه‌ی (٤-٤٣) حساب شده است: $q_{\rm enc} = Q = \rho_\circ \pi R^{٣}$. روشن است که به خاطر تقارن کروی توزیع بار، میدان الکتریکی در روی سطح گوس شعاعی و اندازه‌ی آن مقدار ثابتی است. در نتیجه، رابطه‌ی (٤-٤٩) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\oint_S \mathbf{E}_{II}\cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_\circ} \;\Rightarrow\; E_{II}\left(٤\pi r^{٢}\right) = \frac{\rho_\circ \pi R^{٣}}{\varepsilon_\circ} \;\Rightarrow\; \mathbf{E}_{\rm II} = E_{\rm II}\hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_\circ R^{٣}}{٤\varepsilon_\circ r^{٢}}\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad r>R \qquad (٤-٥٠)$$

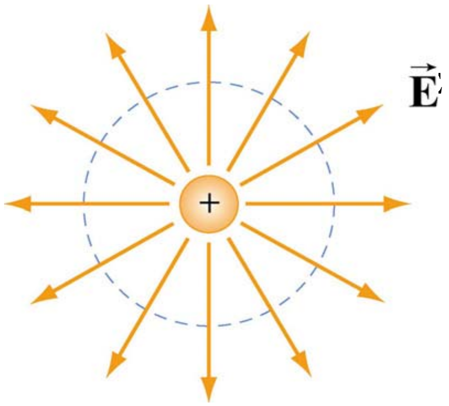
همان طور که دیده می‌شود، در این ناحیه میدان به صورت $١/r^{٢}$ تغییر می‌کند. این را از قانون کولمب هم انتظار داشتیم، چون حالادر بیرون توزیع بار قرار داریم و توزیع بار مانند بار نقطه‌ای جایگزیده در مرکز کره رفتار می‌کند.

- مثال‌های بالا نمونه‌هایی بودند که توزیع بار الکتریکی از تقارن کروی برخوردار بود. همان‌گونه که دیدید، در این وضعیت‌ها، سطح گوس مناسب، کره‌ای هم‌مرکز با توزیع بار است. وجود تقارن به ما اجازه می‌دهد تا میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در قانون گوس، از زیر علامت انتگرال خارج کنیم. با این کار انتگرال گوس بدیهی می‌شود.

تقارن دیگری که اینک می‌توانیم آن را بررسی کنیم، تقارن استوانه‌ای است. اگر توزیع بار الکتریکی تقارن استوانه‌ای داشته

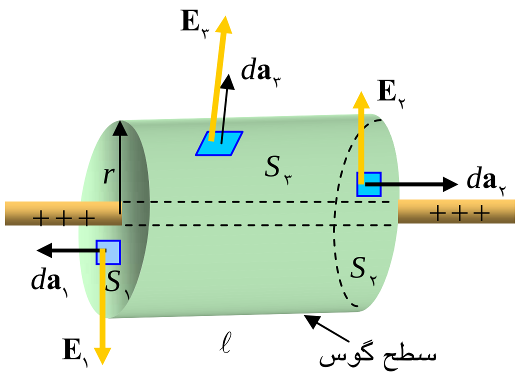
باشد، گزینه‌ی مناسب برای سطح گوس، استوانه‌ای هم‌محور با توزیع بار است. مثال‌های زیر این نکته را روشن می‌کنند.

مثال ۷-۴ میدان سیم باردار بینهایت دراز: بر روی سیم بینهایت درازی با شعاع ناچیز، بار خطی با چگالی یکنواخت λ قرار دارد. میدان الکتریکی سیم را در فاصله‌ی r از سیم به‌دست آورید.



شکل ۲۴-۴ جهت میدان الکتریکی سیم بینهایت دراز

حل: در این مثال هم گام‌ها را برخواهیم شمرد: (۱) سیم بینهایت دراز تقارن استوانه‌ای دارد. (۲) بار الکتریکی به‌طور یکنواخت روی سیم توزیع شده است، بنابراین، جهت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ همانند شکل (۲۴-۴) باید به سوی بیرون از محور تقارن سیم باشد (در این شکل، سیم بر صفحه‌ی کاغذ عمود است). در روی سطح جانبی استوانه‌ای به شعاع r و هم‌محور با سیم، اندازه‌ی میدان الکتریکی مقدار ثابتی است. بنابراین، سطح گوس را استوانه‌ای به طول ℓ و شعاع r و هم‌محور با سیم برمی‌گزینیم. در شکل (۲۵-۴) سطح گوس نشان داده شده است. (۳) مقدار بار موجود در درون سطح گوس (استوانه‌ای به شعاع r و و طول ℓ هم‌محور با سیم) برابر $q_{\text{enc}}=\lambda\ell$ است. (۴) همان‌گونه که در شکل (۲۵-۴) دیده می‌شود، سطح گوس سه قسمت دارد: دو سطح قاعده‌ی $S_۱$ و $S_۲$ و سطح جانبی $S_۳$. شار گذرنده از سطح گوس برابر



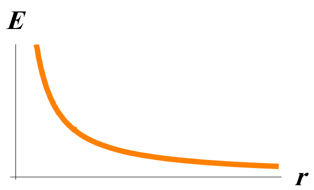
شکل ۲۵-۴ سطح گوس برای سیم بینهایت دراز با توزیع بار یکنواخت

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint_S \mathbf{E}\cdot \boldsymbol{da}_۱\\ &= \oint_{S_۱} \mathbf{E}_۱\cdot \boldsymbol{da}_۱ + \oint_{S_۲} \mathbf{E}_۲\cdot \boldsymbol{da}_۲ + \oint_{S_۳} \mathbf{E}_۳\cdot \boldsymbol{da}_۳\\ &= ۰+۰+E_۳A_۳ = E\,(۲\pi r\ell)\end{aligned} \qquad (۵۱-۴)$$

است. در اینجا $E_۳\equiv E$ قرار دادیم. همان‌گونه که از شکل پیداست، از سطوح قاعده‌ی استوانه شاری نمی‌گذرد؛ چون جزء سطح $\boldsymbol{da}_۱$ و $\boldsymbol{da}_۲$ بر میدان که در راستای شعاعی است، عمود اند. (۵) با استفاده از قانون گوس داریم

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E\,(۲\pi r\ell) = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲\lambda}{r} \qquad (۵۲-۴)$$

این پاسخ ، با نتیجه‌ای که برای مثال ۹-۲ و با رابطه‌ی (۹۵-۲) از قانون کولمب به دست آوردیم کاملا یکسان است. توجه کنیدکه پاسخ نهایی به طول استوانه‌ی سطح گوس بستگی ندارد و با عکس فاصله‌ی r از محور تقارن تغییر می‌کند. این رفتار در نمودار شکل(۲۶-۴)دیده می‌شود.

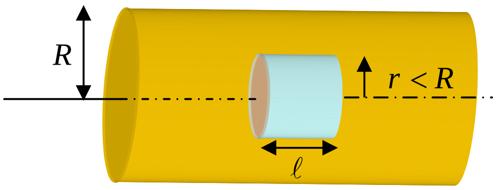


شکل ۲۶-۴ میدان سیم بینهایت دراز

مثال ۸-۴ توزیع بار استوانه‌ای: چگالی بار حجمی در استوانه‌ی بسیار درازی به شعاع R با فاصله از محور استوانه متناسب

است و با $\rho = kr$ (k مقدار ثابتی است.) داده شده است میدان الکتریکی را در درون و بیرون این توزیع بار به‌دست آورید.

حل: توزیع بار تقارن استوانه‌ای دارد. در روی استوانه‌ای به شعاع r میدان شعاعی و اندازه‌اش مقدار ثابتی است. بنابراین، سطح گوس را استوانه‌ای به شعاع r انتخاب می‌کنیم. فضا به دو ناحیه تقسیم شده است: ناحیه‌ی I ($r < R$) و ناحیه‌ی II ($r > R$). میدان الکتریکی دو ناحیه را جداگانه حساب می‌کنیم.



شکل ۲۷-٤ سطح گوس برای ناحیه‌ی $r < R$

ناحیه I: سطح گوس را برابر شکل (۲۷-٤) استوانه‌ای به شعاع $r < R$ و به طول ℓ انتخاب کنید. داریم

$$\oint_S \mathbf{E}_{\mathrm{I}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_\circ} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho\, d\tau \qquad (٤-٥٣)$$

در انتگرال سمت راست V حجمی است که سطح گوس مرزهای آن است. در مختصات استوانه‌ای جزء حجم به صورت $d\tau = r'dr'd\phi dz$ است. بنابراین

$$\oint_{\text{سطح}} \mathbf{E}.d\mathbf{a} = \frac{١}{\varepsilon_\circ}\int \rho d\tau = \frac{١}{\varepsilon_\circ}\int (kr')(r'dr'd\phi dz) = \frac{١}{\varepsilon_\circ}٢\pi lk\int_\circ^r r'^{٢}dr' = \frac{٢}{٣\varepsilon_\circ}\pi k\,\ell r^{٣} \qquad (٤-٥٤)$$

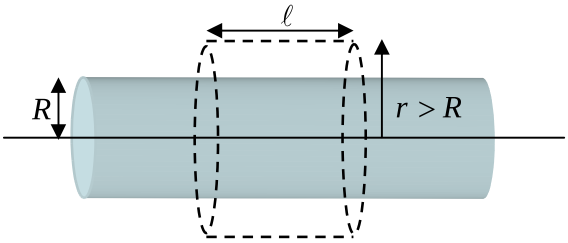
توجه داشته باشید که انتگرال روی $d\varphi$ برابر ٢π و انتگرال روی dz مساوی ℓ است.

تقارن مسئله می‌آموزد که $\mathbf{E}$ باید در راستای شعاع و به سمت بیرون باشد. یعنی شار خالص گذرنده از دو سطح قاعده‌ی سطح گوس صفر است. در نتیجه، فقط شار گذرنده از سطح جانبی را حساب می‌کنیم

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = E\int da = E(٢\pi r\ell) = \frac{١}{\varepsilon_\circ}\frac{٢}{٣}\pi k\,\ell r^{٣} \quad\Rightarrow\quad E = \frac{١}{٣\varepsilon_\circ}kr^{٢}$$

$$\mathbf{E} = \frac{١}{٣\varepsilon_\circ}kr^{٢}\hat{\mathbf{r}} \qquad ; \qquad r < R \qquad (٤-٥٥)$$

ناحیه II: باز هم سطح گوس را استوانه‌ای هم‌محور با توزیع بار و به شعاع $r > R$ و به طول ℓ انتخاب کنید (استوانه‌ی نقطه‌چین شکل۲۸-٤ را ببینید). بار کل در درون این استوانه‌ی نقطه‌چین برابر



شکل ۲۸-٤ سطح گوس برای ناحیه‌ی $r > R$

$$Q = \int \rho d\tau = \int (kr')(r'drd\phi dz) = ٢\pi\ell k\int_\circ^R r'^{٢}dr' = \frac{٢}{٣}\pi\ell kR^{٣} \qquad (٤-٥٦)$$

است. در نتیجه داریم

در نتیجه داریم

$$\oint_{\text{سطح}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{١}{\varepsilon_\circ}q_{\text{enc}} = \frac{١}{\varepsilon_\circ}\frac{٢}{٣}\pi\ell kR^{٣} \qquad (٤-٥٧)$$

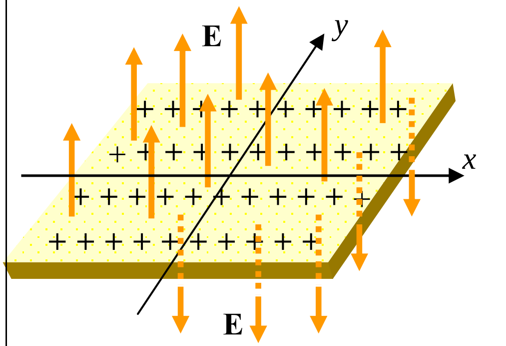
آرایه‌ی بار تقارن استوانه‌ای دارد. پس، میدان الکتریکی در همه‌جای روی سطح گوس، شعاعی است و اندازه‌ی یکسانی دارد:

$$\oint_{\text{سطح}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int|\mathbf{E}|da = \frac{٢}{٣\varepsilon_\circ}\pi k\,\ell R^{٣}\ |\mathbf{E}|(٢\pi r\ell) = \frac{٢}{٣\varepsilon_\circ}\pi k\,\ell R^{٣} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{E} = \frac{k}{٣\varepsilon_\circ}\frac{R^{٣}}{r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (٤-٥٨)$$

• اگر توزیع بار الکتریکی تقارن استوانه‌ای داشته باشد، سطح گوس مناسب همواره استوانه‌ای هم‌محور با توزیع بار است.

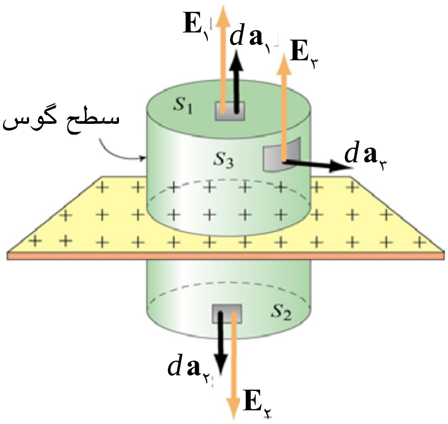
آخرین تقارنی که در به‌کار بردن قانون گوس مهم است، تقارن صفحه‌ای است. در مثال زیر این وضعیت را بررسی می‌کنیم.

مثال ۹-۴ صفحه‌ی باردار بینهایت گسترده: صفحه‌ی بینهایت گسترده‌ای با چگالی بار سطحی یکنواخت σ در صفحه‌ی xy قرار دارد. شکل (۲۹-٤). میدان الکتریکی صفحه را در همه جا به‌دست آورید.



شکل ٤-۲۹ صفحه‌ی باردار بینهایت گسترده

حل: (۱) صفحه‌ی بینهایت گسترده تقارن صفحه‌ای دارد. (۲) چون توزیع بار در روی صفحه یکنواخت است، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ باید بر صفحه عمود و به سوی بیرون از صفحه باشد. بنابراین $\mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{k}}$ است. در روی صفحه‌های موازی با صفحه‌ی باردار، اندازه‌ی میدان مقدارثابتی است. سطح گوس را همانند شکل (٤-۳۰) "استوانه یا" قوطی کبریتی" در نظر بگیرید که نیمی از آن در بالای صفحه‌ی باردار و نیم دیگرش در زیر آن قرار گیرد. این سطح گوس از سه سطح تشکیل شده است: سطوح قاعده‌های $S_۱$، $S_۲$ و سطح جانبی $S_۳$. (می توانستیم سطح گوس را یک قوطی کبریت، یک مکعب مستطیل، فرض کنیم. در این صورت شش سطح خواهیم داشت که دو تای آنها رویه‌های بالایی و پایینی و چهار رویه‌ی دیگر چهار سطح جانبی را تشکیل می‌دهند.) (۳) چون توزیع بار یکنواخت است، بار موجود در درون سطح گوس $q_{\text{enc}} = \sigma A$ است. توجه کنید که $A_۱ = A_۲ = A$ سطح قاعده‌ی بالایی و پایینی استوانه اند. (٤) شار کل گذرنده از سطح گوس برابر است با



شکل ٤-۳۰ سطح گوس برای توزیع بار صفحه‌ی بینهایت گسترده

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1} \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{a}_2 + \int_{S_3} \mathbf{E}_3\cdot d\mathbf{a}_3 \qquad (٤-٥٩)$$

چون میدان $\mathbf{E}$ همواره بر سطح باردار عمود است، پس: $\mathbf{E}_۳\cdot d\mathbf{a}_۳ = ۰$ و در نتیجه رابطه‌ی (٤-٥٩) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_{S_۱} \mathbf{E}_۱\cdot d\mathbf{a}_۱ + \int_{S_۲} \mathbf{E}_۲\cdot d\mathbf{a}_۲ + \int_{S_۳} \mathbf{E}_۳\cdot d\mathbf{a}_۳ \\ &= E_۱A_۱ + E_۲A_۲ + ۰ = (E_۱ + E_۲)A\end{aligned} \qquad (٤-٦٠)$$

چون فاصله‌ی دو سطح قاعده‌ی بالایی و پایینی سطح گوس از صفحه‌ی باردار به یک اندازه اند، بنا به تقارن، اندازه‌ی میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ باید برابر باشند: $E_۱ = E_۲ \equiv E$. بنابراین، شار کل گذرنده از این سطح گوس را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\Phi_E = ۲AE \qquad (٤-٦١)$$

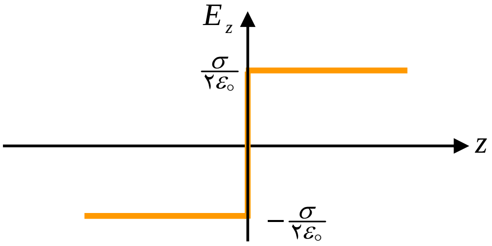
(٥) با استفاده از قانون گوس، $\Phi_E = q_{\text{enc}}/\varepsilon_۰$ ، داریم

$$\Phi_E = ۲AE = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_۰} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_۰} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰} \qquad (٤-٦٢)$$

پس، میدان الکتریکی صفحه‌ی باردار بینهایت گسترده در همه‌ی نقاط فضا یکنواخت است و به فاصله از صفحه‌ی باردار بستگی ندارد. رفتار میدان نسبت به فاصله از صفحه‌ی باردار در شکل (٤-۳۱) نشان داده شده است. این همان رفتاری است که پیش‌تر

در مثال ۱۴-۲ دیدیم و با رابطه‌ی (۱۱۶-۲) و شکل (۳۷-۲) با استفاده از قانون کولمب به دست آوردیم.
شکل برداری میدان به صورت زیر است.

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{k}}\ ; & z>0\\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{k}}\ ; & z<0\end{cases} \qquad (۴-۶۳)$$



شکل ۳۱-۴ نمودار میدان الکتریکی صفحه‌ی باردار بینهایت گسترده برحسب فاصله از صفحه

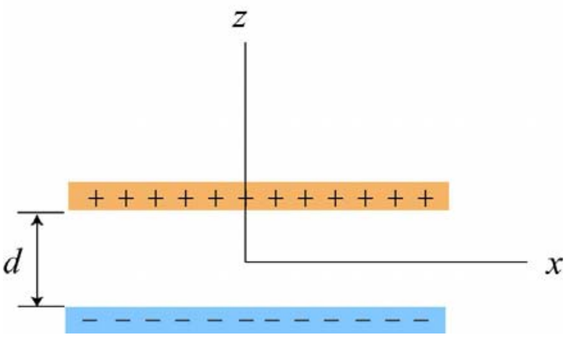
توجه کنید که بازهم در اینجا گسسته بودن میدان را در گذار از سطح باردار می‌بینیم. تفاوت میدان الکتریکی درست در زیر صفحه‌ی باردار و درست در بالای صفحه عبارت است از

$$\Delta E_z=E_{z+}-E_{z-}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}-\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\right)=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \qquad (۴-۶۴)$$

مثال ۱۰-۴ میدان الکتریکی دو صفحه‌ی باردار: دو صفحه‌ی بینهایت گسترده برابر شکل (۳۲-۴) به فاصله‌ی d از یکدیگر در صفحه‌ی xy قرار دارند. چگالی بار سطحی صفحه‌ها $+\sigma$ و $-\sigma$ است. میدان الکتریکی را در همه‌ی نقاط فضا حساب کنید.

حل: میدان یک صفحه‌ی بینهایت گسترده را در مثال ۹-۴ به‌دست آوردیم. چون اندازه‌ی چگالی بار صفحه‌ها یکسان است؛ میدان آنها عبارت اند از:

$$E_+=E_-=\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} \qquad (۴-۶۵)$$



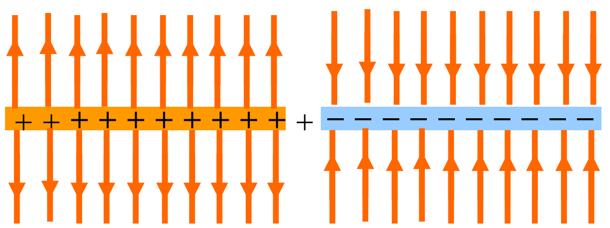
شکل ۳۲-۴ دو صفحه با بارهای ناهم علامت

افزون براین، میدان صفحه‌ی با بار مثبت به سوی بیرون از صفحه و میدان صفحه‌ی با بار منفی به سوی صفحه است. (شکل ۳۳-۴ را ببینید.) پس، میدان‌های الکتریکی آنها عبارتند از

$$\mathbf{E}_+=\begin{cases}+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{k}}\ ; & z>d/2\\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{k}}\ ; & z<d/2\end{cases} \qquad (۴-۶۶)$$

و

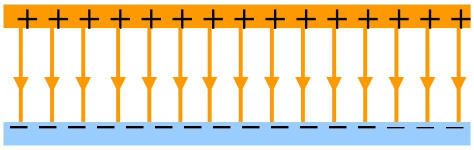
$$\mathbf{E}_-=\begin{cases}-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{k}}\ ; & z>-d/2\\ +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{k}}\ ; & z<-d/2\end{cases} \qquad (۴-۶۷)$$


شکل ۳۳-۴ میدان الکتریکی صفحه‌های با بار مثبت و منفی

با استفاده از اصل برنهش و نتیجه‌ی مثال ۹-۴، اگر آنها را با هم جمع برداری کنیم، میدان دو صفحه به صورت زیر خواهد بود

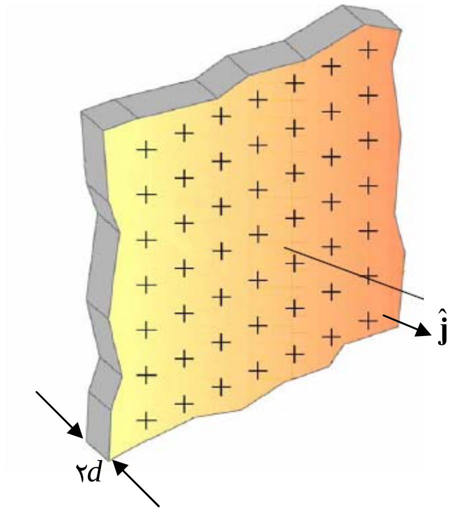
$$\mathbf{E}=\begin{cases}0\hat{\mathbf{k}}, & z>d/2\\ (-\sigma/\varepsilon_\circ)\hat{\mathbf{k}}, & d/2>z>-d/2\\ 0\hat{\mathbf{k}}, & z<-d/2\end{cases} \qquad (۴-۶۸)$$

می‌بینیم که میدان در بیرون فضای بین صفحه‌ها (یعنی در ناحیه‌های $z > d/۲$ و $z < -d/۲$) صفر است و در فضای بین آنها اندازه‌ی میدان دو برابر میدان هر صفحه و برابر $E = \sigma/\varepsilon_{\circ}$ است.. در شکل (۳۴-٤) این وضعیت را می‌توان دید



شکل ۳٤-٤ میدان دو صفحه‌ی موازی

مثال ۱۱-۴ میدان بُرش باردار : برابر شکل (۳۵-٤) برشی به ضخامت $۲d$ را در نظر بگیرید که در راستای محورهای x و z تا بینهایت گسترده است و در راستای محور y به $y = -d$ و $y = +d$ محدود است. چگالی بار حجمی این برش یکنواخت و برابر ρ است. میدان الکتریکی را به صورت تابعی از y (فاصله از مرکز) به‌دست آورید.



شکل ۳۵-٤ برش بینهایت گسترده

حل بنابه تقارن (مسئله تقارن صفحه‌ای دارد) در صفحه xz (صفحه‌ای که ضخامت برش را به دو نیم تقسیم می‌کند) میدان صفر است. بنابراین، سطح گوس را استوانه یا قوطی کبریتی مانند شکل (۳٦-٤) در نظر بگیرید که یک قاعده آن در صفحه xz و قاعده‌ی دیگر آن در فاصله‌ی y از مرکزاست. روشن است که از قاعده‌ی سمت چپ شار الکتریکی نمی‌گذرد، چون میدان در آنجا صفر است. بنا به تقارن، شار گذرنده از سطح جانبی هم صفر است. پس، فقط باید شار گذرنده از سطح قاعده‌ی سمت راست را حساب کنیم. فرض کنید مساحت سطح قاعده A است از قانون گوس داریم:

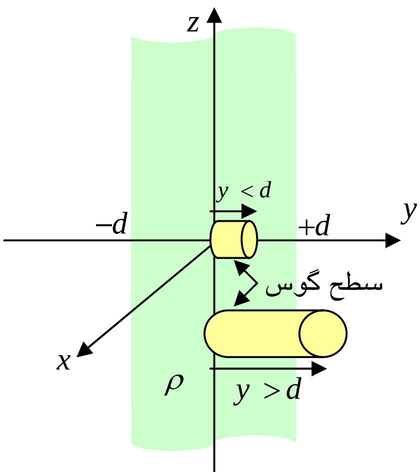
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}} q_{\text{enc}} = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}} A y \rho \quad \Rightarrow EA = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}} A y \rho$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}} y\, \hat{\mathbf{j}} \; ; \qquad |y < d| \qquad (٤-٦٩)$$

در ناحیه‌ی $y > d$ بارموجود در درون سطح گوس برابر $q_{\text{enc}} = \rho A d$ است و در نتیجه میدان در این ناحیه عبارت است از

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}} q_{enc} = \frac{\rho A d}{\varepsilon_{\circ}} \quad \Rightarrow \quad EA = \frac{\rho A d}{\varepsilon_{\circ}}$$

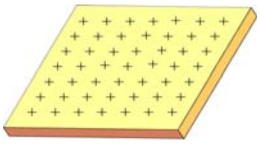
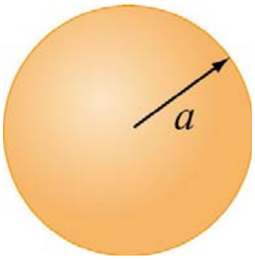
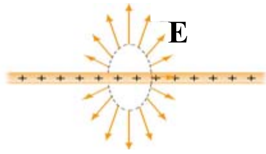
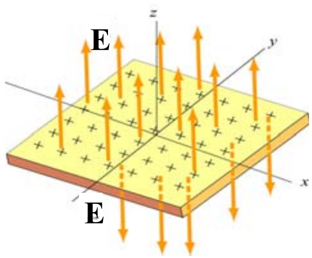
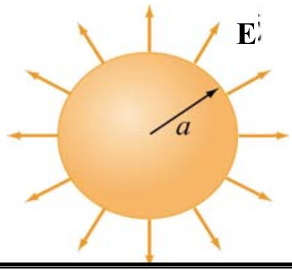
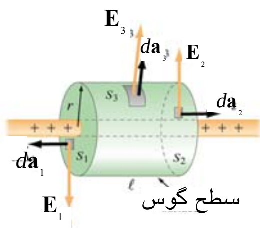
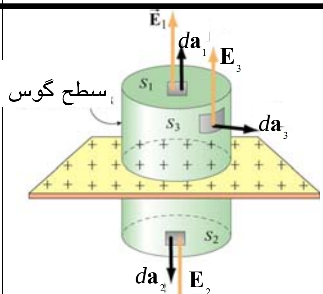
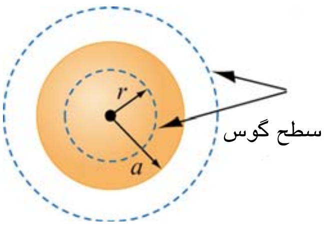
$$\Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}} d\, \hat{\mathbf{j}} \; ; \qquad y > d \qquad (٤-٧٠)$$



شکل٣٦-٤ نمای روبرو ازبرش بینهایت گسترده

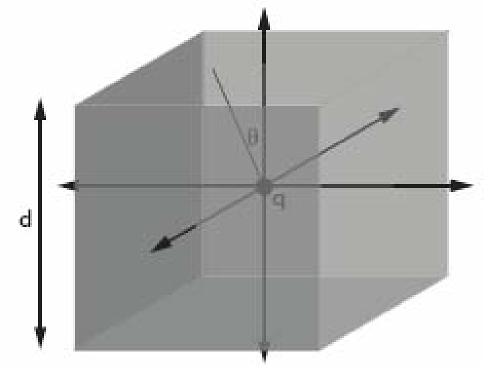
نکته: مثال‌های بالا نشان می‌دهند که وقتی با تقارن‌های استوانه‌ای و صفحه‌ای سروکار داریم، توزیع بار استوانه‌ای و صفحه‌ای باید تا بینهایت ادامه داشته باشند تا این تقارن‌ها برقرار باشند. در عمل البته این شرایط فراهم نیست ولی می‌توان از آنها برای استوانه‌های دراز و صفحه‌های گسترده استفاده کرد و پاسخ تقریبی به‌دست آورد.♣

در این بخش نشان دادیم که چگونه می‌توان از شکل انتگرالی قانون گوس برای یافتن میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار با تقارن‌های معین استفاده کرد. در جدول زیر، این روش برای توزیع بار خطی، سطحی و حجمی جمع آوری شده است.

سامانه	توزیع بارخطی بینهایت	توزیع بار سطحی بینهایت	کره با بار حجمی یکنواخت
شکل			
تقارن	استوانه‌ای	صفحه‌ای	کروی
تعیین جهت E			
ناحیه‌های فضا	$r > 0$	$z < 0$ و $z > 0$	$r \le a$ و $r \ge a$
سطح گوس			
شار	$\Phi_E = E\left(2\pi r \ell\right)$	$\Phi_E = EA + EA = 2EA$	$\Phi_E = E\left(4\pi r^2\right)$
بار q_{enc}	$q_{\text{enc}} = \lambda \ell$	$q_{\text{enc}} = \sigma A$	$q_{\text{enc}} = \begin{cases} Q\left(r/a\right)^3 ; & r \le a \\ Q ; & r > a \end{cases}$
قانون گوس : $\Phi_E = q_{\text{enc}}/\varepsilon_0$	$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	$E = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} ; & r \le a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} ; & r \ge a \end{cases}$

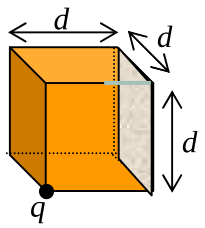
مثال ۱۲-۴ باز هم شار بار نقطه‌ای واقع در مرکز یک مکعب: مثال ۱-٤ را با استفاده از قانون گوس دوباره حل کنید: بار نقطه‌ای q برابر شکل (۳۷-٤) در مرکز مکعبی به ضلع d قرار دارد. شار گذرنده از یک رویه‌ی مکعب را به دست آورید.

حل: استفاده از قانون گوس، برای یافتن شار $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$ گذرنده از هر سطح مکعب ساده ترین شیوه است. با توجه به تقارن مکعب، می‌دانیم که شار گذرنده از هر یک از رویه‌ها باهم برابرند. شار کل گذرنده از سطح بسته‌ی مکعب $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$ برابر $q/\varepsilon_{\circ}$ است. بنابراین، شار گذرنده از یک رویه‌ی، یک ششم سار کل است که برابر $q/6\varepsilon_{\circ}$ است. این همان پاسخ مثال ۱-٤ است



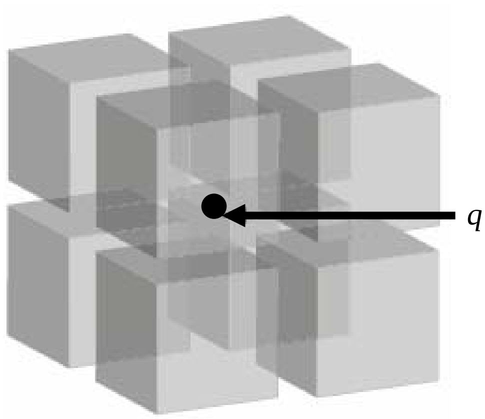
شکل ۳۷-٤ شار گذرنده از یک سطح مکعب ناشی از بار نقطه‌ای در مرکز

مثال ۱۳-۴ باز هم شار بار نقطه‌ای واقع در یک گوشه‌ی مکعب: مثال ۲-٤ را با استفاده از قانون گوس دوباره حل کنید: بار q برابر شکل (۳۷-٤) در یک گوشه‌ی مکعبی به ضلع d قرار دارد. شار گذرنده از رویه‌ی روبروی مکعب را به دست آورید.



شکل ۳۸-٤ بار در گوشه‌ی مکعب

حل: در قانون گوس همواره به یک سطح بسته ، سطح گوس، نیاز داریم که بار در درون آن قرار دارد. قانون گوس چیزی در باره‌ی شکل سطح گوس نمی‌گوید. اما همان طور که دیدیم، اگر مسئله تقارن داشته باشد، میدان در همه‌ی نقاط روی سطح گوس مقدار ثابتی می‌شود. از این نکته برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. برابر شکل (۳۹-٤) اگر ۸ مکعب یکسان را کنار هم قرار دهیم، یک سطح بسته‌ی مکعبی به‌دست می‌آید که بار q در مرکز آن قرار دارد. این سطح بسته از ۲٤ سطح مربع شکل به ضلع d تشکیل شده است. بنا به قانون گوس، شار گذرنده از سطح بسته $q/\varepsilon_{\circ}$ است. بنابراین، شار گذرنده از یک سطح مکعب بزرگ ۱/۲٤ آن است. پس، پاسخ مسئله $q/24\varepsilon_{\circ}$ است؛ همان پاسخی است که در مثال ۲-٤ به دست آوردیم.



شکل ۳۹-٤ بار نقطه‌ای در گوشه‌ی مکعب

** ۳-۳-۴ شکل دیفرانسیلی قانون گوس

با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس (نگاه کنید به پیوست این فصل) می‌توان قانون گوس را به شکل **دیفرانسیلی** نوشت: بنا به قضیه دیورژانس، برای هر میدان برداری خوش‌رفتار $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ که در حجم V تعریف شده باشد، داریم

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}=\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right)d\tau \tag{۴-۷۱}$$

انتگرال سمت چپ رابطه‌ی (۷۱-۴) روی سطح بسته‌ی S گرفته می‌شود. سطح S مرزهای حجم V است. میدان برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ می‌تواند، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ باشد.

حال قانون گوس را برای توزیع بار حجمی در نظر بگیرید. از رابطه‌های (۱۷-۴) و (۲۵-۴) داریم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}q_{\text{enc}}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho\, d\tau \tag{۴-۷۲}$$

اینک، قضیه‌ی دیورژانس، رابطه‌ی (۷۱-۴)، را در انتگرال سمت چپ رابطه‌ی (۷۲-۴) به‌کار ببرید. به‌دست می‌آید

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}\right)d\tau=\frac{1}{\varepsilon_\circ}q_{\text{enc}}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho\, d\tau \quad\Rightarrow\quad \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}\right)d\tau=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho\, d\tau \tag{۴-۷۳}$$

در رابطه‌ی بالا، ما جزء حجم خاصی را برنگزیدیم و بنابراین، رابطه‌ی (۷۳-۴) برای هر جزء حجمی برقرار است، در نتیجه می‌توان نوشت

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\rho \tag{۴-۷۴}$$

رابطه‌ی (۷۴-۴) شکل دیفرانسیلی قانون گوس است. در مسئله‌هایی که میدان الکتریکی داده شده باشد و بخواهیم توزیع بار الکتریکی به وجود آورنده‌ی میدان را به‌دست آوریم ، شکل دیفرانسیلی قانون گوس سودمند می‌شود. با وجود این، در بیشتر مسئله‌های الکتروستاتیک، توزیع بار الکتریکی معلوم است و هدف یافتن میدان الکتریکی آن است. در این مسئله‌ها کار کردن با شکل دیفرانسیلی قانون گوس آسان نیست. چون میدان الکتریکی یک کمیت برداری است و برای یافتن آن دانستن دیورژانس میدان (آنگونه که در رابطه (۷۴-۴) دیده می‌شود) به تنهایی کافی نیست، بلکه تاو یا کرل میدان هم باید داده شود. بنابراین، رابطه‌ی (۷۴-۴) به تنهایی برای یافتن $\mathbf{E}$ بسنده نیست. در این گونه مسئله‌ها شکل انتگرالی قانون گوس، رابطه‌ی (۱۷-۴)، مناسب و اقتصادی‌تر است؛ چون کار کردن با کمیت‌های عددی، مانند شار میدان الکتریکی، آسان‌تر از کارکردن با کمیت‌های برداری است. افزون بر این، در شکل انتگرالی قانون گوس بارهای نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی به صورت طبیعی‌تری ظاهر می‌شوند.

در مثال‌های زیر با روش استفاده از رابطه‌ی (۷۴-۴) در مسئله‌های الکتروستاتیک آشنا می‌شویم

مثال ۱۴-۴ محاسبه‌ی بار از میدان الکتریکی : میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا در مختصات کروی به‌صورت $\mathbf{E}=kr^{3}\hat{\mathbf{r}}$ داده شده است که در آن k مقدار ثابتی است.

(الف): چگالی بار ρ را به‌دست آورید.

(ب): بار کل موجود در درون کره‌ای به شعاع R و به مرکز مبدا مختصات را با دو شیوه‌ی (۱) با استفاده از قانون گوس و (۲) به طور مستقیم، حساب کنید.

حل: **(الف)** : با توجه به رابطه‌ی (۷۴-۴) و این که میدان الکتریکی فقط مولفه‌ی شعاعی دارد، داریم

$$\rho=\varepsilon_\circ\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\varepsilon_\circ\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{2}kr^{3})=\varepsilon_\circ\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}(kr^{5})=5\varepsilon_\circ kr^{2} \tag{۴-۷۵}$$

(ب) روش (۱): با استفاده از شکل انتگرالی قانون گوس می‌توان نوشت

$$Q=\varepsilon_\circ\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\varepsilon_\circ(kR^{۳})(۴\pi R^{۲})=۴\pi\varepsilon_\circ kR^{۵} \qquad (۴-۷۶)$$

روش (۲): با انتگرال‌گیری مستقیم. با استفاده از رابطه‌ی (۴-۷۵) به‌دست می‌آید:

$$Q=\int\rho d\tau=\int_\circ^R(۵\varepsilon_\circ kr^{۲})(۴\pi r^{۲}dr)=۲۰\pi\varepsilon_\circ k\int_\circ^R r^{۴}dr=۴\pi\varepsilon_\circ kR^{۵} \qquad (۴-۷۷)$$

نکته: از شکل دیفرانسیلی قانون گوس تنها هنگامی می‌توان استفاده کرد که ρ متناهی و تابع پیوسته‌ای از مختصات فضایی باشد. اگر این شرط برقرار نباشد (مانند وضعیتی‌که بار به صورت نقطه‌ای و گسسته است یا وضعیتی که بارهای نقطه‌ای گسسته روی خط یا سطح توزیع شده است) دیورژانس $\mathbf{E}$ به سمت بینهایت میل می‌کند. از نظر فیزیکی این بدان معنی است که شار الکتریکی محدودی از جزء حجم بسیار کوچکی خارج و واگرا می‌شود. پس، اگر توزیع بارهای نقطه را در نظر بگیریم با میل کردن و نزدیک شدن به مکان بار نقطه‌ای خواهیم داشت

$$\rho=\varepsilon_\circ\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\varepsilon_\circ\lim_{\Delta r\to\circ}\frac{1}{\Delta\tau}\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}\to\infty \qquad (۴-۷۸)$$

اما می‌دانیم که شار ناشی از بار نقطه‌ای بینهایت نیست بلکه مقدار آن محدود است. یعنی

$$\lim_{\Delta r\to\circ}\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_\circ}=\frac{q}{\varepsilon_\circ} \qquad (۴-۷۹)$$

شاید بپرسید که چگونه می‌توان برای بار نقطه‌ای توزیع پیوسته نوشت و دیورژانس میدان آن را حساب کرد. پاسخ آن دریک نکته‌ی فنی نهفته است و نیازمند آشنایی با **تابع دلتای دیراک**[◊] است. در اینجا مجال پرداختن به آن نیست. اگر بار نقطه‌ای q در مکان $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ باشد، آنگاه با توجه به تعریف تابع دلتای دیراک می توان چگالی آن را به صورت زیر نوشت

$$\rho(\mathbf{r})=q\,\boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (۴-۸۰)$$

تابع $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ به ازای تمام نقاط $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'$ صفر و برای $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ مقدارش بینهایت است. تابع دلتای دیراک با انتگرال آن تعریف می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\tau=۱ \qquad (۴-۸۱)$$

و از ویژگی‌های خاصی برخوردار است. دو نمونه‌ی مهم از ویژگی‌های تابع دلتای دیراک عبارتند از

$$\int f(\mathbf{r})\boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=f(\mathbf{r}) \qquad (۴-۸۲)$$

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \qquad (۴-۸۳)$$

برای مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای در مکان‌های $\mathbf{r}_i$، چگالی توزیع بار را می‌توان به‌صورت زیر برحسب تابع دلتا نوشت

$$\rho(\mathbf{r}')=\sum_i q_i\boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_i) \qquad (۴-۸۴)$$

از این رابطه می‌توان توزیع خطی مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای گسسته در مکان‌های x_i را به صورت زیر نوشت

$$\lambda(x')=\sum_i q_i\delta(x'-x_i) \qquad (۴-۸۵)$$

و اگر بارهای نقطه‌ای در روی سطح xy توزیع شوند، چگالی آن عبارت است از

[◊] Dirac's Delta Function

$$\sigma(\mathbf{r}') = \sum_i q_i\ \delta(x' - x_i)\,\delta\left(y' - y_i\right) \qquad (۴-۸۶)$$

پس، چگالی بار برای یک بار نقطه‌ای در مکان $\left(x_۱, y_۱\right)$ عبارت است از $\sigma(\mathbf{r}') = q\,\delta(x' - x_۱)\,\delta\left(y' - y_۱\right)$. بنابراین، رابطه‌ی (۴-۷۸) برای یک بار نقطه‌ای جایگزیده در مکان $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right) \qquad (۴-۸۷)$$

♣

مثال ۱۵-۴ انتگرال تابع دلتا: انتگرال $\int_۰^۳ x^۳\,\delta\left(x - ۲\right)dx$ را حساب کنید.

حل: با توجه به رابطه‌ی (۴-۸۲) داریم $\int_۰^۳ x^۳\,\delta\left(x - ۲\right)dx = ۲^۳ = ۸$. اگر حد بالای انتگرال به جای ۳ صفر بود پاسخ انتگرال صفر می‌شد.

از شکل دیفرانسیلی قانون گوس، رابطه‌ی (۴-۷۴) ، دیده می‌شود که در هر ناحیه‌ی فضا که چگالی بار صفر است (یا بار وجود ندارد) دیورژانس میدان الکتریکی هم صفر است.

شکل دیفرانسیلی قانون گوس، رابطه‌ی (۴-۷۴) ، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس و شکل انتگرالی قانون گوس به‌دست آمد. دیورژانس میدان الکتریکی یکی از ویژگی‌های سرشتی میدان الکتریکی را توصیف می‌کند (ویژگی سرشتی دیگر آن با کرل میدان توصیف می‌شود). در فصل ۲ میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع بار را با استفاده از قانون کولمب به‌دست آوردیم و با رابطه‌ی (۲-۸۰) نشان دادیم. پرسش این است که آیا دیورژانس رابطه‌ی (۲-۸۰) هم به نتیجه‌ی (۴-۷۴) می‌انجامد و ویژگی سرشتی میدان الکتریکی را نمایان می‌کند؟ بهترین راه آزمودن آن محاسبه‌ی مستقیم دیورژانس رابطه‌ی (۲-۸۰) است. بگذارید همین کار را انجام دهیم و دوباره شکل دیفرانسیلی قانون گوس را به‌دست آوریم. توجه کنید که بررسی الکتروستاتیک را ما با دو اصل قانون کولمب و اصل برنهی آغاز کردیم. در واقع، هیچ چیز دیگری تاکنون بر این دو اصل نیفزودیم. بنابراین، آزمون پیش‌رو می‌تواند بر اعتبار رویکرد ما به الکتروستاتیک بیفزاید.

اجازه دهید رابطه‌ی (۲-۸۰) را یک بار دیگر و اندکی با جزییات بیش‌تر بنویسیم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_\infty \frac{\hat{\mathcal{r}}}{\mathcal{r}^۲}\,\rho(\mathbf{r}')\,d\tau \qquad (۴-۸۸)$$

که در آن $\mathcal{r} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ است. یادآوری می‌کنم که بردار $\mathbf{r}$ مکانی را نشان می‌دهد که در آنجا می‌خواهیم میدان را حساب کنیم و $\mathbf{r}'$ بردار مکان بارهای چشمه است که میدان را به وجود می‌آورند. در رابطه‌ی (۲-۸۰) انتگرال‌گیری روی حجمی بود که توزیع بار را دربر داشت. در رابطه‌ی (۴-۸۸) این حجم با حجم تمام فضا (∞) جایگزین شده است. این جایگزینی رابطه‌ی (۲-۸۰) را تغییر نمی‌دهد، چون در فضای اضافی، ورای حجمی که بار را احاطه کرده است، $\rho = ۰$ است. هم‌چنین، توجه کنید که وابستگی میدان $\mathbf{E}$ به $\mathbf{r}$ در بردار $\mathcal{r}$ نهفته است. بنابراین ، داریم

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_۰}\int_\infty \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{\mathcal{r}}}{\mathcal{r}^2}\right)\rho(\mathbf{r}')\,d\tau \qquad (۴-۸۹)$$

پس، مسئله به محاسبه‌ی $\vec{\nabla} \cdot \left(\hat{\mathcal{r}}/\mathcal{r}^۲\right)$ کاهش می‌یابد. شناسه‌ی دیورژانس فقط به فاصله‌ی شعاعی $\mathcal{r}$ وابسته است و در نتیجه محاسبه‌ی آن در مختصات کروی ساده‌تر است. داریم

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^{2}}\right)=\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{1}{r^{2}}\right)=\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}(1)=0 \qquad (4\text{-}90)$$

این محاسبه اگرچه ساده بود، اما یک ایراد جدی دارد: چون به r^2 تقسیم شده است، در $r=0$ تکینه است و مقدارش بینهایت می‌شود. به بیان دیگر، دیورژانس $\hat{r}/r^2$ در همه جا صفر است **به جز** در $r=0$ که مقدارش بینهایت است. با وجود این، انتگرال $\hat{r}/r^2$ روی هر حجمی که $r=0$ را دربر دارد، مقدار ثابتی است (نگاه کنید به رابطه‌ی (۸۸-۴)). این درست همان شرایطی است که تابع دلتای دیراک را تعریف می‌کند. در نتیجه، برای این که این رفتار را به حساب بیاوریم، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^{2}}\right)=4\pi\,\boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}) \qquad (4\text{-}91)$$

پس،

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int 4\pi\,\boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}')\,d\tau'=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \qquad (4\text{-}92)$$

که همان رابطه‌ی (۷۴-۴) و شکل دیفرانسیلی قانون گوس است.

مثال ۱۶-۴ باز هم محاسبه‌ی توزیع بار : توزیع بار مربوط به هر یک از میدان‌های الکتریکی زیر را حساب کنید:

(الف): $\mathbf{E}=k\left(2x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}-3z\,\hat{\mathbf{k}}\right)$ (k مقدار ثابتی است)

(ب): $\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{C}{r^{2}}\hat{\mathbf{r}}\ ; & r\le a\\[2mm] \dfrac{Cr}{a^{2}}\hat{\mathbf{r}}\ ; & r\le a\end{cases}$ (C مقدار ثابتی است)

حل: **(الف)**

$$\rho=\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\varepsilon_0 k\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)-\frac{\partial}{\partial z}(3z)\right]=0 \qquad (4\text{-}93)$$

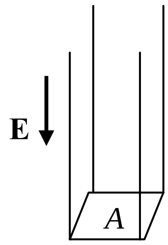
(ب)

$$\rho(\mathbf{r})=\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}=\varepsilon_0\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}E_r\right)$$

$$\Rightarrow\ \rho(\mathbf{r})=\varepsilon_0\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{C}{r^{2}}\right)=\varepsilon_0\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}(C)=0\ ;\quad r>a \qquad (4\text{-}94)$$

$$\rho=\varepsilon_0\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{Cr}{a^{3}}\right)=\varepsilon_0\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Cr^{3}}{a^{3}}\right)=\frac{3C\varepsilon_0}{a^{3}}\ ;\qquad r<a \qquad (4\text{-}95)$$

مثال ۱۷-۴ بار الکتریکی هوای بالای سطح زمین: درروزهایی که هوا عادی است میدان الکتریکی در بالای سطح زمین با رابطه‌ی $\mathbf{E}=-(ae^{-\alpha z}+be^{-\beta z})\,\hat{\mathbf{z}}$ داده می‌شود که در آن b,a,β,α مقادیر ثابت و مثبت اند و z ارتفاع از سطح زمین است. چگالی بار $\rho(z)$ را به‌صورت تابعی از ارتفاع به‌دست آورید. بار کل موجود در یک ستون عمودی با سطح مقطع A از $z=0$ تا $z=\infty$ را حساب کنید. شکل (۴۰-۴) را ببینید.



شکل ٤-٤٠ ستونی از هوا

حل: از شکل دیفرانسیلی قانون گوس داریم $\rho=\varepsilon_\circ\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}$. بنابراین،

$$\rho(z)=\varepsilon_\circ\left(\alpha a e^{-\alpha z}+\beta b e^{-\alpha z}\right) \qquad (٤-٩٦)$$

با استفاده از شکل انتگرالی قانون گوس و با توجه به شکل (٤-٤٠) دیده می‌شود که در روی سطح جانبی $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\circ$ (خط‌های میدان از سطح جانبی نمی‌گذرد، شار میدان در روی سطح‌های جانبی شکل (٤-٤٠) صفر است، چون میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و بردار یکه‌ی سطح در روی آنها برهم عمودند.) در روی سطح بالایی ستون هوا، میدان $\mathbf{E}=\circ$ (چون میدان به طور نمایی با ارتفاع فروافت می‌کند) است. پس،

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=-E(z=\circ)A=(a+b)A=\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_\circ}\quad\Rightarrow\quad q_{\text{enc}}=\varepsilon_\circ(a+b)A \qquad (٤-٩٧)$$

مثال ۱۸-۴ میدان استوانه‌ی باردار: مثال ٨-٤ را با استفاده از شکل دیفرانسیلی قانون گوس حل کنید. (توجه کنید که پیش‌تر گفتیم دیورژانس میدان برداری به تنهایی برای یافتن میدان کافی نیست؛ بلکه کرل میدان را نیز باید بدانیم. اما در این مثال چون میدان الکتریکی همواره در یک جهت است این نگرانی موردی ندارد و ما آن را بدهکار تقارن مسئله هستیم).

حل: دیورژانس در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر است:

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial E_z}{\partial_z} \qquad (٤-٩٨)$$

محور z را در امتداد محور استوانه در نظر بگیرید. با توجه به تقارن مسئله $E_z=E_\phi=\circ$ اند (میدان تنها در راستای شعاعی است) و E_r فقط تابعی از r است؛ در نتیجه مشتق جزیی به مشتق کل تبدیل می‌شود.

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)+\circ+\circ\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r)=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\rho(r) \qquad (٤-٩٩)$$

این معادله دیفرانسیل را می‌توان با انتگرال‌گیری مستقیم حل کرد:

$$\int_{r=\circ}^{r} d\left(rE_r\right)=\int_{r=\circ}^{r}\frac{r'}{\varepsilon_\circ}\rho\left(r'\right)\quad\Rightarrow rE_r-\left[rE_r\right]_{r=\circ}=\int_{r=\circ}^{r}\frac{r'}{\varepsilon_\circ}\rho\left(r'\right)dr'$$

$$\Rightarrow\quad E_r=\frac{\left[rE_r\right]_{r=\circ}}{r}+\frac{١}{\varepsilon_\circ r}\int_\circ^r r'\left(kr'\right)dr' \qquad (٤-١٠٠)$$

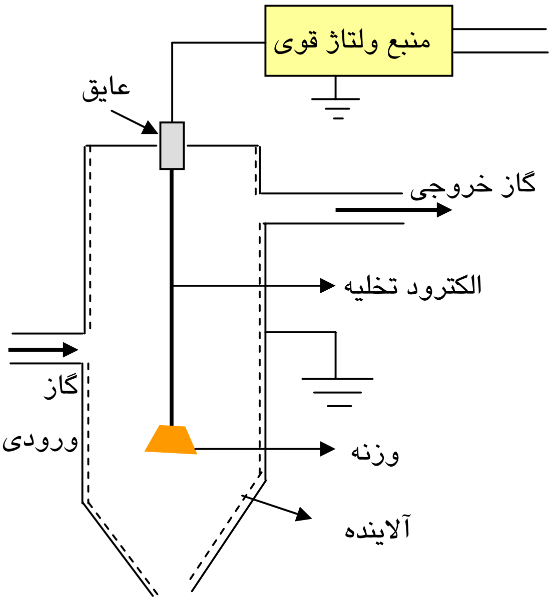
چون چگالی بار الکتریکی در $r=\circ$ صفر است، شرط مرزی $\left[rE_r\right]_{r=\circ}=\circ$ مناسب است، زیرا در این صورت $E_r(r)$ تابعی است که تکینگی ندارد. پس:

$$E_r(r)=\frac{١}{\varepsilon_\circ r}\int_\circ^r kr'^{٢}dr'=\frac{١}{٣\varepsilon_\circ}kr^{٢} \qquad (٤-١٠١)$$

که همان پاسخ رابطه‌ی (٤-٥٥) است و میدان الکتریک را در ناحیه‌ی درون استوانه به‌دست می‌دهد.

۴-۴ یک کاربرد عملی: پالایشگاه الکترواستاتیک

پالایشگاه الکترواستاتیک وسیله‌ای است که می‌توان با استفاده از آن گاز، هوا و برخی شاره‌ها را از آلاینده‌های ریز زدود. این دستگاه، ذرات آلاینده را باردار می‌کند و سپس آنها را توسط میدان الکتریکی از گاز، هوا و یا شاره جدا می‌کند. از این وسیله در کارگاه‌ها برای پالایش هوا و در معیارهای کوچکتر برای پالایش هوای منازل استفاده می‌شود. در شکل (۴۱-۴) یک نمونه از این دستگاه نشان داده شده است. این وسیله از یک استوانه بیرونی متصل به زمین تشکیل شده است و یک سیم با ولتاژ زیاد محور آن را تشکیل میدهد. گاز آلوده از یک انتها وارد می‌شود و ذرات آلاینده در بدنه متصل به زمینِ استوانه ته‌نشین می‌شوند و بالاخره گاز پالایش شده از انتهای دیگر خارج می‌شود. این وسیله به گونه زیر عمل می‌کند: با افزایش ولتاژ هاله‌ای از ذرات در اطراف سیم مرکزی تشکیل می‌شود. در هاله یون‌های مثبت و منفی تولید می‌شوند. یون های با یک علامت به سمت سیم جذب می‌شوند و یون‌های با علامت مخالف به سوی بیرون رانده می‌شوند. یون‌های رانده شده به ذرات آلاینده می‌چسبند و آنها را به سوی استوانه می‌برند. ولتاژ باید به اندازه کافی زیاد باشد تا بتواند هاله را حفظ کند، اما نباید آن قدر زیاد باشد که جرقه ایجاد کند. هاله را می‌توان با اعمال ولتاژ مثبت یا منفی ایجاد کرد. اما هاله‌ای که یون‌های رانده شده‌اش منفی است، کارایی بیشتری دارد و آستانه‌ی جرقه زنی آن بالاتر است. تشکیل هاله‌ی منفی توسط الکترون‌های آزاد در اطراف سیم مرکزی آغاز می‌شود. اعمال میدان الکتریکی قوی در نزدیکی سیم مرکزی این الکترون‌های آزاد را می‌راند و از سیم مرکزی دور می‌کند. الکترون‌ها با مولکول‌های گاز برخورد می‌کنند. برخورد سبب تولید یون‌های مثبت و الکترون‌های آزاد بیشتری می‌شود. یون‌های مثبت جذب سیم می‌شوند. برخورد آنها با سیم، الکترون‌های بیشتری را آزاد می‌کند و با حرکت الکترون‌ها به سمت بیرون، یعنی ناحیه‌ای که میدان الکتریکی ضعیف‌تر است، به مولکول‌های گاز می‌چسبند و یون‌های منفی تشکیل می‌دهند. این یون‌های منفی در ناحیه بیرون هاله انباشته می‌شوند و حرکت آنها به سمت استوانه، جریان هاله‌ای ایجاد می‌کند.



شکل ۴۱-۴ شمای پالایشگاه الکتروستاتیک

برای پالایشگاه الکترواستاتیک استوانه‌ای، میدان الکتریکی را در ناحیه بیرون هاله که تنها یک نوع یون وجود دارد، می‌توان به آسانی حساب کرد. در مثال ۱۸-۴ و در رابطه (۹۹-۴) دیدید که

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r)=\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \qquad (۴-۱۰۲)$$

در اینجا $\rho(r)$ چگالی بارهای حجمی است که یون‌ها به‌وجود آورده‌اند و میدان الکتریکی هم تنها در راستای شعاع است. حرکت یون‌ها در میدان الکتریکی در اثر برخوردهای پی‌درپی شان با مولکول‌های گاز در طول مسیر، کند می‌شود. به‌طور تجربی، سرعت سوق میانگین یون‌ها با شدت میدان متناسب است:

$$v=bE \qquad (۴-۱۰۳)$$

که در آن b ثابت سوق است.

بار موجود در یک پوسته استوانه‌ای به طول ℓ، شعاع r و ضخامت dr برابر $dq=\rho\ell(2\pi r dr)$ است.

دربازه زمانی dt این مقدار بار به‌طور شعاعی از سطح استوانه‌ای به شعاع r می‌گذرند و در واحد طول استوانه جریان الکتریکی i تولید می‌کند (در آینده خواهید دید که جریان الکتریکی با $i \equiv dq/dt$ تعریف می‌شود). پس،

$$i \equiv \frac{1}{\ell}\frac{dq}{dt} = 2\pi r\rho\frac{dr}{dt} = 2\pi r\rho v = 2\pi r\rho bE \qquad (4-104)$$

برای جریان یکنواخت بارها، i مقداری ثابت و مستقل از r است. بنابراین، می‌توان ρ را از رابطه (۱۰۲-٤) حذف کرد. داریم

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE) = \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 b}\left(\frac{1}{rE}\right) \Rightarrow (rE)d(rE) = \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 b}rdr \qquad (4-105)$$

با انتگرال‌گیری از نقطه‌ای که درست در پسِ هاله است $(r = r_1,\ E = E_1)$ تا فاصله r ،خواهیم داشت:

$$E^2 = E_1^2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 + \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 b}\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right) \qquad (4-106)$$

به‌ازای r و i بزرگ، میدان الکتریکی به مقدار ثابتی میل می‌کند و تقریب بسیار خوبی برای مقاصد عملی به‌دست می‌دهد.

$$E = \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 B}\right)^{1/2} \qquad (4-107)$$

۵-۴ قضیه‌ی اِرنشاو[♦]

قضیه ارنشاو نتیجه‌ای سودمندی از قانون گوس است و می‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۱-۴ : در ناحیه‌ای از فضا که چگالی بار صفراست، نمی‌توان یک بار آزمون را فقط با نیروهای الکترواستاتیکی در ترازمندی پایدار نگه داشت.

بیان هم‌ارز این است که بگوییم: با پیکربندی الکتروستاتیکی نمی‌توان برای بار آزمون شرایط ترازمندی پایدار ایجاد کرد. این بدان معنی است که می‌توان یک بار نقطه‌ای را در ترازمندی ناپایدار نگه داشت. برای مثال، یک بار نقطه‌ای را در نظر بگیرید که درست در نیم‌راه بین دو بار الکتریکی برابر ساکن قرار دارد. البته به باری که در این مکان است، نیروی خالص صفر وارد می‌شود و در نتیجه، در حالت ترازمندی است. این ترازمندی ناپایدار است. اندک اختلال در این ترازمندی سبب می‌شود که بار دیگر به مکان ترازمندی اولیه‌اش برنگردد.

قضیه‌ی ارنشاو را به زبان پتانسیل هم بیان خواهیم کرد. در اینجا با استفاده از برهان خلف آن را ثابت خواهیم کرد. یعنی فرض می‌کنیم در نقطه P با شرایط زیر، خلاف قضیه درست است:

(۱) در ناحیه‌ی کوچکی در همسایگی نقطه‌ی P هیچ بار الکتریکی، به‌جز بار آزمون، وجود ندارد.

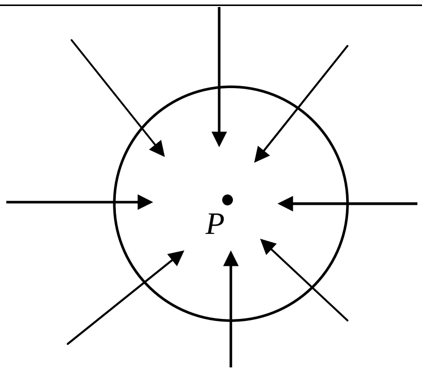
(۲) در نقطه‌ی P میدان الکتریکی $\mathbf{E} = 0$ است؛ چون نقطه‌ی P نقطه‌ی ترازمندی است (در آنجا نیروی الکتریکی خالص صفر است).

۳- فرض کنید در نقطه‌ی P بار آزمون مثبت در ترازمندی پایدار است. در فاصله‌ی اندکی از نقطه‌ی P جهت میدان همانند شکل (٤۱-٤) به سوی نقطه‌ی P است. اگر بار آزمون منفی باشد جهت میدان برون سو است.

اثبات: اگر شکل انتگرالی قانون گوس را برای ناحیه‌ی کوچکی در همسایگی نقطه‌ی P به‌کار ببریم، شرط‌های (۲) و (۳) لازم می‌دارند که در درون سطح گوس بار الکتریکی وجود داشته باشد. اما این نتیجه شرط نخست را نقض می‌کند. بنابراین، قضیه

[♦] Earnshaw's Theorem

اثبات می‌شود. (توجه کنید که ما حالت بدیهی $\mathbf{E}=0$ در همه جا را در نظر نگرفتیم). خطهای میدان در شکل (۴۲-۴) خطوط میدان بار نقطه‌ای در P است. اما در نقطه‌ی P باری وجود ندارد (توجه داشته باشید که بار آزمون اختلالی در میدان حاصل از بارهای دیگر ایجاد نمی‌کند بنابراین، تا جائی‌که به این قضیه مربوط می‌شود میدان $\mathbf{E}$ را بار آزمون در نقطه‌ی P ایجاد نکرده است.) و در نتیجه، خطهای میدان این آرایه نمی‌توانند وجود داشته باشند. میدان الکتریکی باید در بعضی جهت‌ها به‌سوی P و در جهت‌های دیگر بدور از P باشد.



شکل ۴۲-۴ شرط ترازمندی پایدار بار مثبت

قضیه‌ی ارنشاو را به زبان پتانسیل هم می‌توان بیان کرد. در فصل ۳ دیدیم که پتانسیل V به‌صورت $V=-\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ تعریف می‌شود. چون با دورشدن از نقطه‌ی P پتانسیل V افزایش یا کاهش پیدا می‌کند (بسته به این که در چه سویی از نقطه‌ی P دور شویم) ، می‌توان نتیجه گرفت که:

در ناحیه‌ای از فضا که تهی از بار الکتریکی است، پتانسیل بیشینه یا کمینه ندارد.

که بیان قصیه‌ی ارنشاو به زبان پتانسیل است.

مثال ۱۹-۴ ترازمندی پایدار بار: بار مثبت Q در فاصله d از بالای یک صفحه‌ی تخت بینهایت گسترده با چگالی بار سطحی یکنواخت و مثبت σ قرار دارد.

(الف): رابطه‌ای برداری برحسب مختصات (x,y,z) برای میدان الکتریکی این آرایه بیابید. (مکان بار Q را در $x=y=0$ و $z=d$ برگزینید.).

(ب): مختصات (x,y,z) نقطه‌ای را پیدا کنید که در آن نقطه یک بار آزمون در ترازمندی است. آیا ترازمندی در این نقطه پایدار است یا ناپایدار؟

حل (الف): میدان الکتریکی را صفحه‌ی باردار و بار Q به وجود می‌آورند. بنابراین، میدان الکتریکی جمع برداری میدان‌های صفحه، $\mathbf{E}_0=(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{z}}$ و میدان بار Q است. پس داریم

$$\mathbf{E}_0=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\mathbf{z}}{z} \qquad (4-108)$$

$$\mathbf{E}_Q=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^3}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\hat{\mathbf{x}}+y\,\hat{\mathbf{y}}+(z-d)\hat{\mathbf{z}}}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{3/2}} \qquad (4-109)$$

بنابراین، نیروی وارد به بار آزمون عبارت است از

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_Q=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\hat{\mathbf{x}}+y\,\hat{\mathbf{y}}}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{3/2}}+\left\{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(z-d)}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{3/2}}\right\}\hat{\mathbf{z}} \qquad (4-110)$$

(ب): در حالت ترازمندی $\mathbf{E}=0$ است. در نتیجه، باید داشته باشیم:

$$E_x = \circ \ \Rightarrow \ x = \circ \quad ; \quad E_y = \circ \ \Rightarrow \ y = \circ$$

$$E_z = \circ \ \Rightarrow \ \frac{Q}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ}\frac{\text{١}}{(d-z)^{\text{٢}}} = \frac{\sigma}{\text{٢}\varepsilon_\circ} \ \Rightarrow\Rightarrow \ z = d - \sqrt{\frac{Q}{\text{٢}\pi\sigma}} \quad ; \quad d^{\text{٢}} > \frac{Q}{\text{٢}\pi\sigma} \qquad (\text{٤-١١١})$$

بنابه قضیه‌ی ارنشاو، ترازمندی بار در این نقطه ناپایدار است. به‌ازای $d^{\text{٢}} < Q/\text{٢}\pi\sigma$ نقطه‌ی ترازمندی وجود ندارد.

۴-۶ رساناها

۴-۶-۱ تعریف

مواد پیرامون ما از اتم‌ها و مولکول‌ها ساخته شده اند. مواد را می‌توان برحسب ویژگی‌هایشان دسته‌بندی کرد. جسم سخت بر این اساس تعریف می‌شود که فاصله‌ی دو نقطه‌ی آن همواره مقدار ثابتی است. در مقابل، شاره این ویژگی را ندارد و فاصله‌ی بین مولکول‌های آن (بین دو نقطه‌ی محیط شاره) ثابت نیست. می‌توان اجسام را بر اساس رسانندگی گرمایی‌شان دسته‌بندی کرد. در این درس می‌خواهیم مواد را بر پایه‌ی ساختار اتمی و مولکولی آنها و واکنش‌شان در برابر میدان الکتریکی دسته‌بندی کنیم.

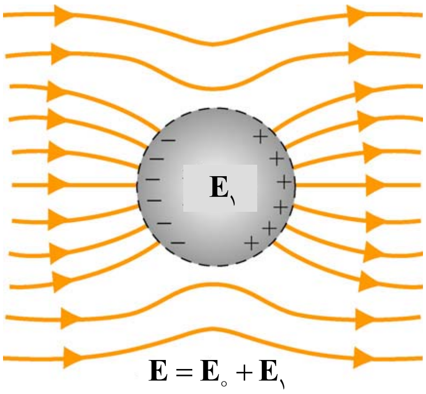
در موادی مانند شیشه یا کاغذ، الکترون‌ها به اتم‌ها وابسته اند. پیوند میان اتم و الکترون‌های به‌گونه‌ای است که الکترون نمی‌تواند آزادانه حرکت کند. حداکثر حرکتی که الکترون‌ها، بدون جدا شدن از اتم خود،می‌توانند داشته باشند، نوسان‌های جزیی حول اتم است. این‌گونه مواد را مواد **نارسانا** یا عایق می‌نامند. در مقابل، گروه دیگری از مواد وجود دارد که ساختار اتمی و مولکولی‌شان اجازه می‌دهد تا به ازای هر اتم یا مولکول یک یا دو الکترون از آن جدا و آزادانه در گوشت ماده حرکت کنند. این الکترون‌ها به اتم و مولکول خاصی وابسته نیستند (در رساناهای مایع مانند آب نمک، **یون‌ها** آزادند تا حرکت کنند). این دسته از مواد را **رسانا** می‌نامند. اگر این محیط‌های رسانا تحت تاثیر میدان الکتریکی بیرونی قرار گیرند در آنها جریان بار الکتریکی به وجود می‌آید. رسانای آرمانی محیطی است که بینهایت الکترون کاملاً آزاد دارد. اگرچه در واقعیت رسانای آرمانی وجود ندارد ولی بعضی مواد به رسانای آرمانی بسیار نزدیک اند. با این تعریف رسانا، می‌توانیم ویژگی‌های رسانای آرمانی را بررسی کنیم. رساناها ویژگی‌های الکتریکی خاصی دارند که در زیر آنها را برخواهیم شمرد. تعریف بالا از رسانا هنگامی که با این ویژگی‌ها همراه شود تعریف درستی خواهد بود.

۴-۶-۲ ویژگی‌های الکتریکی رسانا

۱: میدان الکتریکی در درون رسانا صفر است.

منظور ما از **درون رسانا** "گوشت" رساناست و نه فضایی که توسط یک رسانا احاطه شده است. فضایی که در درون یک سطح کروی فلزی احاطه شده است "درون رسانا" **نیست** و لزومی ندارد که میدان در آنجا صفر باشد ولی حتماً میدان در درون یک گوی فلزی توپر صفر است. چرا؟ اگر کره‌ی رسانای توپری را در میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{E}_\circ$ قراردهید (لازم نیست که رسانا شکل کروی داشته باشد، هر قطعه‌ی رسانا، با هر شکل، همان رفتار را از خود نشان می‌دهد. گزینه‌ی کره در اینجا برای نشان دادن برخی نکات آشناست.) میدان الکتریکی $\mathbf{E}_\circ$ به بارهای الکتریکی آزاد رسانا نیرو وارد خواهد شد. این نیرو بارهای آزاد مثبت را در راستای میدان وادار به حرکت خواهد کرد و آنها را به سمت راست و بارهای منفی را به سمت چپ خواهد راند. (در عمل تنها بارهای منفی ـ الکترون‌ها ـ جابه‌جا می‌شوند ولی با نبود بار منفی در سمت راست، بار خالص در

آنجا جا مثبت می‌شود. به عبارت دیگر نبود بار منفی در سمت راست معادل وجود بار مثبت در آن سمت است.) هنگامی‌که این بارها به لبه‌های رسانا می‌رسند، در آنجا انباشته می‌شوند: بارهای مثبت در لبه‌ی سمت راست و بارهای منفی در لبه‌ی سمت چپ قرار می‌گیرند. این بارهای **القایی** * یا **بارهای پیوندی** † میدان خودشان، $\mathbf{E}_1$، را در خلاف جهت میدان خارجی $\mathbf{E}_0$ به‌وجود می‌آورند (شکل ۴۳-۴ را ببینید). با انباشته شدن بارها در دو سو، میدان $\mathbf{E}_1$ قوی‌تر می‌شود تا این که با $\mathbf{E}_0$ برابر شود. یعنی میدان بارهای القایی می‌کوشد تا میدان اولیه‌ی $\mathbf{E}_0$ را حذف کند. انباشت بارها در دو طرف رسانا ادامه می‌یابد تا این که حذف شدن میدان‌ها کامل و میدان الکتریکی برآیند در درون رسانا دقیقاً صفر شود. این فرآیند خیلی سریع است. پس، در حضور میدان خارجی $\mathbf{E}_0$ بارهای مثبت و منفی آزاد رسانا ،آرایش خود را چنان تغییر می‌دهند که از نفوذ میدان الکتریکی به درون رسانا جلوگیری کنند. در ترازمندی الکتروستاتیکی، میدان الکتریکی در گوشت رسانا، $\mathbf{E}_{in} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 = 0$، باید صفر شود. در بیرون رسانا میدان الکتریکی $\mathbf{E}_1$ ناشی از بارهای القایی مانند میدان یک دوقطبی الکتریکی است و میدان کل در بیرون از "گوشت" رسانا برابر $\mathbf{E}_{Out} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$ است که صفر نیست.



$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$

شکل ۴۳-۴ کوی رسانا در میدان الکتریکی خارجی

۲: **چگالی بار الکتریکی خالص در درون رسانا صفر است** .

این گزاره نتیجه‌ی مستقیم قانون گوس است. چون $\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ است، اگر در درون رسانا $\mathbf{E} = 0$ باشد آنگاه $\rho = 0$ است. توجه داشته باشید که این ویژگی بدان معنی نیست که در درون رسانا بار وجود ندارد، بلکه به این معنی است که در هر نقطه‌ی درون رسانا مقدار بارهای مثبت و منفی دقیقاً با هم برابرند و در نتیجه چگالی بار **خالص** در درون رسانا صفر است.

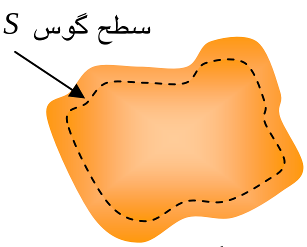
۳ : **بارهای اضافی در سطح رسانا پخش می‌شوند**.

پیش از این که به دلیل این گزاره بپردازیم بهتر است منظور خود را از "بار اضافی" توضیح دهیم. یک رسانا مانند هر ماده‌ی معمولی از نظر بار الکتریکی بی‌بار است، چون اتم از نظر باری خنثی است. اما می‌توان آن را به روش‌های گوناگون باردار کرد: می‌توان بار الکتریکی به آن افزود یا اتمهای آن را یونیده کرد. چون چگالی بار الکتریکی خالص باید در گوشت رسانا صفر باشد، پس از آنکه در گوشت رسانا این وضعیت به وجود آمد، آنگاه هر بار اضافی باقی‌مانده (که ممکن است مثبت یا منفی باشد) در سطح رسانا پخش می‌شود.

یک دلیل ساده این است که چون بارها در حجم (یا گوشت) رسانا نمی‌تواند باقی بماند، جایی جز سطح آن وجود ندارد. اما این دلیل چندان خوبی نیست، می‌توان دلیل بهتری را بیان کرد. فرض کنید در درون رسانا بار خالص اضافی وجود دارد. در درون رسانا سطح گوسی برابر شکل (۴۴-۴) را در نظر بگیرید. بنا به قانون گوس

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad (۴-۱۱۲)$$

چون سمت راست این رابطه صفر نیست $(q_{enc} \neq 0)$ بنابراین، میدان هم در



شکل ۴۴-۴ سطح گوس در درون رسانا

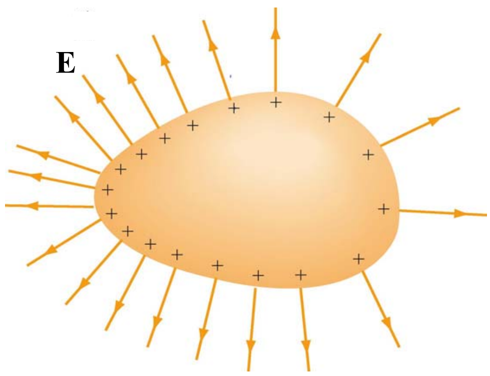
---

* induced charges

† bound charges

درون رسانا صفر نخواهد بود واین با ویژگی نخست رسانا ناسازگار است. در نتیجه بارهای اضافی به ناگزیر باید در سطح رسانا توزیع شوند. دلیل دیگر از پیکربندی انرژی به‌دست می‌آید. هر سامانه‌ی آزاد دینامیکی وقتی پایدار است که انرژی‌اش در کمینه‌ی ممکن باشد. توزیع بار در سطح رسانا این حالت را فراهم می‌کند. آنچه را که ویژگی ۳ بیان می‌کند این است که انرژی الکتروستاتیکی جسمی با بار کل Q و با شکل خاصی وقتی کمینه است که بارها به طور یکنواخت در روی سطح آن توزیع شوند. پس از آنکه محاسبه‌ی انرژی آرایه‌ی باری را آموختیم، در فصل ۵ نشان خواهیم داد که در کره‌ای به شعاع r و بار کل Q اگر تمامی بار در سطح آن توزیع شود انرژی کمتر از وقتی است که همان بار درحجم کره توزیع شود.

۴ در تمام نقاط روی سطح رسانا میدان الکتریکی E بر سطح رسانا عمود است. به بیان دیگر مولفه‌ی مماسی میدان در سطح رسانا صفر است



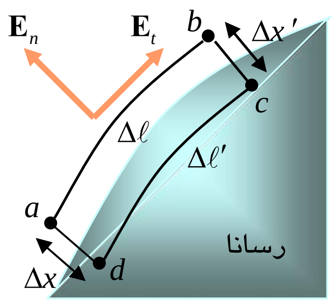
شکل ٤٥-٤ میدان الکتریکی بر سطح رسانا عمود است

این وضعیت در شکل (٤٥-٤) نشان داده شده است. اگر میدان در آغاز مولفه‌ی مماس بر رسانا داشته باشد، این مولفه سبب می‌شود که بارهای الکتریکی رسانا آرایش خود را تغییر دهند تا مولفه‌ی مماسی را در روی سطح رسانا حذف کنند. با این کار از نفوذ میدان به درون رسانا جلوگیری می‌کنند تا در درون رسانا میدان صفر باقی بماند. اگر میدان بر سطح رسانا عمود باشد، بارها نمی‌توانند شارش داشته باشند؛ چون به جسم رسانا محدود اند.

اینک بگذارید نشان دهیم که مولفه‌ی مماسی میدان در سطح رسانا صفر است. دیدیم که میدان الکتریکی در گوشت رسانای منزوی صفر است و بنا به قانون گوس، بارهای اضافی (مانند بارهایی که به آن تزریق شده باشند) در سطح رسانا توزیع می‌شوند. انتگرال خط $\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ را در روی خم بسته‌ی شکل (٤٦-٤) در نظر بگیرید. چون میدان الکتریکی یک میدان پایستار است، انتگرال خط آن روی خم بسته‌ی $abcda$ صفر است:

$$\oint_{abcda} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E_t\left(\Delta\ell\right) - E_n\left(\Delta x'\right) + 0\left(\Delta\ell'\right) + E_n\left(\Delta x\right) = 0 \qquad (٤-١١٣)$$

E_n مولفه‌ی عمودی و E_t مولفه‌ی مماسی میدان اند و قسمت ab را موازی با E_t برگزیدیم. ضریب $\Delta\ell'$ در رابطه‌ی بالا به این دلیل صفر است که پاره مسیر cd در درون رساناست و در آنجا میدان صفر است.

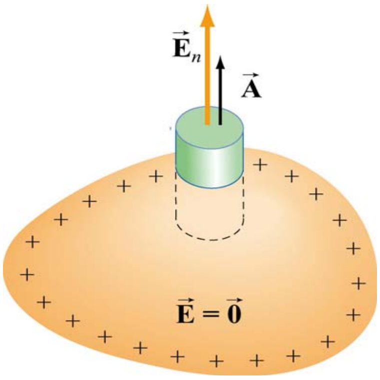


شکل ٤٦-٤ مولفه‌های مماسی و عمودی میدان در بیرون رسانا

در حالت حدی $\Delta x \to 0$ و $\Delta x' \to 0$ (یعنی در سطح رسانا) جمله‌های دوم و چهارم صفر می‌شوند: $E_n\left(\Delta x\right) = E_n\left(\Delta x'\right) = 0$. چون $\Delta\ell$ طولی محدود و غیر صفر است ، نتیجه می‌گیریم که مولفه‌ی مماسی میدان، E_t، باید در سطح رسانا صفر باشد. این نتیجه بدان معنی است که سطح رسانایی که در ترازمندی الکتروستاتیک است، یک سطح **هم‌پتانسیل** است. برای اثبات این ادعا، دو نقطه‌ی A و B را در روی سطح یک رسانا در نظر بگیرید. چون مولفه‌ی مماسی در سطح رسانا صفر است، $E_t = 0$، اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه هم صفر است. یعنی داریم

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \circ \qquad (٤-١١٤)$$

(چون $\mathbf{E}$ بر $d\mathbf{s}$ عمود است.) و بنابراین، $V_A = V_B$ و دو نقطه در پتانسیل یکسان قرار دارند.



شکل ٤-٤٧ سطح گوس برای محاسبه‌ی میدان درست در بیرون سطح رسانا

تاکنون نشان دادیم که میدان در گوشت رسانا صفر است و مقدار آن در بیرون رسانا به شکل جسم رسانا و بارهای روی آن بستگی دارد. میدان الکتریکی درست در روی رسانا چگونه است؟ از شکل انتگرالی قانون گوس می‌توان استفاده و میدان الکتریکی را درست در بیرون رسانا حساب کرد: سطح گوس استوانه‌ای را در شکل (٤-٤٧) در نظر بگیرید. بخشی از این سطح گوس در درون رسانا قرار دارد. در آنجا میدان صفر است. شار گذرنده از این سطح گوس را حساب کنید. داریم

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = E_n A + (\circ)\cdot A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_\circ} \quad \Rightarrow \quad E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \qquad (٤-١١٥)$$

این نتیجه به شکل جسم رسانا بستگی ندارد.

همانند مثال‌های صفحه‌ی بینهایت گسترده و پوسته‌ی کروی، دیده می‌شود که در اینجا هم **مولفه‌ی عمودی** میدان در روی سطح رسانا گسسته است؛ یعنی اندازه‌ی میدان الکتریکی درست در زیر سطح صفر و درست در بیرون آن $\sigma/\varepsilon_\circ$ است:

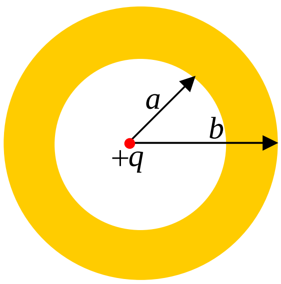
$$\Delta E_n = E_n^{(+)} - E_n^{(-)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} - \circ = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \qquad (٤-١١٦)$$

اما مولفه‌ی افقی میدان از این گسستگی رنج نمی‌برد. مولفه‌ی افقی میدان درست در زیر و درست در بالای سطح رسانا صفر است.

اینها ویژگی‌های رسانا بودند. تمامی ابزار محاسباتی میدان الکتریکی (قانون کولمب، قانون گوس) را که تاکنون آموخته‌ایم، با در نظر گرفتن این ویژگی‌ها، در محیطهای رسانا هم صادق اند.

۳-۶-۴ بارهای القایی

یک پوسته‌ی کروی کلفت رسانا به شعاع درونی a و شعاع بیرونی b را در نظر بگیرید. پوسته از نظر بار الکتریکی خنثی است.

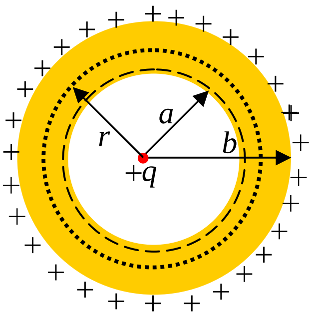


شکل ٤-٤٨ پوسته‌ی رسانا و بار $+q$ در مرکز آن

بار نقطه‌ای $+q$ را در مرکز پوسته‌ی کروی (کاواک) قرار دهید (شکل ٤-٤٨). بار $+q$ در درون کاواک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند و در نتیجه، پوسته‌ی رسانا در این میدان الکتریکی قرار دارد. میدان الکتریکی سبب می‌شود که بخشی از بارهای منفی موجود در گوشت رسانا به سمت سطح درونی پوسته حرکت و در روی آن انباشته شوند تا از نفوذ میدان به درون رسانا جلوگیری شود (البته انباشت بار در روی سطح درونی تا هنگامی ادامه می‌یابد که میدان در رسانا صفر شود). بنابراین، در گوشت رسانا مقداری بار مثبت خالص پدید می‌آید (بارهای اضافی). چون در گوشت رسانا $\rho = \circ$ است، بارهای مثبت خالص هم مجبورند روی سطح بیرونی پوسته انباشته شوند. بارهایی که به این ترتیب در سطح درونی و بیرونی رسانا جمع می‌شوند ، **بارهای القایی** نامیده می‌شوند در شکل (٤-٤٩) بارهای القایی نشان داده

شده اند. **پرسش**: در روی هر یک از سطح‌های درونی وبیرونی پوسته‌ی رسانای کروی چه مقدار بار القایی وجود دارد؟

اگر یک سطح گوس کروی به شعاع $a<r<b$ را در نظر بگیریم، می‌بینیم که بارهای موجود در درون آن عبارت از بار $+q$ که در مرکز است و بارهای القایی q' که در سطح درونی رسانا انباشته شده اند.



شکل ۴-۴۹ پوسته‌ی رسانا و بار $+q$ در مرکز آن

با توجه به قانون گوس می‌توان نوشت

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_\circ} q_{\text{enc}} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}(q+q') \qquad (۴-۱۱۷)$$

که در آن q' بار کل القایی در سطح درونی پوسته است. چون میدان در گوشت رسانا صفر است، انتگرال سمت چپ رابطه‌ی بالا هم برابر صفر است و در نتیجه

$$\circ = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_\circ} q_{\text{enc}} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}(q+q') \quad \Rightarrow \quad q' = -q \qquad (۴-۱۱۸)$$

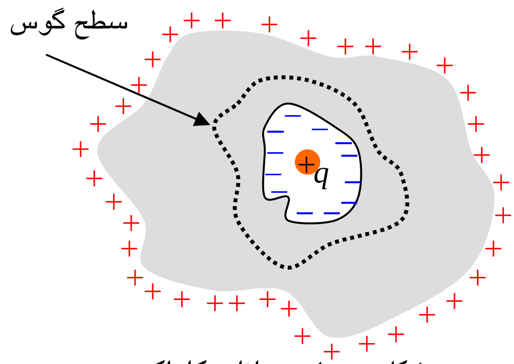
و چگالی بارهای القایی در روی سطح درونی (کره‌ای به شعاع a) پوسته برابر است با

$$\sigma_a = -\frac{q}{۴\pi a^۲} \qquad (۴-۱۱۹)$$

این مقدار باری است که در پوسته جابه‌جا و در سطح درونی آن توزیع شده است تا از نفوذ میدان الکتریکی بار $+q$ به گوشت رسانا جلوگیری کند. این فرایند سبب می‌شود که به همین اندازه بار مثبت در پوسته پدید بیاید. این بارهای اضافی در سطح بیرونی پوسته توزیع می‌شوند. پس، چگالی بارهای القایی در سطح بیرونی پوسته‌ی رسانا عبارت است از

$$\sigma_b = +\frac{q}{۴\pi a^۲} \qquad (۴-۱۲۰)$$

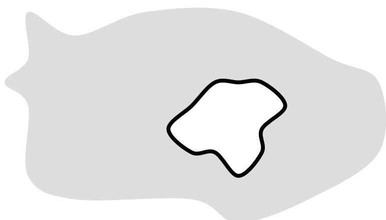
مثال ۲۰-۴ رسانای باردار و کاواک: رسانایی همانند شکل (۴-۵۰) دارای بار خالص $+Q$ است. در این رسانا کاواکی وجود دارد و در درون کاواک بار q قرار دارد. چه مقدار بار در سطح بیرونی رسانا وجود دارد؟



شکل ۴-۵۰ رسانا و کاواک

حل: میدان الکتریکی در گوشت رسانا باید صفر باشد. بنابراین، بار کل درون سطح گوس در شکل (۴-۵۰) هم باید صفر شود. این بدان معنی است که بار $-q$ در دیواره های کاواک القاء شده است. چون بار رسانا برابر Q است، پس بار کل در روی سطح بیرونی رسانا $Q+q$ است.

یکی از ویژگی‌های شگفت انگیز رساناها این است که اگر در درون رسانا کاواک **خالی** وجود داشته باشد، (مانند شکل (۴-۵۱)) میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ هم در درون کاواک صفر است. این واقعیت مستقل از این است که شکل کاواک و رسانا چگونه اند و رسانا چگونه باردار شده است. این ویژگی را می‌توان با استفاده از قضیه ارنشاو نشان داد. کافی است قضیه را در مورد کاواک به کار ببریم.



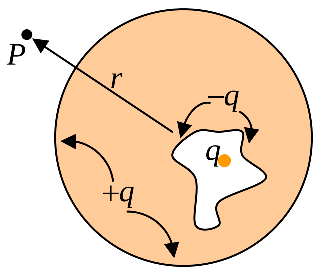
شکل ۴-۵۱ رسانایی با کاواک تهی

چون کاواک تهی است ؛ قضیه‌ی ارنشاو می‌گوید در این ناحیه پتانسیل نمی‌تواند

بیشینه یا کمینه داشته باشد. دیواره‌های کاواک سطح هم‌پتانسل اند، چون در گوشت رسانا $\mathbf{E}=0$ است. بنابراین، اگر پتانسیل در فضای کاواک متفاوت از مقدار آن در دیواره‌ها باشد، باید در نقطه‌ای به بیشینه یا کمینه‌ی خود برسد. اما این وضعیت با قضیه‌ی ارنشاو در تناقض قرار می‌گیرد. پس، پتانسیل باید در همه جای کاواک مقدار ثابتی باشد. بنابراین، میدان در درون کاواک خالی $\mathbf{E}=-\overrightarrow{\nabla V}=0$ است. بدیهی است که در روی دیواره‌های کاواک هم توزیع بار سطحی نمی‌تواند وجود داشته باشد. اگر رسانا باردار باشد، این بارها باید در روی سطح بیرونی رسانا توزیع شوند تا میدان الکتریکی در همه جای آن، از جمله در درون کاواک، صفر شود. توجه کنید که این وضعیت فقط برای کاواک خالی از بار الکتریکی درست است. در مثال‌های ۴-۱۹ و ۴-۲۰ این وضعیت وجود نداشت و در سطح درونی رسانا هم بار القایی وجود داشت. بگذارید این نکته را اندکی بیشتر توضیح بدهم. فرض کنید در درون کاواک شکل (۴-۵۱) رسانای باردار A را قرار داده باشیم؛ در این صورت میدان الکتریکی در درون کاواک دیگر صفر نیست و همان‌گونه که در آغاز این بخش دیدیم در روی دیواره‌های کاواک (سطح درونی رسانای اصلی) مقداری بار سطحی القاء می‌شود، همان‌طور که روی سطح بیرونی رسانای اصلی بار سطحی القاء می‌شود. میدان درون کاواک را می‌توان ترکیب دو میدان دانست: (۱) $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ که تمام بارهای خارج از کاواک، از جمله بارهای القایی روی سطح بیرونی رسانای اصلی و سایر بارها که ممکن است در خارج رسانا وجود داشته باشند، به وجود می‌آورند. (۲) $\mathbf{E}_{\text{int}}$ که بارهای موجود در روی رسانای A واقع در داخل کاواک و بارهای القایی روی سطح کاوک ایجاد می‌کنند. اما، چون همواره $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ صفر است (زیرا این میدان نمی‌تواند از گوشت رسانا گذشته و به کاواک برسد) پس مشاهده می‌کنیم که میدان در درون کاوک دقیقاً همانند میدان حاصل از بارهای موجود در روی رسانای A است. یعنی رسانای A از اثر بارها و میدان‌های خارجی حفاظت شده است. به بیان دیگر رسانای اصلی سپری برای محافظت رسانای A از اثرهای الکتریکی میدان‌های بیرونی است. دقیقاً به این دلیل است که ابزار حساس الکتریکی و الکترونیکی در جعبه‌های فلزی جا سازی می‌شوند. برای نمونه جعبه‌ی کامپیوترهای شخصی را از جنس فلز انتخاب می‌کنند. در مکان‌هائی‌که آذرخش وجود دارد، بهتر است که خود را در درون اتومبیل، از خطر صاعقه محافظت کنیم تا اینکه در فضای آزاد باشیم (البته اگر صاعقه به بدنه‌ی اتومبیل برخورد کند ممکن است آن را تا حد سوزان گرم کند ولی برق گرفتگی نخواهیم داشت، اما خطر سوختگی و کباب شدن وجود دارد.)

مایکل فاراده♦ در سال ۱۸۳۸ با آزمایشی وجود سپر الکتروستاتیک را به نمایش گذاشت. او قفس فلزی با سطح چهار مترمربع ساخت و آن را بر روی پایه‌های عایق قرار داد. سپس فاراده در درون قفس قرار گرفت و با ایجاد تخلیه‌ی جرقه‌ای با ولتاژ بالا، قفس را باردار کرد. حتی با چنان ولتاژ بالا ، فاراده در درون قفس میدان الکتریکی نیافت. درون قفس با جنس رسانای دیواره‌ها از اثر میدان‌ها و بارهای الکتریکی بیرونی در امان مانده است.

مثال ۴-۲۱ کره‌ی رسانا با کاواک ناتُهی: در شکل (۴-۵۲) کره‌ی رسانای بدون بار الکتریکی نشان داده شده است. در درون کره، کاواکی به شکل دلخواه وجود دارد. درون کاواک بار q قرار دارد. میدان الکتریکی را در بیرون کره (در نقطه‌ی P) حساب کنید؟



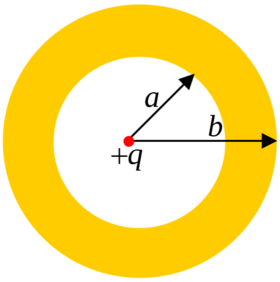
شکل ۴-۵۲ میدان رسانا با کاواک ناتهی

حل: در نگاه نخست شاید به نظر برسد که پاسخ به شکل کاواک ومکان بار $+q$ در درون آن بستگی دارد. اما این نظر نادرست است. پاسخ $(q/4\pi\varepsilon_0 r^2)\hat{\mathbf{r}}$ است.

♦ Michael Faraday

این پاسخ به شکل کاواک و مکان بار درون آن بستگی ندارد. رسانا تمام اطلاعات مربوط به ماهیت کاواک را از ما (برای بیرون کره) می‌پوشاند و تنها بار کل درون کاواک را آشکار می‌کند. چگونه؟ بار $+q$ دردرون کاواک بار $-q$ را روی دیواره‌ی کاواک القاء می‌کند. این بار القایی چنان توزیع می‌شود که میدان آن، در تمام نقاط بیرون کاوک (یعنی در درون رسانا) اثر میدان بار $+q$ را از بین ببرد. چون رسانا بار خالص ندارد، بارهای اضافی $+q$ مجبورند در سطح بیرونی کره به‌طور یکنواخت توزیع شوند. این توزیع **یکنواخت** است زیرا آثار غیر تقارنی بار نقطه‌ای $+q$ توسط بار القایی $-q$ در سطح کاواک از بین می‌رود. بنابراین، آنچه باقی می‌ماند میدان بارهای اضافی $+q$ در روی سطح بیرونی کره است که میدان آن همان‌گونه که گفته شد و از قانون گوس برمی‌آید، برابر $(q/4\pi\varepsilon_0 r^2)\hat{\mathbf{r}}$ است.

مثال ۲۲-۴ میدان الکتریکی پوسته‌ی رسانای کروی: پوسته‌ی کروی شکل (۵۳-۴) را در نظر بگیرید. شعاع درونی و بیرونی آن به ترتیب a و b است. در مرکز پوسته بار $+q$ قرار دارد. میدان الکتریکی را در ناحیه های **(الف)**: $r<a$ ، **(ب)**: $a<r<b$ و **(پ)**: $r>b$ حساب کنید.



شکل ۵۳-۴ پوسته‌ی رسانا و بار $+q$ در مرکز آن

حل: پاسخ مسئله با استفاده از قانون گوس به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\;;\quad r<a \qquad (4-121)$$

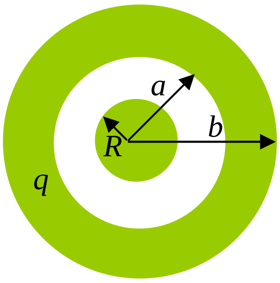
$$\mathbf{E}=0\quad,\quad a<r<b \qquad \text{درون رسانا} \qquad (4-122)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\quad,\quad r>b \qquad 4-124)$$

مثال ۲۳-۴ کره‌ی رسانای توپر و پوسته‌ی کُلُفت: کره‌ای فلزی به شعاع R دارای بار q است. این کره با یک پوسته‌ی کروی فلزی ضخیم به شعاع درونی a و شعاع بیرونی b در برگرفته شده است (شکل ۵٤-۴).
پوسته‌ی فلزی بدون بار است.

(الف): میدان الکتریکی را در همه جا به‌دست آورید.

(ب): چگالی بار سطحی σ را در R , a و b حساب کنید.



شکل ۵٤-۴ کره‌ی باردار و پوسته‌ی رسانا

حل (الف): در ناحیه‌ی $r<R$، (درون کره‌ی رسانا) میدان صفر است.

در ناحیه‌ی $R<r<a$ بنا به قانون گوس داریم $(q/4\pi\varepsilon_0 r^2)\hat{\mathbf{r}}$.

در درون پوسته، $a<r<b$ ، باز هم $\mathbf{E}=0$ است، چون این ناحیه گوشت رساناست. و سرانجام، میدان الکتریکی در ناحیه‌ی $r>b$ بنابه قانون گوس $\mathbf{E}=(q/4\pi\varepsilon_0 r^2)\hat{\mathbf{r}}$ است.

(ب): بار q به طور یکنواخت روی سطح کره‌ی به شعاع R توزیع می‌شود. بنابراین $\sigma_R=q/4\pi R^2$ است. با استفاده از قانون گوس و با توجه به مثال‌های ۲۱-۴ و ۲۰-۴ بارهای القایی در سطوح درونی و بیرونی پوسته عبارتند از

$$\sigma_a=-\frac{q}{4\pi a^2}\qquad,\qquad \sigma_b=\frac{q}{4\pi b^2} \qquad (4-125)$$

نکته: توجه کنید که جمع کل بارهای القایی همواره صفر است. در این مثال، بار کل القایی در روی سطح داخلی پوسته برابر

$q_a=\sigma_a\left(4\pi a^2\right)=-q$ است و بار القایی کل در روی سطح بیرونی پوسته برابر $q_b=\sigma_b\left(4\pi b^2\right)=+q$ است. در نتیجه، $q_a+q_b=\circ$ است.♣

مثال ۲۴-۴ دو کاواک باردار در درون کره‌ی رسانا: در درون کره‌ی رسانای بی‌بار A به شعاع R برابر شکل (٥٥-٤) دو کاواک کروی با شعاع‌های b و c ایجاد شده است. در مرکز هر یک این کاواک‌ها بارهای نقطه‌ای q_b و q_c قرار دارد.

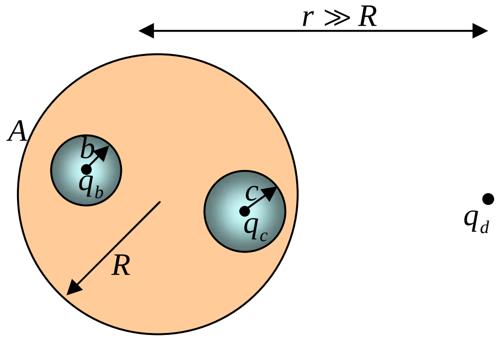
(الف): چگالی بارهای سطحی σ_b، σ_c و σ_R را به‌دست آورید.

(ب): میدان الکتریکی در بیرون رسانا چیست؟

(پ): میدان الکتریکی را در درون هر یک از کاواک‌ها حساب کنید.

(ت): چه نیرویی به q_b و q_c وارد می‌شود؟

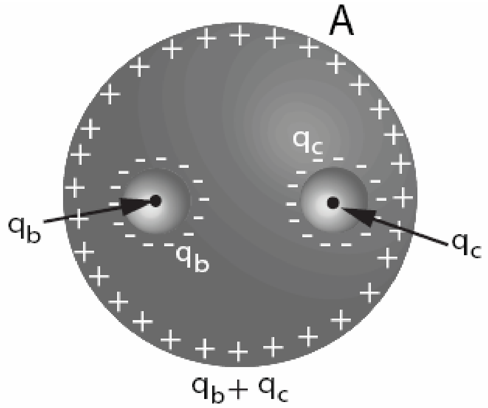
(ج): اگر بار q_a را به رسانا نزدیک کنیم کدام یک از پاسخ‌های بالا تغییر خواهد کرد؟



شکل ٥٥-٤ دو کاواک در یک رسانای کروی

(چ): فرض کنید در فاصله‌ی دور r ($r \gg R$) بار نقطه‌ای q_d قرار دارد. چه نیرویی به کره‌ی A و هر یک از بارهای q_b ، q_c و q_d وارد می‌شود. کدام نیرو تقریبی است و به این که r خیلی دور است بستگی دارد ؟

حل (الف): بارهای q_b و q_c (فرض کنید هر دو مثبت اند) در روی دیواره‌های کاواک‌های خود بارهای $-q_b$ و $-q_c$ القاء می‌کنند. چون رسانای A بی بار است، در سطح بیرونی آن هم به اندازه‌ی q_b+q_c بار القاء می‌شود. این بارهای القایی در شکل (٥٦-٤) دیده می‌شوند. بنابراین، چگالی بارها عبارتند از



شکل ٥٦-٤ بارهای القایی

$$\sigma_b=-\frac{q_b}{4\pi b^2},\qquad \sigma_c=-\frac{q_c}{4\pi c^2}$$
$$\sigma_R=\frac{q_b+q_c}{4\pi R^2}\tag{٤-١٢٦}$$

(ب) و (پ) : میدان‌های الکتریکی از قانون گوس قابل محاسبه اند. داریم

$$\mathbf{E}_{r>R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_b+q_c}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\quad,\qquad \mathbf{E}_b=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_b}{r_b^2}\hat{\mathbf{r}}_b\qquad \mathbf{E}_c=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_c}{r_c^2}\hat{\mathbf{r}}_c\tag{٤-١٢٧}$$

توجه کنید که $\mathbf{r}$ برداری از مرکز کره‌ی رسانا تا نقطه‌ای در بیرون آن است. $\mathbf{r}_b$ و $\mathbf{r}_c$ بردارهایی از مرکز کاواک‌ها تا نقطه‌ای در درون آنها است.

(ت): به بارهای q_b و q_c نیرو وارد نمی‌شود، چون رسانایی که آنها را احاطه کرده است اجازه نمی‌دهد تا میدان به درون کاواک‌ها نفوذ کند.

(ج): σ_R تغییر می‌کند اما σ_b و σ_c تغییر نمی‌کنند. $\mathbf{E}_{r>R}$ تغییر می‌کند اما $\mathbf{E}_b$ و $\mathbf{E}_c$ تغییر نمی‌کنند. نیروی وارد به q_b و q_c هنوز هم صفر اند.

(چ): اگر r خیلی بزرگ باشد، می‌توان از بارهایی که q_d روی کره‌ی A القاء می‌کند، چشم پوشید. همانند بخش (ت)، به بارهای q_b و q_c نیرو وارد نمی‌شود؛ چون در درون رسانا میدان صفر است و میدان بار q_d نمی‌تواند در آن نفوذ کند. رسانا بارهای q_b و q_c را از یکدیگر و نیز آنها را از اثر q_d در امان نگه می‌دارد.

اگر رسانا آرمانی و کامل باشد این پاسخ دقیق است. نیروی وارد به A و q_d با هم برابر و در جهت عکس یکدیگر اند. اندازه‌ی آن عبارت است از

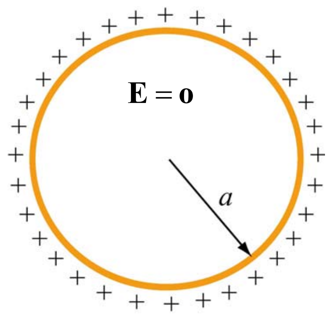
$$F_A = F_{q_d} = \frac{١}{٤\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{q_d\left(q_b + q_c\right)}{r^{٢}} \qquad (٤-١٢٨)$$

این پاسخ فقط هنگامی درست است که r خیلی بزرگ باشد. در فاصله‌های کوتاه r، بار q_d باعث می‌شود که در سطح کره‌ی A توزیع بار تغییر کند.

مثال ۴-۲۵ پتانسیل الکتریکی پوسته‌ی کروی رسانا: پوسته‌ی فلزی کروی شکل به شعاع a شکل (٤-٥٧) را در نظر بگیرید. بار الکتریکی پوسته Q است.

(الف): پتانسیل الکتریکی را در همه جا حساب کنید.

(ب): انرژی پتانسیل آرایه را به‌دست آورید.



شکل ٤-٥٧ پوسته‌ی کروی با بار Q و شعاع a

حل (الف): میدان الکتریکی در بیرون پوسته ($r > a$) با استفاده از قانون گوس به دست می‌آید و ما آن را پیش‌تر به‌دست آورده‌ایم. میدان الکتریکی در ناحیه‌ی درون پوسته ($r < a$) هم بنا به قانون گوس صفر است (چون در این ناحیه بار وجود ندارد). بنابراین، داریم

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{٤\pi\varepsilon_{\circ} r^{٢}}\hat{\mathbf{r}} \;; & r > a \\ \cdot \;; & r < a \end{cases} \qquad (٤-١٢٩)$$

پتانسیل الکتریکی را با استفاده از رابطه‌ی (٣-٩) می توان به‌دست آورد

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (٤-١٣٠)$$

نسبت به بینهایت (مبداء پتانسیل: $V(\infty) = \circ$) برای $r > a$ داریم

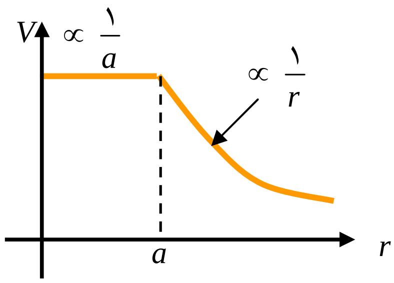
$$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{\circ} r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{Q}{r} \qquad (٤-١٣١)$$

پتانسیل در ناحیه‌ی درون پوسته، $r < a$ ، عبارت است از

$$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{a} dr\, E_{r>a} dr - \int_{a}^{r} \cancel{E_{r<a}} dr = -\int_{\infty}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{Q}{a} \qquad (٤-١٣٢)$$

در شکل (٤-٥٨) نمودار تغییرات پتانسیل رسم شده است

(ب): به انرژی پتانسیل U می‌توان همانند کار لازم برای سامان دادن این آرایه اندیشید. برای این که پوسته‌ی کروی را باردار کنیم، باید یک عامل خارجی بارها را از بینهایت به روی سطح پوسته منتقل کند. فرض کنید در یک لحظه، مقدار بار موجود در



شکل ٤-٥٨ پتانسیل الکتریکی پوسته

روی پوسته q است. در این لحظه، پتانسیل در روی سطح کره $V_t = q/4\pi\varepsilon_0 a$ است. این پتانسیل نهایی نیست، بلکه پتانسیل لحظه‌ای است. پس، برای این که جزء بار بعدی dq را از بینهایت به سطح پوسته منتقل کنیم، عامل خارجی باید کار

$$dW = V_t dq = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)dq \qquad (٤-١٣٣)$$

را انجام بدهد. در نتیجه، کار کل لازم برای این که پوسته را به بار نهایی‌اش Q برسانیم، برابر است با

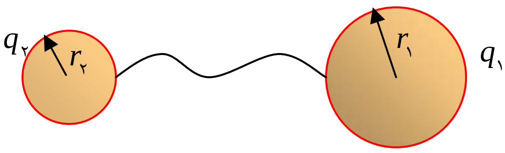
$$W = \int_0^Q dq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \qquad (٤-١٣٤)$$

چون پتانسیل نهایی پوسته، $V = Q/4\pi\varepsilon_0 a$ و $W = U$ اند، رابطه‌ی بالا را می‌توان ساده‌تر نوشت:

$$U = \frac{1}{2}QV \qquad (٤-١٣٥)$$

مقایسه‌ی نتیجه‌ی بالا با کار لازم برای انتقال بار نقطه‌ای Q از بینهایت به نقطه‌ای که پتانسیل درآن نقطه V است، جالب است. کار لازم برایآوردن بار نقطه‌ای Q از بینهایت به نقطه‌ای که پتانسیل سایر بارها در آن نقطه V است، برابر $W = QV$ است. پس، برای بار نقطه‌ای انرژی پتانسیل $U = QV$ است.

حال دو کره‌ی فلزی به شعاع‌های r_1 و r_2 را در نظر بگیرید که همانند شکل (٤-٥٩) با سیم نازکی به هم وصل اند. بین این دو کره بار شارش پیدا می‌کنند تا این که ترازمندی برقرار شود و پتانسیل در روی هر دو کره یکسان شود (توجه کنید که سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است): $V_1 = V_2 = V$. فرض کنید در حالت ترازمندی، بارهای روی کره‌ها q_1 و q_2 اند. از اثر سیم چشم‌پوشی کنید. از شرط هم‌پتانسیل بودن سطح رساناها نتیجه می‌گیریم که



شکل ٤-٥٩ دو کره‌ی رسانای متصل به هم

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \qquad (٤-١٣٦)$$

اگر کره‌ها از هم دورباشند، توزیع بار روی آنها یکنواخت می‌شود. میدان الکتریکی آنها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \quad , \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \qquad (٤-١٣٧)$$

که در آن σ_1 و σ_2 چگالی بار سطحی روی کره‌هاست. از رابطه‌های (٤-١٣٧) به‌دست می‌آید:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad (٤-١٣٨)$$

چون چگالی بار سطحی به طور وارون با شعاع متناسب است، نتیجه می‌گیریم که چکالی بار سطحی σ در ناحیه‌های با شعاع خمش کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. بنابراین، میدان الکتریکی در نقاط تیز روی سطح رسانا قوی‌تر است. طراحی میله‌ی برق‌گیر بر این اساس است. به همین دلیل است که در روی برگ درخت‌های با نوک تیز، گرد و خاک بیشتری جمع می‌شود.

۴-۶-۴ نیروی الکتریکی وارد بر بار سطحی در روی رسانا و فشار الکتروستاتیکی

در بخش ۲-٦-٤ و در رابطه‌ی (١١٦-٤) دیدیم که در روی سطح رسانایی با چگالی بار سطحی یکنواخت σ، مولفه‌ی مماسی میدان الکتریکی صفر است و بنابراین، در گذار از سطح رسانا، این مولفه‌ی میدان پیوسته است (یعنی درست در بالا و درست در پایین سطح رسانا مولفه‌ی مماسی میدان یکسان و برابر صفر است)؛ در حالی که مولفه‌ی عمودی میدان الکتریکی رفتار گسسته دارد. اختلاف مولفه‌ی عمودی میدان درست در زیر سطح و درست در بالای سطح رسانا برابر $\Delta E_n = \sigma/\varepsilon_\circ$ است. این وضعیت فقط به رساناها محدود نیست. آن را در هنگام بررسی میدان پوسته‌ی کروی با توزیع بار سطحی σ (رابطه‌ی (٣٧-٤)) و در بررسی میدان حاصل از صفحه‌ی تخت گسترده (رابطه‌ی (٦٤-٤)) هم دیدیم.

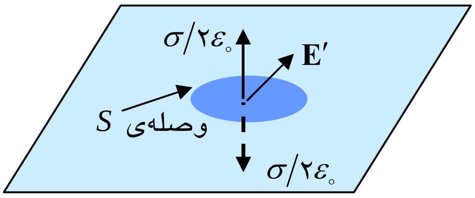
برای مثال، پوسته‌ی کروی به شعاع $r_\circ$ را در نظر بگیرید که توزیع بار سطحی آن σ است. همان‌گونه که پیش‌تر دیدیم، میدان در همه جای درون این پوسته صفر است. اندازه‌ی میدان درست در بیرون آن $\sigma/\varepsilon_\circ$ و جهتش عمود بر سطح کره است. اختلاف میدان درست در زیر توزیع بار و درست در بالای آن $\Delta E_n = (\sigma/\varepsilon_\circ) - \circ = \sigma/\varepsilon_\circ$ است.

در مورد صفحه‌ی بینهایت گسترده با چگالی بار سطحی σ هم همین طور است. میدان الکتریکی در بالای صفحه $(\sigma/2\varepsilon_\circ)\hat{\mathbf{k}}$ و در زیر صفحه $(-\sigma/2\varepsilon_\circ)\hat{\mathbf{k}}$ است. بازهم اختلاف میدان در دو طرف صفحه برابر $\Delta \mathbf{E} = (\sigma/2\varepsilon_\circ)\hat{\mathbf{k}} - (-\sigma/2\varepsilon_\circ)\hat{\mathbf{k}} = \sigma/\varepsilon_\circ \hat{\mathbf{k}}$ است. روشن است که در این حالت، بنا به تقارن، میدان فقط مولفه‌ی عمودی دارد. بنابراین، می‌دانیم که $\Delta E_n = \sigma/\varepsilon_\circ$ است.

در هرسه مورد، پوسته‌ی کروی، صفحه‌ی گسترده و سطح رسانا، قانون گوس برقرار است: میدان الکتریکی E در گذار از یک سو به سوی دیگر لایه‌ی باردار به اندازه‌ی $\sigma/\varepsilon_\circ$ تغییر می‌کند.

به بارهایی که در روی پوسته‌ی کروی، یا صفحه‌ی و یا سطح رسانا نوزیع شده اند چه نیروی الکتریکی وارد می‌شود؟ در نگاه نخست، این پرسش شاید گیج‌کننده به نظر بیاید، چون میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را همین بارها تولید کرده اند.

در روی سطح رسانای باردار ناحیه‌ی کوچکی را برابر شکل (٦٠-٤) درنظر بگیرید. به این وصله‌ی کوچک S چه نیرویی وارد می‌شود؟ فرض کنید که مساحت وصله dA است و بار موجود در روی آن را $dq = \sigma dA$ بنامید. نیروی وارد به بار dq دو منشاء دارد: نیرویی که بقیه‌ی بارهای روی سطح رسانا به وصله‌ی S وارد می‌کنند و نیرویی که بارهای موجود در خود وصله‌ی S به dq وارد می‌کند. عامل دوم البته صفر است. نیروی رانش کولمبی بین بارهای همنام وصله نمونه‌ی دیگری از قانون سوم نیوتون است؛ وصله نمی‌تواند به خودش نیرو وارد کند. این، مسئله‌ی ما را ساده می‌کند و اجازه می‌دهد تا میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ ناشی از تمامی بارهای روی سطح رسانا را (از جمله، میدان ناشی از بارهای وصله را) در محاسبه‌ی نیروی $d\mathbf{F}$ وارد بر بار dq به کار ببریم. پس، نیروی وارد بر بارهای وصله‌ی S را می‌توان به‌صورت $d\mathbf{F} = \mathbf{E}dq = \mathbf{E}\sigma dA$ نوشت. اما برای E چه مقداری را باید به کار ببریم؟ در بیرون رسانا (یا در بیرون پوسته‌ی کروی) میدان یک مقداری دارد و در درون رسانا (یا در درون پوسته) مقدار آن صفر است.



شکل ٦٠-٤ نیروی در روی رسانا

برای این که به این پرسش پاسخ بدهیم، میدان الکتریکی را در مکان دلخواهی در روی وصله‌ی S به‌صورت جمع برداری میدان ناشی از بارهای روی وصله‌ی S و میدان الکتریکی بقیه‌ی بارهای روی سطح رسانا می‌نویسیم

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}' \qquad (١٣٩-٤)$$

$\mathbf{E}_S$ میدان بارهای روی وصله‌ی S و $\mathbf{E}'$ میدان بقیه‌ی بارهاست. بنا به قانون سوم نیوتون، وصله‌ی S نمی‌تواند به خودش

نیرو وارد کند. بنابراین، نیروی وارد بر آن را باید میدان $\mathbf{E}'$ فراهم کند. فرض کنید وصله‌ی S به اندازه‌ای کوچک است که می‌توان آن را تخت فرض کرد. بنا به قانون گوس، میدان الکتریکی وصله درست در بالا و درست در زیر آن عبارت است از

$$\mathbf{E}_S=\begin{cases}+\dfrac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{k}} & ; \quad z>۰\\[2mm] -\dfrac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{k}} & ; \quad z<۰\end{cases} \tag{۴-۱۴۰}$$

بنابراین، با توجه به اصل برنهی، میدان الکتریکی در بالای سطح رسانا عبارت است از

$$\mathbf{E}_{z>}=\left(\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\right)\hat{\mathbf{k}}+\mathbf{E}' \tag{۴-۱۴۱}$$

هم‌چنین در زیر سطح رسانا، میدان الکتریکی برابر است با

$$\mathbf{E}_{z<}=-\left(\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\right)\hat{\mathbf{k}}+\mathbf{E}' \tag{۴-۱۴۲}$$

نکته‌ی مهم این است که نیرو را میدان $\mathbf{E}'$ به وصله وارد می‌کند و این میدان در روی سطح وصله گسستگی ندارد؛ اگر وصله‌ی S را بُبریم و دور بیندازیم، میدان $\mathbf{E}'$ در سوراخ به وجود آمده گسسته نیست (چون در اینجا دیگر بار سطحی وجود ندارد تا گسستگی ایجاد کند.) اگر رابطه‌های (۱۴۱-۴) و (۱۴۲-۴) را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{E}'=\frac{۱}{۲}\left(\mathbf{E}_{z>}+\mathbf{E}_{z<}\right)=\mathbf{E}_{\text{avg}} \tag{۴-۱۴۳}$$

$\mathbf{E}_{\text{avg}}$ میدان میانگین است. میانگین‌گیری در واقع به معنی حذف میدان وصله‌ی S است. میدان الکتریکی یک رسانا در بالای سطح آن $\mathbf{E}_{z>}=\left(\sigma/\varepsilon_۰\right)\hat{\mathbf{k}}$ و در زیر سطح $\mathbf{E}_{z<}=۰$ است و در نتیجه داریم

$$\mathbf{E}_{\text{avg}}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{k}}+۰\right)=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{k}} \tag{۴-۱۴۴}$$

پس، نیروی وارد به وصله‌ی S برابر

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}_{\text{avg}}=\left(\sigma A\right)\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{k}}=\frac{\sigma^۲ A}{۲\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{k}} \tag{۴-۱۴۵}$$

است که در آن A مساحت سطح وصله‌ی S است. (برای اثبات فیزیکی و واقعی‌تر رابطه‌ی (۱۴۵-۴) نکته‌ی ۱ را در پایان این بخش ببینید.)

این نیرو درست همان چیزی است که لازم است تا بارهای الکتریکی روی سطح رسانا را جابه‌جا کند و آن را به حالت ترازمندی برساند. در این حالت ترازمندی است که میدان الکتریکی درست در بیرون رسانا برابر $\sigma/\varepsilon_۰$ و در گوشت آن صفر است. توجه کنید که این نیرو همواره (و مستقل از این که علامت بار σ در روی سطح رسانا چیست) می‌کوشد وصله‌ی S را به سوی میدان الکتریکی براند.

با استفاده از این نتیجه می‌توان فشار الکتروستاتیکی وارد به وصله‌ی S را به‌صورت زیر تعریف کرد: می‌دانیم که فشار P با نیرو در واحد سطح تعریف می‌شود. پس،

$$P\equiv\frac{F}{A}=\frac{\sigma^۲}{۲\varepsilon_۰}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}\right)^۲=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰E^۲ \tag{۴-۱۴۶}$$

است. E اندازه‌ی میدان الکتریکی درست در بالای وصله است. فشار به وسیله‌ی میدان الکتریکی منتقل می‌شود.

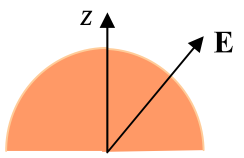
مثال ۲۶-۴ نیروی رانش بین نیمکره‌ها: کره‌ای رسانا به شعاع R دارای بار کل Q است. نیروی رانش بین "نیمکره‌ی شمالی" و "نیمکره‌ی جنوبی" آن را حساب کنید.

حل: میدان در درون کره صفر است و در بیرون آن برابر

$$E_{r>R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (٤-١٤٧)$$

است. بنابراین، میدان میانگین در روی سطح آن عبارت است از

$$\mathbf{E}_{\text{avg}} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (٤-١٤٨)$$



شکل ٤-٦١ محور z و میدان الکتریکی

و چگالی بار سطحی برابر $\sigma = Q/4\pi R^2$ است. بنا به تقارن مسئله، نیروی وارد بر نیمکره‌ی شمالی در راستای محور z است (شکل ٤-٦١ را ببینید) . نیرو در واحد سطح f_z برابر $f_z = \sigma\left(E_{\text{avg}}\right)$ است. در نتیجه، نیروی کل که به نیمکره‌ی شمالی وارد می‌شود، برابر است با

$$F_z = \int f_z da = \int\left(\frac{Q}{4\pi R^2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\right)\cos\theta\left(R^2\sin\theta d\theta d\phi\right)$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi R}\right)^2 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4R}\right)^2\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4R}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi R^2\varepsilon_0} \qquad (٤-١٤٩)$$

نکته‌ی ۱: در رابطه‌ی (٤-١٤٤) نشان دادیم که میدان در روی یک سطح باردار را می‌توان با میانگین میدان‌ها درست در بالا و درست در زیر سطح جایگزین کرد. برای این که بتوانیم عمل میانگین‌گیری را توجیه کنیم، حالت عمومی‌تری را در نظر بگیرید که تصویری واقعی‌تری هم از سطح باردار به‌دست می‌دهد. ضخامت لایه‌ی بار واقعی، صفر نیست. بارها ممکن است در بخش‌های مختلف لایه به شکل‌های گوناگون توزیع شده باشد، اما هنوز هم بار کل در واحد سطح، σ، در همه‌ی بخش‌های لایه یکسان باشد. بنابراین، میدان الکتریکی را در یک طرف لایه‌ی باردار واقعی E_1 بنامید (به جای این که مثلا در درون پوسته‌ی نازک کروی، میدان را صفر فرض کنید). در طرف دیگر لایه‌ی باردار، میدان را E_2 بنامید.در این صورت، به‌ازای هر σ، شرطی که قانون گوس اعمال می‌کند، عبارت از $E_2 - E_1 = \sigma/\varepsilon_0$ است.

حال بگذارید با دقت بیش‌تر به درون لایه نگاه کنیم. در درون لایه‌ی باردار، میدان از یک سو به سوی دیگر، به طور پیوسته از E_1 به E_2 تغییر می‌کند. در درون لایه توزیع بار حجمی وجود دارد. اگر یک رویه‌ی لایه در $x = 0$ و رویه‌ی دیگرش در $x = x_0$ باشد، چگالی بار حجمی هم می‌تواند تابع x باشد. آن را $\rho(x)$ بنامید. حال زیرلایه‌ی بسیار نازک‌تری به ضخامت $dx \ll x_0$ را در درون لایه‌ی باردار اصلی در نظر بگیرید. بار در واحد سطح موجود در این زیرلایه‌ی بسیار نازک ρdx است. اگر سطح آن A باشد، نیروی وارد به زیرلایه‌ی بسیار نازک عبارت است از

$$dF = E\rho dx \cdot A \qquad (٤-١٥٠)$$

پس، نیروی کل که در واحد سطح به لایه‌ی باردار وارد می‌شود، برابر است با جمع (یا درست‌تر، انتگرال) نیروهای جزیی که به

هر زیرلایه‌ی سازنده‌ی لایه‌ی اصلی وارد می‌شود:

$$\frac{F}{A}=\int_{\circ}^{x_\circ} E\,\rho dx \qquad (۴-۱۵۱)$$

اما قانون گوس (با $E_۲-E_۱=\sigma/\varepsilon_\circ$) می‌گوید که تغییر میدان E در زیرلایه، یعنی dE، برابر $\rho dx/\varepsilon_\circ$ است. بنابراین، در معادله‌ی (۱۵۰-۴) می‌توان ρdx را با $\varepsilon_\circ dE$ جایگزین کرد. با این جایگزینی انتگرال بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{F}{A}=\int_{E_۱}^{E_۲}\varepsilon_\circ E dE=\frac{\varepsilon_\circ}{۲}\left(E_۲^۲-E_۱^۲\right)=\frac{\varepsilon_\circ}{۲}\left(E_۲+E_۱\right)\left(E_۲-E_۱\right) \qquad (۴-۱۵۲)$$

چون $E_۲-E_۱=\sigma/\varepsilon_\circ$ است، نیرو در واحد سطح را در رابطه‌ی (۱۵۲-۴) می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{F}{A}=\frac{۱}{۲}\left(E_۱+E_۲\right)\sigma \qquad (۴-۱۵۳)$$

ما به پیمان خود پای‌بند بودیم و نشان دادیم که به ازای هر σ معینی نیرو در واحد سطح وارد به لایه‌ی باردار با میانگین میدان‌ها در دو سطح لایه تعیین می‌شود و تا زمانی که سطح مورد نظر در مقایسه با مساحت کل کوچک است، مستقل از ضخامت لایه و تغییرات چگالی بار $\rho(x)$ در درون لایه است.♣

نکته‌ی ۲: در مثال ۲۶-۴ کره‌ی رسانا را در نظر گرفتیم که بار کل آن Q بود. این بار البته در روی سطح کره توزیع می‌شود. جهت میدان در روی کره برون‌سو است (رابطه‌ی (۱۴۸-۴) را نگاه کنید.) پس، نیروی وارد به جزء بار در روی کره (چه مثبت و چه منفی) هم به سوی بیرون است. این را از رابطه‌ی (۱۴۹-۴) می‌دانیم. بنابراین، انتظار داریم بارها از روی کره کَنده و در هوا پخش شوند. چون بارها از سطح کره کنده نمی‌شوند، باید نیرویی درون‌سو وجود داشته باشد که نیروی برون‌سو را خنثی کند. ما یک چنین نیرویی را که حامل‌های بار را در جایشان نگه می‌دارد، در معادله‌هایمان وارد نکردیم. گفتن این که این نیرو از نوع "غیرالکتریکی" است، گمراه کننده است. چون نیروهای ربایشی و رانشی الکتریکی نیروهای چیره در ساختار اتم‌ها و به طور کلی‌تر در به‌هم چسبانی ماده است. تفاوت آنها در این است که این نیروها فقط در فاصله‌های کوتاه، از مرتبه‌ی فاصله‌های بین اتمی و بین مولکولی، اثر گذار اند. در این مقیاس فاصله، فیزیک به داستان تک ذره تبدیل می‌شود. بگذارید با مثالی این را روشن کنم. بادکنک پلاستیکی با شعاع $\circ{,}۱\text{m}$ را در نظر بگیرید که $۱\circ^{-۸}\text{ C}$ بار الکتریکی به طور یکنواخت در روی سطح بیرونی توزیع شده است. چگالی بار الکتریکی این سطح $\sigma=\left(۱\circ^{-۸}\text{ C}\right)/۴\pi\left(\circ{,}۱\text{m}\right)^۲=۸\times۱\circ^{-۸}\text{ C/m}^۲$ است. نیروی برون‌سو در واحد سطح باردار از رابطه‌ی (۱۴۵-۴) به‌دست می‌آید (با توجه به مقدار $\varepsilon_\circ=۸{,}۸۵\times۱\circ^{-۱۲}\text{ C}^۲/\text{N m}^۲$) و برابر است با

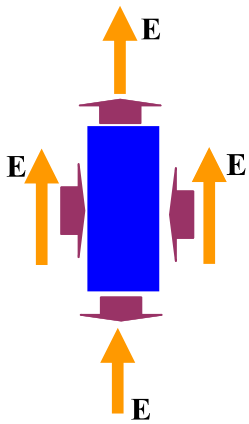
$$\frac{dF}{dA}=\frac{\sigma^۲}{۲\varepsilon_\circ}=\frac{\left(۸\times۱\circ^{-۸}\text{ C/m}^۲\right)^۲}{۲\left(۸{,}۸۵\times۱\circ^{-۱۲}\text{ C}^۲/\text{N m}^۲\right)}=۳{,}۶\times۱\circ^{-۴}\text{ N/m}^۲ \qquad (۴-۱۵۴)$$

اگر اندکی دقت کنید و توجه کنید که بار هر الکترون $۱{,}۶\circ۲\times۱\circ^{-۱۹}\text{ C}$ است، می‌بینید که $۱\circ^{-۸}\text{ C}$ بار که بر روی بادکنک قرار دادیم، معادل حدود $۶\times۱\circ^{۱\circ}$ الکترون است که بادکنک چسبانده‌ایم. این تعداد الکترون، یعنی ۵۰ میلیون الکترون اضافی در هر سانتی‌متر مربع پلاستیک بادکنک. به خاطر این فشردگی انباشت الکترون، ناصافی در توزیع بار قابل مشاهده نیست. اما، اگر می‌توانستیم به یکی از این الکترون‌های اضافی نگاه کنیم، آن را در فاصله‌ی $۱\circ^{-۶}\text{ m}$ از نزدیک‌ترین همسایه‌اش می‌یافتیم. در مقیاس اتمی $۱\circ^{-۶}\text{ m}$ فاصله‌ی بسیار زیادی است. این الکترون در یک مولکول موضعی پلاستیک به دام می‌افتد. دامی که سرشت آن الکتریکی است. مولکول پلاستیک هم به مولکول بعدی چسبیده است و این زنجیره ادامه دارد. اگر بخواهید الکترون را بکشید و از مولکول جدا کنید، نیرو به تمامی بخشی از پلاستیک انتقال پیدا می‌کند. البته، اگر نیروی کشش شما خیلی بزرگ

باشد، می‌تواند الکترون را از مولکولی که به آن جسبیده است جدا کند. برای این کار به میدان الکتریکی نیاز دارید که هزاران بار قوی‌تر از میدان الکتریکی این آزمایش است. ♣

۴-۷ کشش و فشار الکتریکی

در بخش ٤-٦-٤ فشاری را که میدان الکتریکی به یک سطح رسانا منتقل می‌کند، به‌دست آوردیم. در حالت عمومی‌تر، سطح رسانای بسته‌ای (یک جعبه‌ی فلزی پنداری) مانند شکل (٦٢-٤) را در یک میدان الکتریکی تصور کنید. فرض کنید میدان الکتریکی یکنواخت و به سوی بالاست. اگر به سطح بالایی این جعبه‌ی پنداری نگاه کنید، می‌بینید که در آنجا میدان الکتریکی بر سطح عمود است و جهتش به سوی بیرون از سطح است. در واژگان نظریه‌ی میدان فاراده، گوییم میدان کششی را در راستای خود به این سطح منتقل می‌کند و آن را به **سوی بالا می‌کشد**. درست مثل این است که به این سطح ریسمانی بسته باشیم و آن را با ریسمان به بالا بکشیم.



شکل ٤-٦٢ جعبه‌ی پنداری در میدان الکتریکی

همچنین، اگر به سطح پایینی جعبه نگاه کنیم، می بینیم که در روی این سطح میدان الکتریکی با بردار عمود بر این سطح پاد موازی است. در واژگان فاراده، باز هم گوییم که میدان الکتریکی کششی در راستای خود به این سطح منتقل می‌کند و آن را به سوی پایین می‌کشد. درست مانند این که ریسمانی به این سطح بسته باشیم تا آن را به پایین بکشیم (تعیین واقعی جهت نیرو به این سادگی نیست و نیازمند شناختن تانسور تنش مکسول است). توجه کنید که این هم **کششی موازی** با بردار عمود بر سطح پایین جعبه است. پس، فرق نمی‌کند که میدان موازی یا پادموازی با بردار عمود بر سطح باشد. در هر دو حالت، کشش در یک سو است. در سطح سمت چپ جعبه، میدان الکتریکی بر بردار عمود بر سطح برون‌سو عمود است. در زبان واژگان فاراده گوییم میدان فشاری به سطح منتقل می‌کند و آن را به **سوی راست هل** می‌دهد. به همین ترتیب، میدان الکتریکی در سطح سمت راست جعبه در راستای عمود بر بردار سطح برون‌سو است و به این سطح فشاری در جهت **چپ** منتقل می‌کند و آن را به سوی **چپ هل** می‌دهد.

توجه کنید که واژه‌ی **کشش** را برای حالتی به کار بردیم که تنش انتقالی میدان، موازی یا پادموازی بردار برون سوی عمود بر سطح بود. از واژه‌ی **فشار** را برای حالتی استفاده کردیم که تنش انتقالی میدان بر بردار برون‌سوی سطح عمود است. اندازه‌ی این فشارها و کشش‌ها در روی سطح‌های مختلف جعبه برابر $\varepsilon_{\circ}E^{2}/2$ است. یکای این کمیت نیرو بر سطح یا فشار است. این کمیت، همچنین چگالی انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی است (فصل ٥ را ببینید)، چون یکای انرژی در واحد حجم هم یکای فشار است.

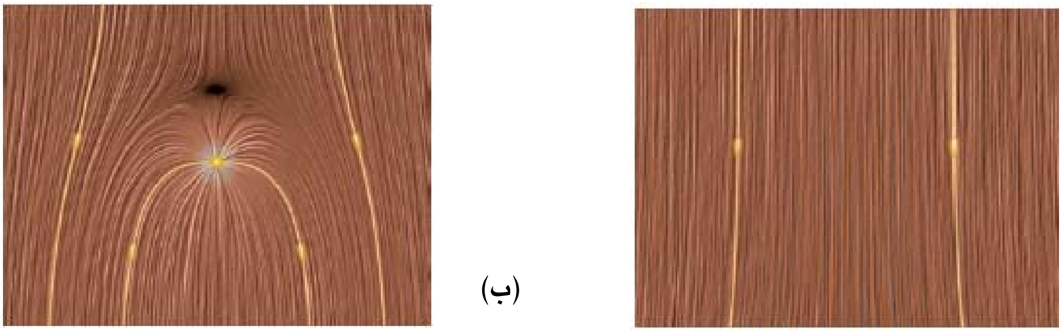
برای این که نمونه‌ای برای تنش انتقالی میدان الکتریکی و تبادل انرژی بین میدان و ذرات آورده باشیم، حرکت ذره‌ی باردار را در میدان الکتریکی یکنواخت بررسی می‌کنیم.

۴-۸ حرکت ذره‌ی باردار در میدان الکتریکی یکنواخت

ذره‌ای با بار $q > 0$ را در نظر بگیرید که در میدان الکتریکی یکنواخت حرکت می‌کند. فرض کنید میدان الکتریکی $\mathbf{E} = -E_{\circ}\hat{\mathbf{k}}$ است و ذره حرکت خود را در راستای محور z و رو به بالا آغاز کند. به ذره نیروی ثابت و رو به پایین $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = -qE_{\circ}\hat{\mathbf{k}}$

وارد می‌شود و سرانجام ذره را وادار به توقف می‌کند (فرض کنید سرعت ذره در $z=0$ به صفر می‌رسد) و سپس، به حرکت رو به پایین ادامه می‌دهد. حرکت ذره و میدان‌های همراه آن در شکل‌های (۶۳-۴) نشان داده شده اند. با زبان تنش‌های انتقالی از سوی میدان، حرکت ذره را چگونه می‌توان توصیف کرد؟

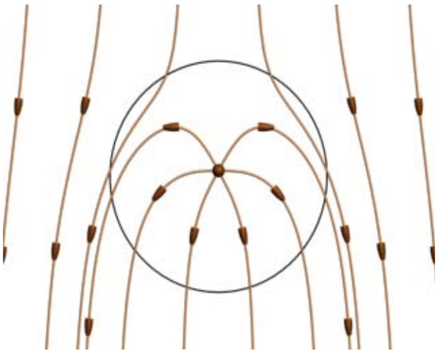
توصیف فاراده از نیروی روبه پایین که به بار وارد وارد می‌شود و شکل (۶۳-۴ ب) نمود می‌یابد، باید از این قرار باشد: یک



(الف) **(ب)**

شکل ۶۳-۴ حرکت ذره‌ی باردار در میدان الکتریکی یکنواخت: **(الف)** آرایش میدان کل وقتی که بار در روی محور $-z$ و دور از دید است. **(ب)**: آرایش میدان کل، وقتی که ذره پیش از حرکت به سوی پایین، در مبداء به حال سکون در می‌آید.

سطح کروی مجازی پیرامون ذره‌ی باردار تصور کنید که بار در مرکز آن است، مانند شکل (۶۴-۴). خط‌های میدان که نیمه‌ی پایینی این سطح را می‌شکافند و از آن می‌گذرند، به سطح تنشی موازی میدان منتقل می‌کنند. این تنش، ذره را از طرف پایین به زیر می‌کشد. خط‌های میدان در سمت بالای کره‌ی فرضی، فشاری را به سطح منتقل می‌کنند که بر خودشان عمود است. این تنش، بار را از طرف بالا به سوی پایین هل می‌دهد. اثر برآیند این دو تنش، نیرویی به سوی پایین است که به بار وارد می‌شود. از شکل (۶۳-۴ ب) پیداست که وقتی بار به سوی بالا حرکت می کند، خط‌های میدان در پیشاپیش بار فشرده‌تر می‌شوند و در پشت‌ِسر نامتراکم اند. این آرایش میدان، به بار متحرک نیرویی در جهت پایین منتقل می‌کند و در شکل پیداست.



شکل ۶۴-۴ حرکت ذره‌ی باردار در میدان یکنواخت رو به پایین

آرایش میدان، همچنین به بارهایی که میدان یکنواخت را تولید کرده اند، نیرویی در جهت بالا منتقل می‌کند. ما آن را در شکل نمی‌بینیم. حرکت برآیند روبه بالای بار در این آرایش میدانی، مانند حرکت ذره‌ی نقطه‌ای در یک محیط مقاوم مانند آب یا هواست. تنش‌ها در اثر پیش‌روی ذره پدید می‌آیند.

به زبان انرژی هم می‌توان وضعیت را توصیف کرد: وقتی بار به سوی بالا حرکت می‌کند، انرژی جنبشی بار متحرک کاهش می‌یابد. این مقدار انرژی در میدان الکتروستاتیکی فشرده انباشته می‌شود. وقتی که ذره رو به پایین حرکت می‌کند، وارون این فرایند روی می‌دهد. افزون بر این، خط‌های میدان هم با گذشت زمان حرکت می‌کنند. حرکت خط‌های میدان در جهت شارش انرژی است. از شکل (۶۳-۴ ب) به روشنی دیده می‌شود که وقتی حرکت بار کند می‌شود، انرژی الکترومغناطیسی از بار به محیط شارش پیدا می‌کند. وقتی بار در جهت رو به پایین حرکت می‌کند، شتابیده می‌شود و شارش انرژی الکترومغناطیسی از محیط به سوی بار است. در این حالت، میدان انرژی خود را آزاد می‌کند.

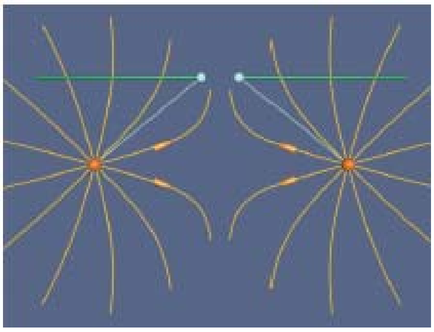
پایستگی تکانه چه می‌شود؟ وقتی بار از ناحیه‌ی z های منفی وارد میدان می شود، پس از مدتی جهت خود را تغییر می‌دهد و

به سوی ناحیه‌ی z های منفی برمی‌گردد. در این فرایند، تکانه چگونه پایسته می‌ماند؟

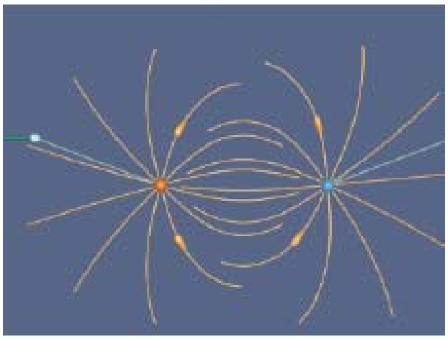
البته تکانه پایسته است؛ چون تکانه‌ی در جهت $+z$ از بار در حال حرکت به بارهایی که میدان یکنواخت الکتریکی را به وجود آورده‌اند (و در شکل دیده نمی‌شود) منتقل می‌شود. از آرایش میدان در شکل (۶۳-۴) این وضعیت به روشنی پیداست. تنش میدان که بار را به پایین هل می‌دهد، همراه با تنش دیگری است که بارهای به وجود آورنده‌ی میدان یکنواخت را به سوی بالا هل می‌دهد.

- **آونگ بارهای همنام و ناهمنام**

این مثال دیگری از فرایند های الکترومغناطیسی است که می‌توان آن را با واژگان تنش توصیف کرد. فرض کنید دو بار الکتریکی از دو آونگ آویزانند. نقطه‌ی آویز آونگ‌ها را می‌توان به یکدیگر نزدیک و یا از هم دور کرد. نخست، حالتی را در نظر بگیرید که بارها همنام اند و بنابراین، یکدیگر را می‌رانند. در شکل (۶۵-۴) وضعیتی نشان داده شده است که عاملی خارجی می‌کوشد نقاط آویز آونگ‌ها را به هم نزدیک کند. نیروی گرانش بارها را به سوی پایین می‌کشد و نیروی رانش الکتروستاتیکی می‌کوشد آنها را در راستای خط واصل‌شان از هم دور کند. در این وضعیت، رفتار میدان‌های الکتریکی چنان است که تنش الکتروستاتیکی در جهت عمود بر میدان منتقل می‌شود. عامل خارجی می‌کوشد بارها را به هم نزدیک کند، اما فشار الکتروستاتیکی می‌کوشد بارها را از هم دور نگه دارد. وقتی می‌خواهیم نقطه‌های آویز آونگ‌ها را به هم نزدیک کنیم، تنشی که عمود بر میدان منتقل می‌شود، می‌کوشد بارها را دور از هم نگه دارد. (در شکل بالا خط های میدان را آگاهانه ادامه نداده ایم تا تصویر گویاتر باشد.) حال به وضعیتی توجه کنید که بارها ناهمنام اند و عامل خارجی می‌کوشد نقاط آویز آونگ‌ها را به هم نزدیک کند. عامل خارجی با این کار می‌کوشد بارها را به هم نزدیک کند. این وضعیت در شکل (۶۵-۴) دیده می‌شود. چون بارها ناهمنام اند، یکدیگر را می‌ربایند. نیروی گرانش آنها را به سوی پایین می‌کشد. نیروی الکتروستاتیک بارها را در راستای خط واصل‌شان به سوی یکدیگر می‌راند. رفتار میدان‌های الکتریکی در این وضعیت، نمونه‌ای از تنش است که موازی میدان منتقل می‌شود. کشش می کوشد دو بار ناهمنام را به یکدیگر نزدیک کند. وقتی نقاط آویز آونگ‌ها را به هم نزدیک می‌کنیم، کشش که موازی میدان الکتریکی منتقل می‌شود، بارها را به سوی هم می‌راند.



شکل ۶۴-۴ دو بار همنام آویزان از دو آونگ



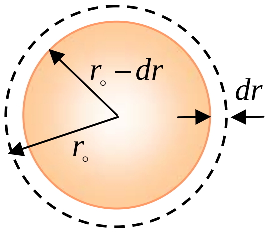
شکل ۶۵-۴ دو آونگ یا بارهای ناهمنام

۹-۴ انرژی میدان الکتریکی

پیش‌تر گفتم که میدان الکتریکی را می‌توان حالتی از ماده پنداشت که انرژی و تکانه دارد. تاکنون با میدان الکتریکی چندین نوع توزیع بار آشنا شدیم و آموختیم که، دست‌کم در بنیاد، میدان الکتریکی هر توزیع بار را حساب کنیم. در بخش پایانی این فصل می‌پرسیم، انرژی مربوط به یک میدان الکتریکی چیست؟ در فصل ۵ این موضوع را با گستردگی و جزییات بیش‌تر بررسی خواهیم کرد. با این حال، ما ادعا کردیم که قانون کولمب به همراه اصل برنهش تنها ابزاری هستند که برای بررسی پدیده‌های

الکتریکی (دستکم، الکتروستاتیکی) لازم داریم. البته، از این دو مفهوم استفاده کردیم و قانون گوس را هم به جعبه ابزار خود افزودیم. پس، کاملا به‌جاست که پرسش بالا را بپرسیم. در این‌جا پرسش را به یاری یک مثال پاسخ خواهیم داد. اثبات عمومی را به فصل ٥ واگذار می‌کنیم.

یک پوسته‌ی کروی به شعاع $r_\circ$ را در نظر بگیرید که بار سطحی آن σ و یکنواخت است. فرض کنید پوسته را اندکی می‌فشارید. همانند شکل (٤-٦٦) شعاع آن به $r_\circ - dr$ کاهش پیدا می‌کند. در این کار، برای چیره شدن به نیروی رانشی $\sigma^2/2\varepsilon_\circ$ در هر مترمربع باید کار انجام دهیم. چون مقدار جابه‌جایی dr است، کار لازم برای قشردن پوسته $\left(4\pi r_\circ^2\right)\left(\sigma^2/2\varepsilon_\circ\right)dr = \left(2\pi r_\circ^2\sigma^2/\varepsilon_\circ\right)dr$ است. این بدان معنی است که انرژی لازم برای چیدمان بارها در این وضعیت، افزایش یافته است (منظور من همان انرژی U است که در فصل ٣ به آن پرداختیم. انرژی لازم برای این که بارها را از بینهایت بیاوریم و در جایشان قرار دهیم.) پس، داریم



شکل ٤-٦٦ پوسته‌ی فشرده

$$dU = \frac{2\pi r_\circ^2\sigma^2}{\varepsilon_\circ}dr \qquad (٤-١٥٥)$$

به تغییر میدان الکتریکی توجه کنید: پیش از فشردن، میدان در درون پوسته‌ی به ضخامت dr صفر بود، اما حالا $E = \sigma/\varepsilon_\circ$ شده است. در فضای بیرون $r_\circ$ میدان تغییر نکرده است، همان است که پیش از فشرده شدن پوسته وجود داشت. در عمل، میدانی به شدت $E = \sigma/\varepsilon_\circ$ تولید کردیم که ناحیه‌ای با حجم $4\pi r_\circ^2 dr$ را پر کرده است. این کار با هزینه کردن انرژی رابطه‌ی (٤-١٥٥) انجام گرفت. اگر در رابطه‌ی (٤-١٥٥) به‌جای σ قرار دهیم $\sigma = \varepsilon_\circ E$، خواهیم داشت

$$dU = \frac{2\pi r_\circ^2\left(\varepsilon_\circ E\right)^2}{\varepsilon_\circ}dr = \frac{\varepsilon_\circ E^2}{2}4\pi r_\circ^2 dr \qquad (٤-١٥٦)$$

این رابطه، نمونه‌ای از یک قضیه‌ی کلی است که در فصل ٥ آن را ثابت خواهیم کرد. در اینجا فقط آن را بیان می‌کنم: *انرژی پتانسیل مجموعه‌ای از بارهای الکتریکی (یعنی کار لازم برای سامان دادن بارها) را با نسبت دادن انرژی $\left(\varepsilon_\circ E^2/2\right)d\tau$ به هر جزء حجم $d\tau$ و انتگرال‌گیری بر روی تمام فضایی که میدان وجود دارد، می‌توان از میدان الکتریکی به‌دست آورد.*

$$U = \frac{\varepsilon_\circ}{2}\int_{\text{allspace}} E^2 d\tau \qquad (٤-١٥٧)$$

که در آن $E^2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$ یک کمیت اسکالر است. این مقدار انرژی در میدان الکتریکی ذخیره می‌شود. چون میدان الکتریکی یک میدان پایستار است، همه‌ی این انرژی را می‌توان باز یافت. می‌توان به $\varepsilon_\circ E^2/2$ همانند چگالی انرژی (با یکای $\mathrm{J/m^3}$) اندیشید.

مثال ٤-٢٧ انرژی پتانسیل کره‌ی همگن: بار کل Q در حجم کره‌ای به شعاع R به طور یکنواخت توزیع شده است. چقدر انرژی در کره ذخیره شده است؟

حل: میدان الکتریکی در درون و بیرون کره غیر صفر است. ما آنها را در مثال ٣-٤ حساب کردیم. بنابراین، معادله‌ی (٤-١٥٧) شامل دو انتگرال است: یکی برای بیرون کره و دیگری برای ناحیه‌ی درون کره. میدان در ناحیه‌ی درون، $r < R$، برابر $\left(1/4\pi\varepsilon_\circ\right)\frac{Qr}{R^3}$ و در ناحیه‌ی بیرون کره $\left(1/4\pi\varepsilon_\circ\right)\frac{Q}{r^2}$ است (حل مثال ٣-٤ را نگاه کنید). بنابراین، از رابطه‌ی (٤-١٥٧) داریم:

$$U=\frac{\varepsilon_{\circ}}{۲}\left[\int_{\circ}^{R}\left(\frac{Qr}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\right)^{۲}۴\pi r^{۲}dr+\int_{R}^{\infty}\left(\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^{۲}}\right)۴\pi r^{۲}dr\right]=\frac{۱}{۵}\frac{Q^{۲}}{۸\pi\varepsilon_{\circ}R}+\frac{Q^{۲}}{۸\pi\varepsilon_{\circ}R}=\frac{۳}{۵}\frac{Q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R} \qquad (۴-۱۵۸)$$

نکته: معادله‌ی (۱۵۷-۴) را نمی‌توان برای یک بار نقطه‌ای به کار برد. برای دیدن این نکته، بار q را در مبداء مختصات قرار دهید. در نزدیکی مبداء $E^{۲}=q^{۲}/\left(۴\pi\varepsilon_{\circ}\right)^{۲}r^{۴}$ است. چون $d\tau=۴\pi r^{۲}dr$ است، رفتار انتگرالنده به صورت $E^{۲}d\tau\propto dr/r^{۲}$ می‌شود و در حد $r\to\circ$، مقدار انتگرال در رابطه‌ی (۱۵۷-۴) بینهایت می‌شود. این به ما می‌گوید که برای انباشتن بار q در حجم صفر بینهایت انرژی لازم است. این درست است، اما سودمند نیست. در دنیای واقعی با ذره‌های مانند الکترون و پروتون سروکار داریم. این ذره‌ها به اندازه‌ای کوچک اند که برای خیلی از منظورها از ابعاد آنها چشم‌پوشی می‌کنیم و وقتی برهم‌کنش آنها را با یکدیگر بررسی می‌کنیم، آنها را به صورت ذره‌ی نقطه‌ای فرض می‌کنیم. چه مقدار انرژی برای ساختن این ذره‌ها هزینه شده است؟ پاسخ این پرسش را نمی‌توان با الکترومغناطیس کلاسیک داد. در اینجا، ما ذره‌ها را پیش ساخته فرض می‌کنیم و فقط کار لازم برای جابه‌جایی آن‌ها را حساب می‌کنیم.

۹-۴ پیوست ۱: اثبات قضیه‌ی دیورژانس

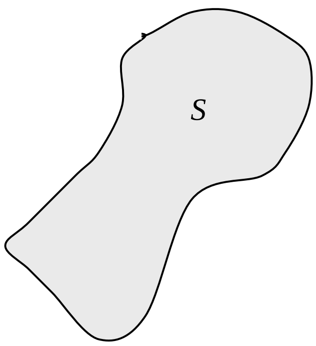
۱-۹-۴ تعریف دیورژانس

در این پیوست نگاه دیگری به دیورژانس می‌اندازیم و قضیه دیورژانس را اثبات می‌کنیم.

فرض کنید میدان برداری $\mathbf{F}$ داده شده است و می‌خواهیم شار Φ گذرنده‌ی این میدان را از سطح بسته‌ی S در شکل (۶۷-۴) حساب کنیم :

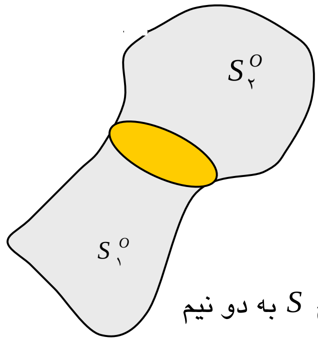
$$\Phi=\oint_{S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۴-۱۵۹)$$

اجازه دهید این سطح را همانند در شکل (۶۸-۴)به دو بخش تقسیم کنیم (برای روشنی بیش‌تر، در شکل (۶۸-۴) این دو بخش را جدا از هم نشان داده ایم اما، در واقع، آنها به هم چسبیده اند.)

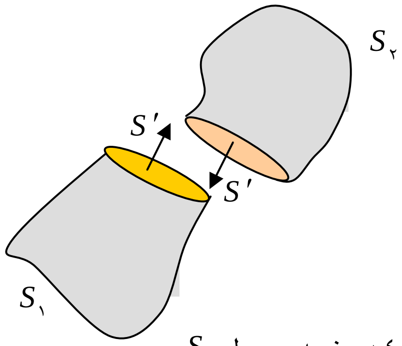


شکل ۶۷-۴ یک سطح بسته

پیش از این که چیزی را حساب کنیم، بهتر است مطمین شویم که معنی سطوح مختلف را در این شکل‌ها می‌فهمیم. در شکل (۶۷-۴) دو سطح $S_{۱}^{O}$ و $S_{۲}^{O}$ را داریم که نیمه‌های بالایی و پایینی سطح S در شکل (۶۷-۴) اند. توجه کنید که سطوح $S_{۱}^{O}$ و $S_{۲}^{O}$ سطح‌های بسته **نیستند**. افزون بر سطوح $S_{۱}^{O}$ و $S_{۲}^{O}$ دو سطح دیگر هم وجود دارند که در شکل (۶۹-۴) آنها را با S' نشان داده‌ایم. مساحت این دو سطح یکسان است اما جهت آنها مخالف یکدیگر است. سطح‌های $S_{۱}$ و $S_{۲}$ سطح‌های **بسته** اند که مرکزهای دو نیمه‌ی سطح S اند. حال می‌توان شار Φرا حساب کرد.



شکل ٦٨-٤ تقسیم سطح S به دو نیم



شکل ٦٩-٤ دو نیمه‌ی سطح S

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \int_{S_۱^O} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} + \int_{S_۲^O} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} \\ &= \int_{S_۱^O} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} + \int_{S_۲^O} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} + \int_{S'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} - \int_{S'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} \\ &= \left(\int_{S_۱^O} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} + \int_{S_۲^O} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} \right) + \left(\int_{S'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} + \int_{S'} \mathbf{F}\cdot (-d\mathbf{a}) \right) \\ &= \oint_{S_۱} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} + \oint_{S_۲} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} \equiv \Phi_۱ + \Phi_۲ \end{aligned} \tag{٤-١٦٠}$$

توجه کنید که در سطر اول، سطح S را به دو سطح $S_۱^O$ و $S_۲^O$ تقسیم کرده‌ایم. در سطر دوم انتگرال روی سطح S' را یک بار افزودیم و یک بار کم کردیم و در سطر سوم آنها را چنان دسته بندی کردیم که سطح‌های بسته‌ی $S_۱$ و $S_۲$ را بسازند. در سطر آخر شار گذرنده از سطح‌های بسته‌ی $S_۱$ و $S_۲$ را تعریف کردیم.

می‌توان این کار را ادامه داد و حجم‌هایی را که سطح‌های بسته‌ی $S_۱$ و $S_۲$ احاطه کرده اند به حجم‌های کوچک‌تر و کوچک‌تر تقسیم کرد. هر بار که این کار را انجام دهیم، زوج سطح‌هایی مانند S' پدید می‌آید که جهت‌گیریشان یکدیگر را حذف می‌کند. با این کار، شار کل گذرنده از سطح اصلی S به مجموعه‌ای از شارها تقسیم می‌شود که از سطح این حجم‌های کوچک می‌گذرند:

$$\Phi = \sum_{i=۱}^{S} \Phi_k \tag{٤-١٦١}$$

پس، می‌توان حجم V را (که سطح بسته‌ی S مرزهای آن است) به حجم‌های کوچک‌تر تقسیم کرد و شار گذرنده از سطح S، با جمع شارهای گذرنده از سطح این حجم‌های جزیی برابر است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که شار کل باید با حجم V متناسب باشد. از این رو، دیورژانس میدان $\mathbf{F}$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \lim_{V\to ۰} \frac{\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}}{V} \tag{٤-١٦٢}$$

به بیان دیگر، در حد $V \to ۰$، دیورژانس عبارت از شار گذرنده از سطحی است که مرزهای حجم V است تقسیم بر V.

۲-۷-۴ قضیه‌ی بنیادی دیورژانس

حال که دیورژانس را تعریف کردیم، اینک به اثبات قضیه‌ی بسیار مهمی می‌پردازیم. این قضیه نام‌های مختلفی دارد: **قضیه‌ی**

گوس، **قضیه‌ی گرین** و یا **قضیه‌ی دیورژانس** . ما از نام **قضیه‌ی دیورژانس** استفاده خواهیم کرد

قضیه ۲-۴: انتگرال دیورژانس تابع برداری مانند $\mathbf{F}$ در ناحیه‌ای به حجم V با انتگرال تابع در سطحی بسته‌ای که مرزهای حجم V است، برابر است:

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\right) d\tau = \oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} \qquad (٤-١٦٣)$$

$d\tau$ جزء حجم و $d\mathbf{a}$ بردارجزء سطح اند.

اثبات: نقطه‌ی آغاز ما رابطه‌ی (١٥٢-٤) است.

$$\Phi = \sum_{i=1}^{S}\Phi_k \;\Rightarrow\; \oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N}\oint_{S_i}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_i$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{N} V_i \frac{\oint_{S_i}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} V_i \left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right) \\ &= \int_V \left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right) d\tau \end{aligned} \qquad (٤-١٥٥)$$

به بیان دیگر، شار میدان برداری $\mathbf{F}$ گذرنده از سطح بسته‌ی S با انتگرال $\nabla\cdot\mathbf{F}$ روی حجمی که سطح S احاطه می‌کند، برابر است ■

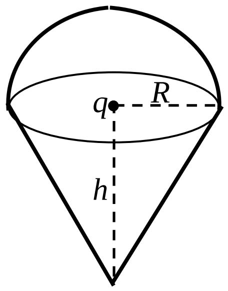
آزمون‌های کوتاه چند گزینه‌ای

۱- قرص تختی به شعاع R و بتوزیع بار سطحی یکنواخت داریم. می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از آن را در نقطه‌ی دلخواهی در فضا بیابیم. کسی پیشنهاد می‌کند که از سطح گوسی به شکل کره‌ی استفاده کنیم که قرص را دربردارد و با آن هم‌مرکز است. کدام گزاره در این مورد درست است؟

(الف): قانون گوس برای کره درست است و می‌توان با استفاده از آن به‌سادگی میدان $\mathbf{E}$ را در هر نقطه‌ای حساب کرد.

(ب): قانون گوس برای کره درست است، اما نمی‌توان از آن برای یافتن میدان $\mathbf{E}$ را در هر نقطه‌ای استفاده کرد.

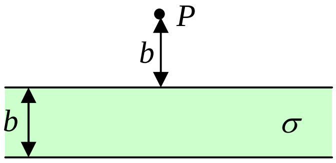
(پ): قانون گوس برای کره درست نیست.



۲- قاعده‌ی قیفی برابر شکل با نیم‌کره‌ای پوشانده شده است. بار q در مرکز قاعده‌ی قیف (مرکز نیم‌کره) قرار دارد. ارتفاع قیف h و شعاع قاعده‌ی آن R است. شار الکتریکی گذرنده از قیف برابر است با

(الف): صفر **(ب)**: $q/۲\pi\varepsilon_\circ$ **(پ)**: $q/۲\varepsilon_\circ$ **(ت)**: $q/\varepsilon_\circ$ **(ج)**: $\dfrac{\pi R\sqrt{h^۲+R^۲}}{۲\pi R^۲}\dfrac{q}{\varepsilon_\circ}$

۳- روبانی از بار به پهنای b، به طول بینهایت دراز و کلفتی ناچیز (در جهت عمود بر صفحه) در شکل نشان داده شده است. چگالی بار سطحی روبان σ است. نقطه‌ی P به فاصله‌ی b از روبان قرار دارد. کدام یک از گزینه‌های زیر میدان را در نقطه‌ی P توصیف می‌کند.



(الف): $\dfrac{\sigma(\ell n۲)}{\varepsilon_\circ}$ **(ب)**: $\dfrac{\sigma b(\ell n۲)}{۲\pi\varepsilon_\circ}$ **(پ)**: $\dfrac{\sigma(\ell n۲)}{۲b\pi\varepsilon_\circ}$

(ت): $\dfrac{\sigma^۲ b(\ell n۲)}{۲\pi\varepsilon_\circ}$ **(ج)**: $\dfrac{\sigma^۲(\ell n۲)}{۲b\pi\varepsilon_\circ}$

۴- دو پوسته‌ی استوانه‌ی هم‌محور به طول L و شعاع‌های $R_۱$ و $R_۲$ (با $R_۱ < R_۲ \ll L$) و بچگالی بارهای سطحی $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ را در نظر بگیرید. در کدام یک از حالت‌های زیر پوسته‌ها در پتانسیل یکسان قرار دارند؟

(الف): $\sigma_۱=\sigma_۲$ **(ب)**: $\sigma_۱=-\sigma_۲$ **(پ)**: $\sigma_۱R_۱=\sigma_۲R_۲$ **(ت)**: $\sigma_۱=\circ$ **(ج)**: $\sigma_۲=\circ$

۵- بار حجمی نایکنواخت $\rho(r)=\rho_\circ R/r$ در کره‌ای به شعاع R و دربازه‌ی $r\le R$ توزیع شده است. کدام گزاره رفتار میدان الکتریکی را در درون کره ($r<R$) به درستی توصیف می‌کند؟

(الف): $E(r)\propto ۱/r^۲$ (ب): $E(r)\propto ۱/r$ (پ): $E(r)=$ مقدار ثابت

(ت): $E(r)=r$ (ج): $E(r)=r^۲$

۶- دو پوسته‌ی کروی به شعاع‌های $R_۱$ و $R_۲$ به فاصله‌ی خیلی دور از هم قرار دارند. $R_۲>R_۱$ است. اگر بار روی پوسته‌ها به گونه‌ای باشند گه پتانسیل پوسته‌ها (نسبت به بینهایت) باهم برابر باشند، میدان‌های الکتریکی را درست در بیرون پوسته‌ها مقایسه کنید.

(الف): میدان‌ها برابرند **(ب)**: در همسایگی پوسته‌ی بزرگ، میدان بزرگ‌تر است

(پ): در همسایگی کره‌ی کوچک میدان بزرگ‌تر است **(ت)**: برای پاسخ دادن به پرسش به اطلاعات دیگری نیاز است.

۷- میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا به صورت زیر است

$$\mathbf{E}(r)=\begin{cases}\dfrac{a}{r^{۲}}\left(۱-\dfrac{r^{۳}}{R^{۳}}\right)\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r\le R\\ ۰ & ; \quad r>R\end{cases}$$

که در آن a و R مقدارهای ثابت اند. کدام یک از گزاره‌های زیر توصیف دقیق‌تر توزیع باری است که به این میدان می‌انجامد؟

(الف): بار نقطه‌ای منفی $q=۴\pi\varepsilon_۰ a$ جایگزیده در مبداء مختصات بعلاوه‌ی پوسته‌ی کروی به شعاع R با توزیع بارسطحی یکنواخت $\sigma=-q/۴\pi R^{۲}$.

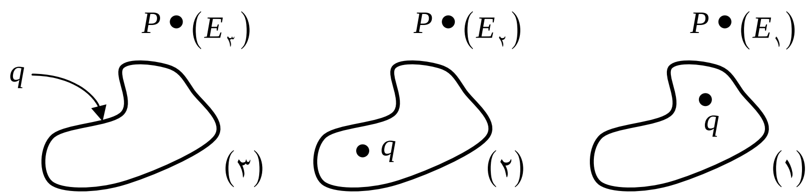
(ب): بار نقطه‌ای مثبت $q=۴\pi\varepsilon_۰ a$ جایگزیده در مبداء مختصات بعلاوه‌ی پوسته‌ی کروی به شعاع R با توزیع بارسطحی یکنواخت $\sigma=-q/۴\pi R^{۲}$.

(پ): بار نقطه‌ای مثبت $q=۴\pi\varepsilon_۰ a$ جایگزیده در مبداء مختصات بعلاوه‌ی کروه‌ای به شعاع R با بار منفی $\rho=-۳q/۴\pi R^{۳}$ که به طور یکنواخت در حجم کره توزیع شده است.

(ت): بار نقطه‌ای منفی $-q=-۴\pi\varepsilon_۰ a$ جایگزیده در مبداء مختصات بعلاوه‌ی کروه‌ای به شعاع R با بار مثبت $\rho=۳q/۴\pi R^{۳}$ که به طور یکنواخت در حجم کره توزیع شده است.

(ج): با اصلاعات داده شده نمی‌توان بار تولید کننده‌ی میدان را تعیین کرد.

۸- پوسته‌ی رسانا در هر سه وضعیت زیر یکسان است. در وضعیت‌های (۱) و (۲) پوسته بدون بار است و بار q در فضای تهی آن جاسازی شده است. در وضعیت (۳) بار q بر روی رسانا قرار دارد. اگر $E_۱$، $E_۲$ و $E_۳$ اندازه‌ی میدان‌های الکتریکی در نقطه‌ی P باشند، کدام گزاره درست است؟



(الف): $E_۱>E_۲>E_۳$

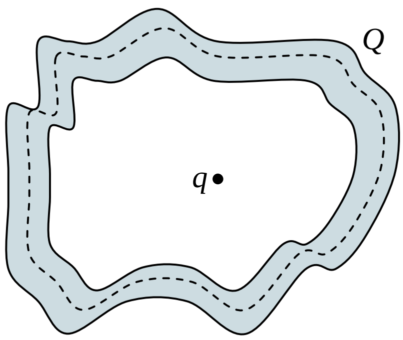
(ب): $E_۱<E_۲<E_۳$

(پ): $E_۱=E_۲>E_۳$

(ت): $E_۱=E_۲<E_۳$

(ج): $E_۱=E_۲=E_۳$

۹- بار q در فضای تهی درون یک پوسته‌ی کلفت رسانا قرار دارد (گوشت رسانا در شکل با رنگ خاکستری نشان داده شده است.) بار کل رسانا Q است. بارهای q و Q هر دو مثبت اند. صفحه‌ای با نقطه‌چین در گوشت رسانا رسم شده است. اگر Φ شار الکتریکی گذرنده از این سطح باشد:



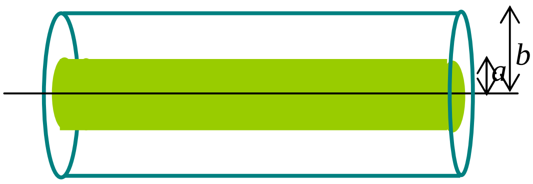
(الف): $\Phi=۰$ **(ب)**: $۰<\Phi<q/\varepsilon_۰$ **(پ)**: $q/\varepsilon_۰$

(ت): $q/\varepsilon_۰<\Phi<(q+Q)/\varepsilon_۰$ **(ج)**: $\Phi=(q+Q)/\varepsilon_۰$

(چ): (الف) و (ب) هر دو   **(ح)**: (ت) و (ج) هر دو

مسئله‌ها

۴-۱ دو استوانه‌ی هم مرکز بسیار دراز به شعاع‌های a و b $(b > a)$ و طول L را در نظر بگیرید. بار $+Q$ به‌طور یکنواخت در حجم استوانه‌ی درونی و بار $-Q$ بر روی سطح استوانه‌ی بیرونی توزیع شده است. ناحیه‌ی $a < r < b$ تهی است. شکل (۷۰-٤) را ببینید.



شکل ۷۰-٤ دو استوانه‌ی تودرتو

(الف): این آرایش چه تقارنی دارد، جهت میدان الکتریکی چیست؟

(ب): برای هر یک از ناحیه‌های $r < a$ ، $a < r < b$ و $r > b$ چه سطح گوسی برمی‌گزینید و از چه متغیری برای پارامتری کردن سطح گوس انتخابی خود استفاده می‌کنید؟ حدود تغییرات این متغیر برای هر ناحیه چیست؟

(پ): برای ناحیه‌ی $r < a$، شار گذرنده از سطح گوس انتخابی را حساب کنید. پاسخ شامل میدان الکتریکی در آن ناحیه هم است که هنوز نمی‌شناسیم.

(ت): بار کل که در درون سطح گوس انتخابی شما برای ناحیه‌ی $r < a$ وجود دارد چقدر است؟

(ج) : برای ناحیه‌ی $r < a$، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را حساب کنید.

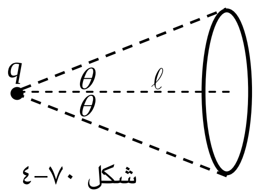
(چ) : گام های بالا را برای یافتن میدان الکتریکی در ناحیه‌ی $a < r < b$ به صورت تابعی از r تکرار کنید.

(ح) : نمودار تغییرات میدان الکتریکی را برحسب پارامتری که برای سطح گوس برگزیده اید، برای هر سه ناحیه رسم کنید.

(خ) : اختلاف پتانسیل بین $r = a$ و $r = ۰$ ؛ یعنی $\Delta V = V(a) - V(۰)$ را حساب کنید.

(د) : اختلاف پتانسیل بین $r = a$ و $r = b$ ؛ یعنی $\Delta V = V(b) - V(a)$ را حساب کنید.

۴-۲ **شار گذرنده از یک دایره**: بار نقطه‌ای q در مبداء مختصات قرار دارد. دایره‌ای در فاصله‌ی ℓ از بار q قرار دارد و برابر شکل (۷۰-٤) نسبت به مبداء مختصات با زاویه‌ی ۲θ گشوده شده است. شار گذرنده از دایره را در نظر بگیرید. چون به جز بار q واقع در مبداء باری دیگری وجود ندارد، شار هر سطحی که با دایره مقید است و در سمت راست مبداء مختصات قرار دارد باید یکسان باشد. این شار را برای دو سطح زیر حساب کنید.



شکل ۷۰-٤

(الف): سطح تخت دایره

(ب): عرقچین کروی که قاعده‌اش دایره است (مرکز مره در مبداء مختصات است).

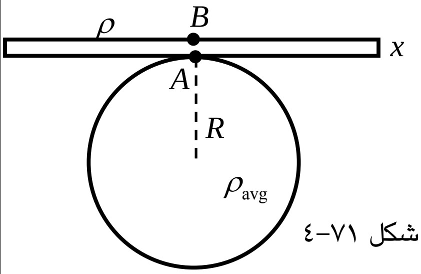
۴-۳ **قانون گوس و دو بار نقطه‌ای**: **(الف)** دو بار نقطه‌ای q در روی محور x و در مکان‌های $x = \pm\ell$ قرار دارند. در نقاط نزدیک به مبداء مختصات و در روی محور x مولفه‌ی x میدان E_x را حساب کنید. سپس در نقاط نزدیک به میداء مختصات و در روی محور y مولفه‌ی y میدان E_y را بیابید. برای $x \ll \ell$ و $y \ll \ell$ تقریب‌های مناسبی را به‌کار ببرید

(ب): استوانه‌ی کوچکی را در نظر بگیرید که مرکزش در مبداء مختصات است و محورش بر محور x منطبق است. شعاع قاعده‌ی استوانه $r_۰$ و طول آن $۲x_۰$ است. با استفاده از نتیجه‌ی بخش (الف)، نشان دهید که شار گذرنده از استوانه صفر است. این نتیجه‌ای است که قانون گوس آن را دیکته می‌کند.

۴-۴ **مقایسه‌ی سه جسم**: میدان الکتریکی را در نقطه‌ای بر روی سطح (۱) کره‌ای به شعاع R ، (۲) استوانه‌ی بینهایت درازی به شعاع R و (۳) برشی به ضخامت $۲R$ که دو بعد دیگرش تا بینهایت گسترده است، حساب و با هم مقایسه کنید. چگالی بار حجمی هر سه جسم یکسان و برابر ρ است. از نظر فیزیکی توضیح دهید که چرا نسبت بزرگی میدان الکتریکی به گونه‌ای

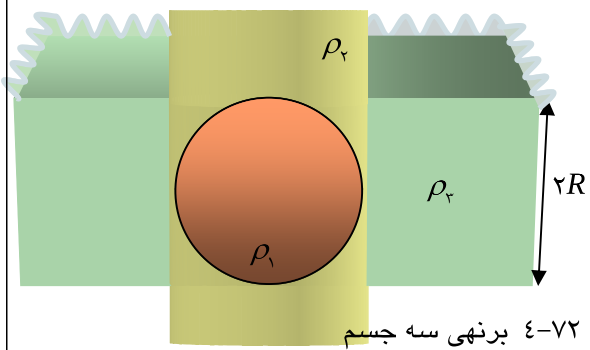
است که از محاسبه‌ی خود به‌دست می‌آورید.

۴-۵ صفحه‌ی روی کره: صفحه‌ی تخت بسیار بزرگی به ضخامت x و با چگالی بار حجمی ρ را در نظر بگیرید. این صفحه با کره‌ای به شعاع R و چگالی بار حجمی ρ_0 برابر شکل (۴-۷۱)در تماس است. نقطه‌ی A را محل تماس بنامید. نقطه‌ی B مقابل نقطه‌ی A در روی بالایی صفحه است. نشان دهید که اگر $\rho > (2/3)\rho_0$ باشد، میدان الکتریکی کل روبه‌بالا (یعنی میدان ناشی از صفحه و کره) در نقطه‌ی B بزرگتر از نقطه‌ی A است. فرض کنید که $R \gg x$ است.



شکل ۴-۷۱

۴-۶ برنهی سه جسم: کره‌ای به شعاع R، استوانه‌ی بینهایت دراز با شعاع قاعده‌ی R و برشی بینهایت گسترده به ضخامت $2R$ را برابر شکل (۴-۷۲) در نظر بگیرید. چگالی بار حجمی یکنواخت آن‌ها را به ترتیب ρ_1، ρ_2 و ρ_3 بنامید. محور استوانه در راستای محور z است. برش بینهایت گسترده بر محور z عمود است و ضخامت آن از $z=-R$ تا $z=R$ است. بنابراین، هرجا که این سه جسم هم‌پوشانی داشته باشند، چگالی بارها باهم جمع می‌شوند. برای این که میدان الکتریکی در همه‌جای کره صفر باشد، چگالی بارها چه رابطه‌ای باید باهم داشته باشند؟

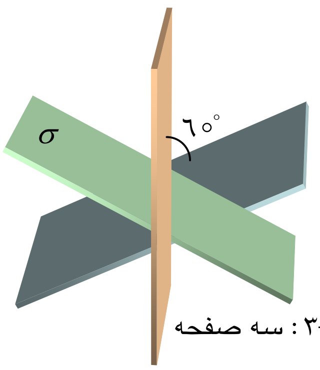


شکل ۴-۷۲ برنهی سه جسم

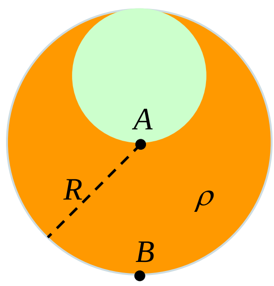
(*راهنمایی:* میدان الکتریکی یک کمیت برداری است، بهتر است با مولفه‌های آن کار کنید.)

۴-۷ دو کره: در شکل (۴-۷۳) کره‌ای به شعاع R با چگالی بار یکنواخت ρ نشان داده شده است. در این کره کاواکی کروی به شعاع $R/2$ ایجاد شده است. میدان الکتریکی را در نقاط A و B حساب کنید.

۴-۸ سه صفحه‌ی بینهایت: سه صفحه بینهایت گسترده هر یک با چگالی بار سطحی σ برابر شکل (۴-۷۴) با زاویه‌ی 60° یکدیگر را قطع کرده اند. میدان الکتریکی حاصل را در همه‌ی نقاط فضا بیابید.



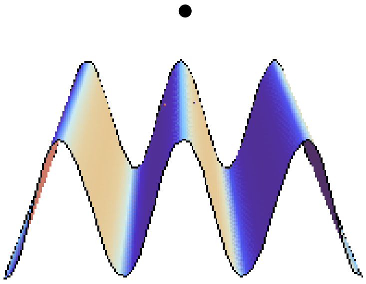
شکل ۴-۷۴ : سه صفحه



شکل ۴-۷۳ دو کره

۴-۹ صفحه‌ی موجدار: این مسئله با محاسبه‌ی طولانی‌تر و شاید پیچیده‌تر همراه است. اما تمرین خوبی برای حسابان برداری است. انتگرال نهایی را نمی‌توان با توابع معمولی حساب کرد، اما با بررسی حالت‌های حدی a خیلی کوچک، یا b خیلی کوچک و یا هر دو به نتیجه‌ی جالبی خواهید رسید.

میدان الکتریکی حاصل از یک صفحه‌بینهایت گسترده‌ی موجدار با چگالی بار سطحی یکنواخت σ را در نقطه‌ی $(0,0,P)$


شکل ٤-٧٥ صفحه‌ی موج‌دار

به‌دست آورید. معادله‌ی سطح با $z = a\cos(by)$ داده شده است و در شکل (٤-٧٥) نشان داده شده است. این سطح با دستور زیر در *Mathematica* رسم شده است:

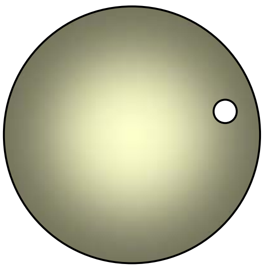
```
Plot3D[Cos[x], {x, -3 Pi, 3 Pi}, {y, -0.1, 0.1},
 Mesh -> None, Ticks → None, Boxed → True,
 ImageSize → 200, Axes → None]
```

۴-۱۰ مربای الکترون: کره‌ای به شعاع a را در نظر بگیرید که با بار منفی به طور یکنواخت در حجم کره توزیع شده است. مقدار بار معادل بار دو الکترون است. در این ژله‌ی بار منفی دو پروتون قرار دارد. فرض کنید با وجود پروتون‌ها توزیع بار منفی در کره یکنواخت باقی می‌ماند. پروتون‌ها در کجا باید قرار گیرند تا نیروی وارد به هر یک از آنها صفر باشد؟ (این آرایش به طور شگفت‌انگیزی، کاریکاتور واقعی از مولکول هیدروژن به‌دست می‌دهد. علت نرمبیدن ابر الکترونی بر روی پروتون‌ها را فقط با مکانیک کوانتومی می‌توان توضیح داد!)

۴-۱۱ نیروهای وارد به سه صفحه: سه صفحه‌ی نارسانای موازی A، B و C داریم..صفحه‌ی A در بالا، B در وسط و صفحه‌ی C در زیر صفحه‌ی B است. چگالی بار صفحه‌های A، B و C به‌ترتیب $-٤\sigma_\circ$ ، $٧\sigma_\circ$ و $-٣\sigma_\circ$ است. اندازه‌ی نیروی‌الکتریکی وارد به هر صفحه را بیابید.

۴-۱۲ نیروی دو نیم‌کره: کره‌ی Q در حجم کره‌ای به شعاع R به‌طور یکنواخت توزیع شده است. نیرویی که بارهای نیم‌کره‌ی جنوبی به نیم‌کره‌ی شمالی وارد می‌کند چیست؟

۴-۱۳ پوسته‌ی سوراخ، دوباره: این مسئله همان مسئله‌ی ٢٦-٢ است. در فصل ٢ انتگرال‌گیری مستقیم را برای حل آن پیشنهاد کردیم و گفتیم که روش‌های دیگری هم وجود دارد. اینک می‌توانید با آموزه‌های همین فصل هم آن را حل کنید.


شکل ٤-٧٦ پوسته با سوراخ

پوسته‌ی سوراخ: در شکل (٤-٧٦) یک پوسته‌ی کروی به شعاع a و با چگالی بار سطحی σ نشان داده شده است. از این پوسته، بخش کوچکی به شکل دایره و به شعاع $b \ll a$ بریده شده است. اندازه و جهت میدان الکتریکی را در مرکز این سوراخ حساب کنید. این مسئله را با چند روش می‌توان حل کرد.

۴-۱۴ میدان توزیع بار: **(الف)** برشی مستطیل شکل در راستای y و z بینهایت گسترده است. در راستای x ضخامت آن ℓ است. با چگالی بار یکنواخت آن ρ است. از $\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_\circ$ استفاده کنید و نشان دهید که میدان الکتریکی در درون برش به صورت $E_x = \rho x/\varepsilon_\circ + A$ است. مفهوم فیزیکی A چیست؟

(ب): شعاع کره‌ای با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ برابر R است. از $\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_\circ$ استفاده کنید و نشان دهید که میدان الکتریکی در ناحیه‌ی درون آن به صورت $E_r = \rho r/٣\varepsilon_\circ + B/r^٢$ است. توصیف فیزیکی جمله‌ی $B/r^٢$ چیست؟

(پ): با توجه به این که در دو چیدمان بالا چگالی بار یکسان بود و در هر دو از رابطه‌ی یکسان $\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_\circ$ استفاده شد، چرا دو پاسخ متفاوت برای این دو چیدمان به‌دست امد؟

۵ پتانسیل ، انرژی الکتروستاتیکی و شرایط مرزی

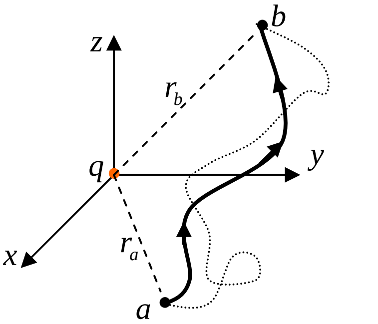
میدان الکتریکی یک کمیت برداری است. میدان برداری را به تقریب با دانستن کرل و دیورژانس آن در تمام نقاط فضا می‌توان به طور کامل حساب کرد. در فصل ٤ دیورژانس میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را به دست آوردیم و قانون گوس را در شکل دیفرانسیلی برحسب آن نوشتیم: $\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$. اما این رابطه به تنهایی برای یافتن میدان $\mathbf{E}$ کافی نیست، بلکه برای این که آن را حساب کنیم باید کرل میدان ، $\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})$، را هم بشناسیم. در بخش ۲-۵ کرل میدان الکتریکی را حساب خواهیم کرد. پیش از آن که این محاسبه را انجام دهیم ، بهتر است ساده‌ترین وضعیت را بررسی کنیم، میدان الکتریکی بار نقطه‌ای جایگزیده در مبداء .

۱-۵ کرل (تاو) میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ بار نقطه‌ای

میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q جایگزیده در مبداء مختصات بنا به قانون کولمب، عبارت است از

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۱-۵)$$

نگاهی به شکل (۱-٤) نشان می‌دهد که کرل این میدان باید صفر باشد. بگذارید انتگرال خط این میدان را بین نقطه‌ی a و نقطه‌ی b حساب کنیم و نشان دهیم که در واقع کرل آن صفر است منظور ما از انتگرال خط ، انتگرال ضرب داخلی میدان $\mathbf{E}$ وجزء طول $d\mathbf{s}$ بین دو نقطه است . در شکل (۱-۵) فرض کنید بار q در مبداء مختصات قرار دارد. جون میدان الکتریکی آن فقط به r بستگی دارد و بنابراین، مختصات کروی مناسب‌ترین چارچوب برای محاسبه است. در مختصات کروی، جزء طول $d\mathbf{s}$ عارت است از



شکل ۱-۵ جابه‌جایی بین دو نقطه در میدان بار نقطه‌ای

$$d\mathbf{s}=dr\,\hat{\mathbf{r}}+rd\,\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta d\,\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (۲-۵)$$

نبابراین ، داریم

$$\begin{aligned}\int_a^b\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}&=\int_a^b\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\right)\cdot\left(dr\,\hat{\mathbf{r}}+rd\,\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta d\,\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)=\int_a^b\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr\\&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\bigg|_{r_a}^{r_b}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_a}-\frac{q}{r_b}\right)\end{aligned} \qquad (۳-۵)$$

که در آن r_a و r_b فاصله‌ی نقاط a و b از مبداء مختصات اند. نکته‌ی مهمی که در رابطه‌ی (۳-۵) نهفته است این است که پاسخ انتگرال فقط به فاصله‌ی نقاط a و b از مبداء بستگی دارد و کاملا **مستقل** از مسیری است که انتگرال‌گیری روی آن انجام گرفته است. به بیان دیگر، انتگرال بالا وری مسیر نقطه‌چین و مسیر پررنگ در شکل (۱-۵) هر دو به یک پاسخ می‌انجامند. فهمیدن این که چرا انتگرال بالا به مسیر بستگی ندارد ، آسان است: انتگرال بالا در واقع انتگرال کار است و چون میدان در جهت شعاعی است، بنابراین، کار حرکت در راستای θ و ϕ صفر است. اگر نقاط a و b بر هم منطبق شوند، مسیر بسته تشکیل می‌شود و از رابطه‌ی (۳-۵) پیداست که در این صورت ($r_a=r_b$) انتگرال صفر می‌شود:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=0 \qquad (۵-۴)$$

با توجه به قضیه‌ی استوکس (قضیه‌ی بنیادی کرل- پیوست این فصل را ببینید) نتیجه می‌گیریم که

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \qquad (۵-۵)$$

رابطه‌های (۴-۵) و (۵-۵) هم‌ارز اند. یکی بیان انتگرالی و دیگری شکل دیفرانسیلی است. این دو رابطه را ما فقط برای میدان یک بار نقطه‌ای به دست آوردیم که در مبداء مختصات قرار داشت. اما نتایج بالا به گزینه‌ی مبداء کاری ندارد. مکان بار هر جا ک باشد، رابطه‌های بالا برقرار اند. اگر بیش از یک بار وجود داشته باشد، بنا به اصل برهم‌نهی، میدان کل این بارها با جمع برداری میدان آن‌ها برابر است

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3+\cdots \qquad (۵-۶)$$

و در نتیجه، اگر کرل دو طرف را حساب کنیم، خواهیم داشت

$$\nabla\times\mathbf{E}=\nabla\times\left(\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3+\cdots\right)=\left(\nabla\times\mathbf{E}_1\right)+\left(\nabla\times\mathbf{E}_2\right)+\left(\nabla\times\mathbf{E}_3\right)+\cdots=0 \qquad (۵-۷)$$

**** ۲-۵ محاسبه‌ی مستقیم $\nabla\times\mathbf{E}$**

میدان الکتریکی توزیع بار در عمومی‌ترین حالت با رابطه‌ی (۸۰-۲) داده می‌شود:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\rho\left(\mathbf{r}'\right)d\tau' \qquad (۵-۸)$$

توجه کنید که ρ فقط تابعی از $\mathbf{r}'$ است و به $\mathbf{r}$ بستگی ندارد. $\mathbf{r}=\mathbf{R}-\mathbf{r}'$ برداری است از جزء بار تا نقطه‌ی میدان. همچنینف توجه کنید که $r=|\mathbf{r}|$ مقدار ثابتی نسشت . وقتی می‌خواهیم $\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را حساب کنیم، عملگر ∇ ، تغییرات (مشتق) برحسب $\mathbf{R}$ است. پس داریم

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\left(\int_V \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\rho\left(\mathbf{r}'\right)d\tau'\right) \qquad (۵-۹)$$

در مثال (۴-۱) ، رابطه‌ی (۳۶-۱)، دیدیم که

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) \qquad (۵-۱۰)$$

بنابراین، رابطه‌ی (۹-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\left(\int \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\rho\left(\mathbf{r}'\right)d\tau'\right)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\nabla\times\left(\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right]\rho\left(\mathbf{r}'\right)d\tau' \qquad (۵-۱۱)$$

و چون کرل گرادیان هر تابع عددی v صفر است، $\nabla\times\left(\nabla v\right)=0$ ، پس نتیجه می‌گیریم

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \qquad (۵-۱۲)$$

از رابطه (۱۱-۵) دیده می‌شود که می توان میدان برداری الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ را به صورت زیر هم نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{R})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\int\frac{1}{r}\rho\left(r'\right)\right)d\tau' \qquad (۵-۱۳)$$

یعنی ، میدان برداری $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ را می‌توان از گرادیان یک تابع اسکالربه دست آورد. میدان $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ تابعی است

برداری و به سه متغیر وابسته است، در حالی که تابع اسکالر فقط به یک متغیر وابسته است. روشن است که کارمحاسبه با تابع اسکالر آسان‌تر از کار کردن با تابع برداری با سه مولفه است. بنابراین، بهتر است بر روی تابع اسکالر تمرکز کنیم. اگر بتوان تابع اسکالر را بد دست آورد، آنگاه یافتن میدان برداری $\mathbf{E}$ با اعمال عملگر گرادیان (که یک مشتق‌گیری ساده است) بر روی آن شدنی است. هدف اصلی ما در این فصل شناسایی این تابع اسکالر یا **تابع پتانسیل** است و در بخش بعدی به آن خواهیم پرداخت. خوب است که در این جا کرل میدان بار نقطه‌ای را که در بخش ۱-۵ به آن پرداختیم، به عنوان مثال به طور مستقیم حساب کنیم.

مثال ۱-۵ کرل میدان الکتریکی بار نقطه‌ای: کرل میدان الکتریکی بار نقطه‌ای جایگزیده در مبداء مختصات را حساب کنید.

حل: میدان بار نقطه ای عبارت است از

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{۵-۱۴}$$

کرل میدان، یعنی $\nabla\times\mathbf{E}$ عبارت است از

$$\nabla\times\mathbf{E}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=$$

$$\hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z-\frac{\partial}{\partial z}E_y\right)-\hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_z-\frac{\partial}{\partial z}E_x\right)+\hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y-\frac{\partial}{\partial y}E_x\right) \tag{۵-۱۶}$$

مولفه‌ی x عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial y}E_z-\frac{\partial}{\partial z}E_y=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)\right]=0 \tag{۵-۱۷}$$

و به همین ترتیب مولفه‌های y و z صفر اند.

میدان‌های برداری که کرل‌شان صفر است (یا به طور هم‌ارز، انتگرال خط‌شان روی مسیر بسته صفر است) میدان‌های **پایستار** اند. پس، میدان الکتروستاتیکی که از این ویژگی برخوردار است، یک میدان پایستار است.

۳-۵ نکاتی پیرامون پتانسیل الکتریکی

در رابطه‌ی (۱۳-۵) دیدیم که میدان الکتریکی را می‌توان از یک تابع عددی به دست آورد. این تابع عددی تابع پتانسیل نام دارد و عبارت است از

$$V(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{r}d\tau' \tag{۵-۱۸}$$

این همان رابطه‌ی (۴۱-۳) است که در فصل ۳ ، بخش ۲-۳-۳ به دست آوردیم. توجه کنید که r فاصله‌ی جزء بار تا نقطه‌ای است که پتانسیل در آن نقطه حساب می‌شود. پس، رابطه‌ی (۱۳-۵) به صورت زیر در می‌آید.

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = -\nabla V\ (R) \qquad (۵-۱۹)$$

این نتیجه هم چیز تازه‌ای نیست و در فصل ۴-۳ (رابطه‌ی ۴۷-۳) به دست آوردیم. نکته‌ای که در فصل ۳ به آن نپرداختیم این است که در رابطه‌ی (۱۸-۵) انتگرال روی تمام فضایی گرفته می‌شود که بار در آن قرار دارد. اگر توزیع بار موضعی باشد و به ناحیه‌ی خاصی از فضا محدود باشد، قلمرو انتگرال‌گیری هم به همان فضای بار محدود است. اگر توزیع بار موضعی نباشد، انتگرال روی تمام بارهای عالم گرفته می‌شود. نکته‌ی دیگر این است که به سمت راست رابطه‌ی (۱۸-۵) همواره می‌توان مقدار ثابتی را افزود. این کار در فیزیک مسئله تغییری ایجاد نمی‌کند. بنابراین، می توان گفت که تابع پتانسیل یگانه نیست. نکته‌ی مهمی که در باره‌ی پتانسیل باید به آن توجه کرد این است که به طور مطلق، پتانسیل یک کمیت فیزیکی نیست و بنابراین قابل اندازه‌گیری هم نیست (اختلاف پتانسیل دو نقطه، اما فیزیکی و قابل اندازه‌گیری است) . رابطه‌ی (۱۸-۵) مقدار پتانسیل را در نقطه‌ای به فاصله‌ی r از مبداء مختصات به دست می‌دهد و گزینه‌ی مبداء کاملا دلبخواه و اختیاری است. پس، تابع پتانسیل به هر نقطه‌ی فضا یک عدد نسبت می‌دهد که به گزینه‌ی مبداء پتانسیل (جایی که در آن نقطه پتانسیل مقدار معینی دارد) بستگی دارد.

کمیتی که واقعا فیزیکی است، میدان الکتریکی است. افزودن مقدار ثابت c به پتانسیل V در میدان الکتریکی تغییر ایجاد نمی‌کند، چون V به $V+c$ تبدیل می‌شود و گرادیان مقدار ثابت همواره صفر است.

چگونه ممکن است میدان الکتریکی را که یک کمیت برداری است و برای محاسبه‌ی آن به سه معادله (یک معادله برای هر مولفه‌ی میدان) نیار است، از یک کمیت عددی (یعنی یک مولفه- یک معادله) به دست آورد؟ رابطه‌ی (۱۹-۵۹ می‌گوید اگر کمیت عددی V را بدانیم، با گرادیان گرفتن از آن ($\mathbf{E} = -\nabla V$) می توان میدان $\mathbf{E}$ را حساب کرد. این یک دست‌آورد بی‌نظیر است و اگر خوب فکرش را بکنید، می‌بینید که همه‌ی اطلاعات موجود که سه رابطه‌ی مستقل میدان به دست می‌دهد، در یک معادله (تابع پتانسیل) خلاصه شده است. پاسخ این پرسش چندان دشوار نیستک سه مولفه‌ی میدان واقعا مستقل از یکدیگر نیستند، بلکه ویژگی خاص میدان الکتریکی، یعنی $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (یا صفر بودن انتگرال خط آن در روی هر مسیر بسته) مشتق مولفه‌های $\mathbf{E}$ را به هم وابسته می‌کند:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad (۵-۲۰)$$

به بیان دیگر، هر تابع برداری نمی‌تواند نماینده‌ی میدان الکتریکی باشد. میدان الکتریکی یک تابع برداری با ویژگی **خاصی** است. تابعی است که کرل آن حتما باید صفر باشد. برای نمونه، تابع برداری $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i}$ میدان الکتریکی نمی‌تواند باشد؛ چون $\nabla \times \mathbf{F} = 1\hat{\mathbf{k}} \neq 0$ است. به بیان دیگر، اگر تمام بارهای الکتریکی عالم هم در دسترس ما باشد، نمی‌توان از این بارها آرایه ای ساخت که میدان الکتریکی‌اش $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i}$ باشد.

رابطه‌ی (۴-۵) یا همارز آن، $\nabla \times \mathbf{E} = 0$، به ما اجازه می‌دهد که تابع پتانسیل را به صورت زیر تعریف کنیم

$$V(P) \equiv -\int_{\mathcal{O}}^{P} \vec{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{۵-۲۱}$$

که در آن $\mathcal{O}$ یک نقطه‌ی اختیاری مرجع است. بنابراین، می‌بینیم که V تنها به نقطه P وابسته است. ظاهرا اختلاف پتانسیل میان دو نقطه a و b عبارتست از:

$$V(b) - V(a) = -\int_{\mathcal{O}}^{b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \left(-\int_{\mathcal{O}}^{a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right) = -\int_{\mathcal{O}}^{b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \int_{a}^{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{a}^{b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{۵-۲۲}$$

- **نکته**: در رابطه‌ی (۲۱-۵) توجیهی برای علامت منفی ارائه نشده است. منشاء آن در رابطه(۱۰-۵) است. اگر در میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ یک بار آزمون را از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b جابه‌جا کنیم، تابع عددی پتانسیل مفهوم فیزیکی پیدا می‌کند و علت علامت منفی هم مشخص می‌شود. میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ به بار آزمون Q نیروی $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ وارد می‌کند. این نیرو می‌خواهد بار را از مسیر حرکتش از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b منحرف کند. برای این که بتوانیم بار آزمون را در روی این مسیر نگه داریم، باید **ما** بر علیه میدان کار انجام دهیم. مقدار این کار برابر است با

$$W = -\int_{a}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -Q \int_{a}^{b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q \int_{a}^{b} (\vec{\nabla} V) \cdot d\mathbf{s} = Q\left[V(b) - V(a)\right] \tag{۵-۲۳}$$

پس، علامت منفی به این معنی است که کار را عامل خارجی برای چیره شدن به میدان الکتریکی انجام می‌دهد و نه این که میدان الکتریکی این کار را انجام می‌دهد.

با توجه به رابطه‌ی (۲۳-۵) می‌توان QV را انرژی پتانسیل بار آزمون Q در میدان الکتروستاتیک توضیف کرد. در رابطه‌ی (۲۱-۵) به نقش کلیدی $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ یا مستقل از مسیر بودن انتگرال خط میدان $\mathbf{E}$ توجه کنید. اگر انتگرال خط میدان مستقل از مسیر نمی‌بود، پتانسیل V را نمی‌توانستیم با این رابطه تعریف کنیم؛ چون با عوض شدن مسیر، مقدار $V(P)$ هم تغییر می‌کرد و این رابطه دیگر در قالب تعریف نمی‌گنجید.

در تعریف پتانسیل یک ابهام اساسی وجود دار که اختیاری بودن نقطه مرجع به وجود می‌آورد. تغییر نقطه مرجع معادل افزودن مقدار ثابتی به پتانسیل است؛ اگر مرجع پتانسیل را به جای نقطه $\mathcal{O}$ ، نقطه $\mathcal{O}'$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$V'(P) = -\int_{\mathcal{O}'}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathcal{O}'}^{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathcal{O}}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = K + V(P) \tag{۵-۲۴}$$

که در آن K مقدار انتگرال خط $\mathbf{E}$ از نقطه مرجع $\mathcal{O}$ به نقطه مرجع جدید $\mathcal{O}'$ است. همان گونه که پیش‌تر گفتیم ، افزودن مقدار ثابتی به V در **اختلاف پتانسیل** بین دو نقطه تغییری ایجاد نمی‌کند وداریم

$$V'(b) - V'(a) = \left[K + V(b)\right] - \left[K + V(a)\right] = V(b) - V(a) \tag{۵-۲۵}$$

این واقعیت از رابطه‌ی (۲۲-۵) هم آشکار است، چون اختلاف پتانسیل نستقل از این است که مرجع پتانسیل را در کجا انتخاب کنیم. ابهام در گزینش مرجع روی گرادیان V تاثیر نمی‌گذارد؛ چون گرادیان مقدار ثابت صفر است. بنابراین

$$\nabla V' = \nabla V \tag{۵-۲۶}$$

یعنی همه‌ی توابع V که فقط در یک مقدار ثابت باهم اختلاف دارند، مربوط به یک میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ اند. به این خاطر است که گفتیم پتانسیل کمیت فیزیکی و در نتیجه، قابل اندازه‌گیری نیست؛ چون با جابه‌جا کردن

نقطه‌ی مرجع $\mathcal{O}$ ، می‌توان مقدار دلخواهی به آن افزود یا از آن کاست، بدون این که میدان $\mathbf{E}$ تغییر کند. باز هم تاکید می‌کنم که تنها کمیت با اهمیت مربوط به پتانسیل، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه است و البته همان گونه که رابطه‌ی (۲۲–۵) نشان می‌دهد، مستقل از گزینه‌ی نقطه‌ی مرجع پتانسیل است. با وجود این، در الکتروستاتیک یک مرجع پتانسیل طبیعی وجود دارد. این نقطه‌ی مرجع جایی است که فاصله‌اش از بار بینهایت است. رابطه‌ی (۱۸–۵) به ما می آموزد که اگر در مخرج، $r \to \infty$ (فاصله‌ی بار تا نقطه‌ای که در آن پتانسیل را می‌خواهیم حساب کنیم) آنگاه $V \to 0$. به این دلیل است که معمولا می‌گوییم پتانسیل در بینهایت برابر صفر است و بینهایت را مبداء پتانسیل برمی‌گزینیم. . این قرارداد در یک حالت خاص غیر قابل استفاده است و آن هنگامی است که توزیع بار تا بینهایت ادامه داشته باشد. در چنین شرایطی پتانسیل بینهایت (نامعین) می‌شود. برای مثال ؛ سطح بینهایت گسترده ای را در صفحه‌ی xy در نظر بگیرید که چگالی توزیع بار سطحی σ دارد. پتانسیل ناشی از آن را در فاصله‌ی z از صفحه حساب کنید. میدان صفحه‌ی بینهایت گسترده را در فصل ٤ به دست آوردیم و دیدیم که عبارت است $\mathbf{E} = (\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{k}}$. پس ، اگر در این مورد که توزیع بار تا بینهایت ادامه دارد، مبداء پتانسیل $\mathcal{O}$ را در بینهایت در نظر بگیریم آنگاه پتانسیل در نقطه‌ای به ارتفاع z از صفحه به صورت زیر در می‌آید

$$V(z) = -\int_{\mathcal{O}=\infty}^{z} \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma\, dz = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma\left(Z - \infty\right) = \infty \qquad (۵–۲۷)$$

در این‌گونه موارد، کافی است نقطه‌ی مرجع را در جای دیگری (مانند $z = 0$) انتخاب کنیم. در عمل، البته توزیع باری که تا بینهایت ادامه داشته باشد، وجود ندارد و گزینه‌ی بینهایت برای مبداء پتانسیل دشواری ایجاد نمی‌کند.

نکته‌ی مهم دیگری که به جاست در اینجا آن را یادآوری کنیم، این است که همانند نیرو و میدان الکتریکی، پتانسیل هم از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کند. میدان کل در یک نقطه ار فضا عبارت است از جمع برداری میدان‌های جزء: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \cdots$. اگر پتانسیل این میدان کل در نقطه‌ی P را نسبت به یک مرجع مشترک حساب کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} V(P) &= -\int_{\mathcal{O}}^{P} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathcal{O}}^{P} \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathcal{O}}^{P} \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{s} - \cdots \\ \Rightarrow\quad V(P) &= V_1(P) + V_2(P) + \cdots \end{aligned} \qquad (۵–۲۸)$$

یعنی در نقطه‌ای مانند P ، پتانسیل عبارت است از جمع پتانسیل‌های ناشی از کلیه‌ی بارهای چشمه‌ای.

- **نکته**: به نظر می رسد که به دو صورت می‌توان پتانسیل را حساب کرد: (۱) با استفاده از رابطه‌ی (۱۸–۵) و (۲) با استفاده از رابطه‌ی (۲۱–۵) . در بسیاری از مواقع دانشجویان در انتخاب یکی از این دو شیوه دچار گمراهی می‌شوند. اگر توزیع بار به صورت تابعی از مکان داده شود، رابطه‌ی (۱۸–۵) روش مناسب برای یافتن پتانسیل است. اگر میدان الکتریکی را بشناسیم یا بتوانیم آن را برای توزیع بار به دست به سادگی حساب کنیم (مثلا با استفاده از قانون گوس) آنگاه، استفاده از رابطه‌ی (۲۱–۵) روش مناسب برای محاسبه‌ی پتانسیل است. دو مثال زیر این نکته را روشن می‌کند.

مثال ۲-۵ پتانسیل توزیع بار کروی با استفاده از رابطه‌ی (۲۱-۵): بار کل q در حجم کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل V را در درون و بیرون کره حساب کنید. مبداء پتانسیل را بینهایت فرض کنید. با استفاده از پاسخ، میدان الکتریکی را دوباره حساب کنید.

حل: میدان الکتریکی را در درون و بیرون کره در مثال ۳-٤ فصل ٤ با استفاده از قانون گوس به دست آوردیم :

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a^3}r\,\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r<a\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r>a\end{cases} \tag{۵-۲۹}$$

بنابراین پتانسیل عبارت است از

$$V(r)=-\int_\infty^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \;\Rightarrow$$

$$V(r<a)=-\int_\infty^a\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}\right)dr'-\int_a^r\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^3}r'\right)dr'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a^3}\left(\frac{r^2-a^2}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\quad V(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right)\quad ; \quad r<a \tag{۵-۳۰}$$

$$V(r>a)=-\int_\infty^r\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}\right)dr'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_\infty^r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\quad ; \quad r>a \tag{۵-۳۱}$$

توجه کنید که چون انتگرال مستقل از مسیر است، در محاسبه‌ی بالاف آسان‌تر بود که در راستای شعاع حرکت کنیم. به این خاطر $d\,\mathbf{s}=d\mathbf{r}$ قرار دادیم.

اینک می‌توان دوبار میدان الکتریکی را با استفاده از $\mathbf{E}=-\nabla V$ به دست آورد. برای $r<a$ داریم

$$\nabla V(r<a)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial r}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right)\hat{\mathbf{r}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a}\left(-\frac{2r}{a^2}\right)\hat{\mathbf{r}}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}=-\nabla V=-\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}\hat{\mathbf{r}}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}\hat{\mathbf{r}} \tag{۵-۳۲}$$

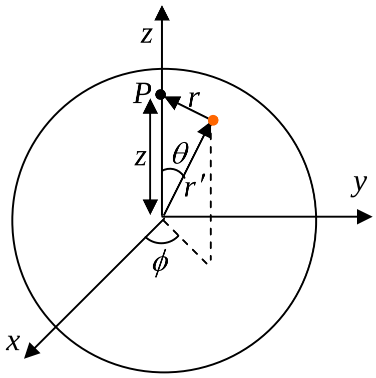
که همان پاسخ (۲۹-۵) است. برای $r>a$ هم داریم

$$\nabla V(r>a)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\;\Rightarrow\;\mathbf{E}=-\nabla V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{۵-۳۳}$$

که باز هم همان پاسخ رابطه‌ی (۲۹-۵) است.

مثال ۳-۵ پتانسیل توزیع بار کروی با استفاده از رابطه‌ی (۱۸-۵): بار کل q در حجم کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل V را در درون کره حساب کنید.

حل: محورهای مختصات را همانند شکل (۲-۵) چنان انتخاب کنید که نقطه‌ای که می‌خواهیم پتانسیل را در



شکل ۲-۵ کره‌ی با توزیع بار حجمی

آن جا حساب کنیم روی محور z باشد. این گزینه از عمومیت مسئله نمی‌کاهد، چون با چرخاندن کره، چیزی تغییر نمی کند. داریم

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(r')}{r} d\tau \tag{۵-۳۴}$$

در این مسئله توزیع بار یکنواخت و بنابراین ρ مقدار ثابتی است. جزء حجم $d\tau$ در مختصات کروی عبارت است از $d\tau = r'^2 \sin\theta dr\, d\theta d\phi$. اندازه‌ی r (فاصله از جزء بار $dq = \rho d\tau$ یا نقطه‌ی P) با توجه به شکل عبارت است از

$$r = \sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z \cos\theta} \tag{۵-۳۵}$$

بنابراین، داریم

$$V = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z \cos\theta}} \tag{۵-۳۶}$$

انتگرال روی حجمی گرفته می‌شود که بار در آن وجود دارد، یعنی حجم کره. بنابراین، این یک انتگرال سه‌گانه است. انتگرال $d\phi$ از صفر تا 2π، انتگرال $d\theta$ از صفر تا π و انتگرال dr' از صفر تا z گرفته می‌شوند.

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \tag{۵-۳۷}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \quad d\theta}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z \cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{r'z}\left(\sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z \cos\theta}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{r'z}\left(\sqrt{z^2 + r'^2 + 2r'z} - \sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z}\right)$$

$$= \frac{1}{r'z}\left(r' + z - |r' - z|\right) = \begin{cases} 2/z & ; \quad r' < z \\ 2/r' & ; \quad r' > z \end{cases} \tag{۵-۳۸}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)(2)\left\{\int_0^z \frac{1}{z} r'^2 dr' + \int_z^a \frac{1}{r'} r'^2 dr'\right\}$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z}\frac{z^3}{3} + \frac{a^2 - z^2}{2}\right\} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(a^2 - \frac{z^2}{3}\right) \tag{۵-۳۹}$$

چون $\rho = q\big/\left(4\pi a^3/4\right)$ است، بنابراین، رابطه‌ی (۳۹-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$V(z) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{3q}{4\pi a^3}\left(a^2 - \frac{z^2}{3}\right) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - z^2/a^2\right) \Rightarrow V(R) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - R^2/a^2\right) \tag{۵-۴۰}$$

که همان رابطه‌ی (۳۰-۵) مثال ۲-۵ است.

مثال ۴-۵ میدان و پتانسیل الکتریکی توزیع بار متغیر: چگالی بار در درون کره‌ای به شعاع a به صورت $\rho = cr'^{\lambda}$ است که در آن λ مقدار ثابتی است. r' فاصله از مرکز کره تا نقطه‌ای در درون آن است. برای این که بار درون کره متناهی باشد، چه شرطی باید برای λ وجود داشته باشد؟ میدان الکتریکی این توزیع بار را بیابید. پتانسیل $V(r)$ را برای همه‌ی مقادیر r برحسب بار Q کره حساب کنید.

- **حل۱ با استفاده از رابطه‌ی** (۲۱-۵) : بار کل کره عبارت است از

$$Q = \int \rho d\tau = \int \left(cr^{\lambda}\right) r^2 \sin\theta dr\, d\theta d\phi = (2)(2\pi)\int_0^a r^2 \left(cr^{\lambda}\right) dr = 4\pi c \frac{a^{\lambda+3}}{\lambda+3} \qquad (۵-۴۱)$$

برای این که Q متناهی باشد باید مخرج کسر مخالف صفر باشد. پس باید شرط $\lambda > -3$ برقرار باشد.

$$Q = 4\pi c \frac{a^{\lambda+3}}{\lambda+3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{(\lambda+3)Q}{4\pi a^{\lambda+3}} \qquad (۵-۴۲)$$

با استفاده از قانون گوس، میدان الکتریکی در درون و بیرون کره عبارت اند از

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int (cr'^2)\left(r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}(2\pi)(2)\int_0^r cr'^{\lambda+2} dr'$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi c \frac{r^{\lambda+3}}{\lambda+3}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi \frac{(\lambda+3)Q}{4\pi a^{\lambda+3}} \frac{r^{\lambda+3}}{\lambda+3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^{\lambda+1}}{a^{\lambda+3}} \quad ; \quad r < a \qquad (۵-۴۳)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad ; \quad r > a \qquad (۵-۴۴)$$

پس، پتانسیل در درون کره عبارت است از

$$V(r<a) = -\int_\infty^a \mathbf{E}_{r>a}\cdot d\mathbf{r} - \int_a^r \mathbf{E}_{r<a}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_\infty^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr - \int_a^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^{\lambda+1}}{a^{\lambda+3}} dr = \left.\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_\infty^a - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^r \frac{r^{\lambda+1}}{a^{\lambda+3}} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^r \frac{r^{\lambda+1}}{a^{\lambda+3}} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\lambda+2}\frac{r^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}} + \frac{1}{\lambda+2}\frac{1}{a}\right]$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\frac{1}{a} - \frac{1}{\lambda+2}\frac{r^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}}\right) \quad ; \quad r < a \qquad (۵-۴۵)$$

(توجه کنید که جهت‌های $d\mathbf{r}$ و $\mathbf{E}$ خلاف یکدیگر اند.) پتانسیل در بیرون کره عبارت است از

$$V(r>a) = -\int_\infty^{r>a} \mathbf{E}_{r>a}\cdot d\mathbf{s} = \int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad ; \quad r > a \qquad (۵-۴۶)$$

- **حل ۲ با استفاده از رابطه‌ی** (۱۸-۵): با توجه به شکل (۲-۵) داریم

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{cr'^{\lambda}}{r}d\tau=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}c\int\frac{r'^{\lambda}}{\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta}}\left(r'^2\sin\theta dr' d\theta d\phi\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}c\left(2\pi\right)\int r'^{\lambda+2}dr'\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta}}d\theta \qquad (۵-۴۷)$$

انتگرال $d\theta$ همانی است که در رابطه‌ی (۵-۳۸) حساب شده است و برابر است با

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta}}d\theta=\begin{cases}2/z & ; \quad r'<z\\ 2/r' & ; \quad r'>z\end{cases} \qquad (۵-۴۸)$$

بنابراین، برای $r<a$ داریم:

$$V=\frac{c}{\varepsilon_0}\left\{\int_0^z\frac{1}{z}r'^{\lambda+2}dr'+\int_z^a\frac{1}{r'}r'^{\lambda+2}\right\}=\frac{c}{\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z}\frac{r'^{\lambda+3}}{\lambda+3}\Big|_0^z+\frac{r'^{\lambda+2}}{\lambda+2}\Big|_z^a\right\}$$

$$=\frac{c}{\varepsilon_0}\left\{\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+3}+\frac{a^{\lambda+2}}{\lambda+2}-\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+2}\right\}=\frac{\left(\lambda+3\right)Q}{4\pi a^{\lambda+3}}\frac{1}{\varepsilon_0}\left\{\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+3}+\frac{a^{\lambda+2}}{\lambda+2}-\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+2}\right\}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+3}+\frac{1}{a}\frac{\lambda+3}{\lambda+2}-\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\frac{z^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}}\right\}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}}\left(1-\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\right)+\frac{1}{a}\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\right\}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{1}{\lambda+2}\left(\frac{z^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}}\right)+\frac{1}{a}\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\right\} \qquad ; \qquad r<a$$

$$\Rightarrow \quad z\to r: \quad V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{1}{\lambda+2}\left(\frac{z^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}}\right)+\frac{1}{a}\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\right\} \qquad ; \qquad r<a \qquad (۵-۴۹)$$

این همان پاسخ حل ۱ در رابطه‌ی (۵-۴۵) است. پتانسیل در بیرون کره ($r>a$) عبارت است از

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{cr'^{\lambda}}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}c\int\frac{r'^{\lambda}}{r}\left(r'^2\sin\theta dr' d\theta d\phi\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c}{r}(2\pi)(2)\int_0^a r'^{\lambda+2}dr'$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(\frac{\left(\lambda+3\right)Q}{4\pi a^{\lambda+3}}\right)\frac{r'^{\lambda+3}}{\lambda+3}\Big|_0^a=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad (۵-۵۰)$$

باز هم با پاسخ در حل ۱ سازگار است.

- **نکته** : همان‌گونه که پیش‌تر گفتیم و مثال های بالا هم نشان می‌دهند و من باید در این جا هم به آن پافشاری کنم، این است که وقتی از رابطه‌ی (۵-۱۸) برای محاسبه‌ی پتانسیل استفاده می‌کنید، انتگرال روی تمام بارها گرفته می‌شود. مهم نیست که پتانسیل را در بیرون ناحیه‌ای که بار قرار دارد حساب می‌کنید یا در درون آن.

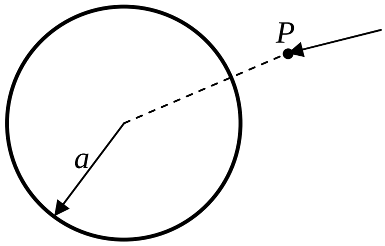
مثال ۵-۵ پتانسیل توزیع بار سطحی روی یک کره: چگالی بار سطحی در روی کره‌ای به شعاع a ، شکل (۵-۳) ، یکنواخت و برابر a است. بار کل روی کره q است. پتانسیل را در درون و بیرون کره به دست

آورید. مبداء پتانسیل را در بینهایت فرض کنید.

حل: میدان الکتریکی در درون و بیرون کره، از قانون گوس قابل محاسبه است. ($q = 4\pi a^2\sigma$) داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r > a \qquad (۵-۵۱)$$

$$\mathbf{E} = 0 \quad ; \quad r < a$$



شکل ۳-۵ پتانسیل سطح کروی باردار

پتانسیل در نقاط بیرون کره عبارت است از

$$V(r) = -\int_\infty^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{q}{r'^2}dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\bigg|_\infty^r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (۵-۵۲)$$

توجه کنید که در این گونه مسئله‌ها حتما از بینهایت (جایی که پتانسیل در آنجا معلوم است) به سوی به نقطه‌ی مورد نظر حرکت کنید .

پتانسیل در ناحیه‌ی درون کره: برای نقاط درون کره ($r < a$) انتگرال را باید به دو بخش تقسیم کنیم؛ چون در حرکت از بینهایت به نقطه‌ای در درون کره، با دو میدان الکتریکی (یکی میدان در بیرون کره و دیگری میدان در درون کره) روبرو می‌شویم. پس

$$V(r < a) = -\int_\infty^{r\le a} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_\infty^a \mathbf{E}_{r>a}\cdot d\mathbf{s} - \int_a^r \mathbf{E}_{r<a}\cdot d\mathbf{s}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^a \frac{q}{r^2}dr - \int_a^r (0)dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\bigg|_\infty^a + 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} \qquad (۵-۵۳)$$

پس، پتانسیل در درون کره مقدار ثابت غیر صفر است. اگرچه میدان در درون کره صفر است، اما پتانسیل صفر نیست.در واقع، از $\mathbf{E} = -\nabla V = 0$ روشن است که پتانسیل باید مقدار ثابتی باشد.

بکوشید این مثال را با استفاده از رابطه‌ی (۱۸-۵) هم به دست آورید.

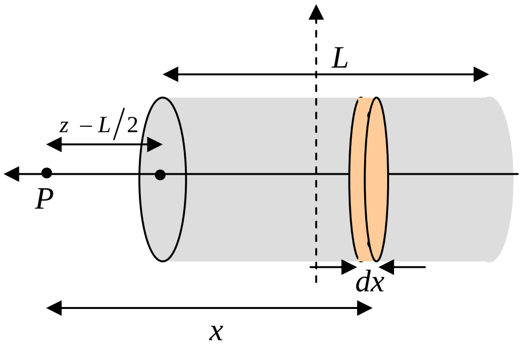
مثال ۶-۵ پتانسیل استوانه‌ی باردار در روی محورش: در مثال ۷-۳ [رابطه‌ی (٦٠-۳)] پتانسیل یک قرص بار دار به شعاع R و چکالی بار سطحی σ را در نقطه‌ای به فاصله‌ی z از مرکز قرص ودر روی محور آن را دست آوردیم:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + z^2} - z\right] \qquad (۵-۵٤)$$

از این نتیجه استفاده کنید و پتانسیل ناشی از استوانه‌ی توپری با چگالی بار حجمی ρ، شعاع قاعده‌ی R وطول L را در فاصله‌ی z از وسط استوانه به دست آورید. میدان الکتریکی را در این نقطه حساب کنید.

حل: استوانه را به برش‌های نازکی به ضخامت dx همانند شکل (٤-۵) تقسیم کنید و با جایگرینی‌های

$z \to x$ و $\sigma \to \rho dx$ در رابطه‌ی (۵−۵٤) پتانسیل حاصل از این برش، dV ، را به دست آورید. با انتگرال گیری از dV آنگاه پتانسیل کل در نقطه‌ی P به دست می‌آید. توجه کنید که جایگزینی نخست روشن است . جایگزینی $\sigma \to \rho dx$ هم پذیرفتنی است، چون اگر dx خیلی کوچک باشد، می‌توان فرض کرد که بار موجود در برش $\rho A dx$ ($A=$ سطح قاعده‌ی برش) با بار موجود در سطح قرص σA برابر می‌شود و در نتیجه $"\sigma" = \rho dx$. پس داریم



شکل ٤−٥ پتانسیل استوانه در روی محور آن

$$V = \int dV = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_{z-L/2}^{z+L/2}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)dx$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left[x\sqrt{R^2+x^2}+R^2\ell n\left(x+\sqrt{R^2+x^2}\right)-x^2\right]_{z-L/2}^{z+L/2}$$

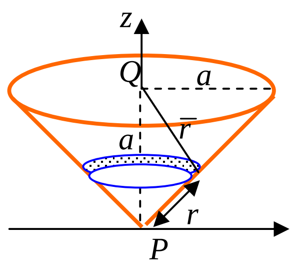
$$= \frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left\{\begin{array}{l}(z+L/2)\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}-(z-L/2)\sqrt{R^2+(z-L/2)^2} \\ +R^2\ell n\left[\dfrac{z+L/2+\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}}{z-L/2+\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}}\right]-2zL\end{array}\right\} \qquad (۵−۵۵)$$

میدان الکتریکی در نقطه‌ی P را با استفاده از $\mathbf{E} = -\nabla V$ به دست می‌آوریم. خوشبختانه پتانسیل فقز تابع یک متغیر، z ، است و بنابراین داریم (پس از اندکی عملیات جبری)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[L-\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}+\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}\right]\hat{\mathbf{k}} \qquad (۵−۵٦)$$

مثال ۷−۵ پتانسیل مخروط: مخروطی را در نظر بگیرید که ارتفاع و شعاع سطح قاعده اش a است. چگالی بار الکتریکی در روی سطح جانبی آن یکنواخت و برابر σ است. پتانسیل الکتریکی را در راس مخروط و در مرکز سطح قاعده‌ی آن حساب کنید. اختلاف پتانسیل این دو نقطه را بیابید.

حل: پتانسیل در راس $P-$ "روبان" باریکی به پهنای dr را در روی سطح جانبی مخروط و به فاصله‌ی z از راس آن در نظر بگیرید، شکل (۵−۵) را ببینید. شعاع این روبان هم z است. جزء بار موجود در روی این روبان $\sigma da = \sigma(2\pi z)dr$ است. با استفاده از رابطه‌ی (۵−۱۸) داریم



شکل ۵−۵ پتانسیل الکتریکی مخروط

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma}{r}da = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma}{r}(2\pi z\, dr) \qquad (۵−۵۷)$$

با توجه به شکل (۵-۵) و این که ارتفاع مخروط و شعاع قاعده‌ی آن باهم برابر اند، نتیجه می‌گیریم

$$r=\sqrt{2}z \quad \Rightarrow \quad dr=\sqrt{2}dz \quad ; \quad z=[0,a] \tag{۵-۵۸}$$

پس، رابطه‌ی (۵-۵۷) با این جایگزینی به صورت زیر در می‌آید

$$V(P)=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r}(z\,dr)=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{2}z}(z)(\sqrt{2}dz)=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a dz=\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \tag{۵-۵۹}$$

پتانسیل در نقطه‌ی Q: هنوز هم همان جزء بار را انتخاب می‌کنیم: روبانی به پهنای dr در فاصله‌ی z از راس مخروط (و بنابراین شعاع حلقه‌ی روبان هم z است.) این بار فاصله‌ی جزء بار (نقاط روی روبان) برابر است با $\bar{r}$:

$$\bar{r}=\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos 45^\circ}=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}z)^2-2(\sqrt{2}z)a\sqrt{2}/2}=\sqrt{a^2+2z^2-2az} \tag{۵-۶۰}$$

بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی (۵-۱۸) داریم

$$V(Q)=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\frac{z\sqrt{2}dz}{\sqrt{a^2+2z^2-2az}}=\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2z^2-2az}\Big|_0^a+\frac{a}{2}\int_0^a\frac{dz}{\sqrt{a^2+2z^2-2az}}\right]$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\varepsilon_0}\left\{\cancel{\sqrt{a^2+2a^2-2a^2}}-\cancel{\sqrt{a^2}}+a\frac{1}{\sqrt{2}}\ell n\left(2\sqrt{2}\sqrt{a^2+2z^2-2az}+4z-2a\right)\Big|_0^a\right\}$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{4\varepsilon_0}\frac{a}{\sqrt{2}}\ell n\left\{\frac{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+2a^2-2a^2}+4a-2a}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2}-2a}\right\}=\frac{\sigma a}{8\varepsilon_0}2\ell n\left\{\frac{2\sqrt{2}a+2a}{2\sqrt{2}a-2a}\right\}$$

$$=\frac{\sigma a}{8\varepsilon_0}2\ell n\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=2\frac{\sigma a}{8\varepsilon_0}\ell n\left\{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}\right\}=2\frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}\ell n\left(1+\sqrt{2}\right) \tag{۵-۶۱}$$

و بنابراین اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی P و Q برابر است با

$$V(P)-V(Q)=\frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}\left[2-2\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)\right]=\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\left(1-\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \tag{۵-۶۲}$$

مثال ۸-۵ پتانسیل بار خطی بینهایت دراز: پتانسیل را در فاصله r از یک سیم راست بینهایت دراز با چگالی بار خطی یکنواخت λ بدست آورید. گرادیان پتانسیل را حساب کنید و درستی پاسختان را بیازمائید.

حل: میدان این آرایه‌ی بار را در مثال ۷-٤ ، رابطه‌ی (٤-٥١) به دست آوردیم و برابر است با

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}\hat{\mathbf{r}} \tag{۵-۶۳}$$

چون آرایه‌ی بار الکتریکی تا (در بینهایت هم بار الکتریکی وجود دارد) نمی‌توان مبداء پتانسیل را در بینهایت پنداشت (گمان نکنید که فقط در یک راستا بار تا بینهایت ادامه دارد و در دیگر جهت‌ها در بینهایت بار وجود ندارد. بینهایت، بینهایت است و یک نقطه بیش نیست). مبداء پتانسیل را در $r=a$ فرض کنید. داریم

$$V(r) = -\int_a^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_a^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\,\ell n\left(r/a\right) \tag{۵–۶۴}$$

از این نتیجه روشن است که چرا $a=\infty$ و $a=0$ گزینه‌های مناسبی برای مبداء پتانسیل نیستند. در این نقاط لگاریتم بینهایت می‌شود و پتانسیل مقدار معینی نیست.

$$\vec{\nabla}V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left[\ell n\left(\frac{r}{a}\right)\right]\hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\frac{1}{r}\hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{E} \tag{۵–۶۵}$$

**** ۴-۵ معادله‌ی پواسن و معادله‌ی لاپلاس**

در بخش ۱–۵ دیدیم که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را می‌توان از گرادیان یک تابع عددی به نام تابع پتانسیل به دست آورد: $\mathbf{E} = -\nabla V$. همچنین می‌دانیم که چون $\mathbf{E}$ یک تابع برداری است، برای محاسبه‌ی آن باید هر دوی دیورژانس و کرل $\mathbf{E}$ آن را بدانیم. قانون گوس در شکل دیفرانسیلی دیورژانس میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را به دست می‌دهد. در بخش ۲–۵ توانستیم نشان دهیم که کرل میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ همواره صفر است و این ویژگی میدان الکتروستاتیکی است. بنابراین، داریم

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla\times\mathbf{E} = 0 \tag{۵–۶۶}$$

این دو رابطه برای به دست آوردن میدان برداری $\mathbf{E}$ لازم و کافی است. اگر این دو رابطه را برحسب تابع پتانسیل V بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla\cdot(-\nabla V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{۵–۶۷}$$

بنابراین، شکل دیفرانسیلی قانون گوس، برحسب پتانسیل به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{۵–۶۸}$$

این رابطه، **معادله‌ی پواسن** است. معادله‌ی پواسن یک معادله‌ی دیفرانسیلی مرتبه‌ی دو پارمشتقی با طرف دوم است. حل آن آسان نیست و به روش‌های به نسبت پیچیده‌ی ریاضی نیاز دارد. اگر این معادله را در ناحیه‌ای که بار وجود ندارد (در جاهایی که از توزیع بار موضعی فاصله دارند و در آن نقاط $\rho = 0$ است) به کار ببریم به صورت ساده‌تری در می‌آید

$$\nabla^2 V = 0 \tag{۵–۶۹}$$

این معادله، **معادله‌ی لاپلاس** است . حل کردن آن در مقایسه با معادله‌ی پواسن آسان‌تر و شناخته شده است.

اگر قانون $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ برحسب پتانسیل بنویسیم، خواهیم داشت

$$\nabla\times\mathbf{E} = \nabla\times(-\nabla V) = -\nabla\times\left(\nabla V\right) \tag{۵–۷۰}$$

و این برابر صفر باشد. اما سمت راست رابطه‌ی (۷۰–۵) **همواره صفر است**؛ چون کرل گرادیان صفر است. در نتیجه، این رابطه هیچ شرط تازه‌ای بر V اعمال نمی‌کند. البته ما از قانون $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ استفاده کردیم و

نشان دادیم که $\mathbf{E}$ را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع عددی نوشت. بنابراین شگفت انگیز نیست که کرل گرادیان V برابر صفر باشد. $\nabla\times\mathbf{E}=0$ به ما اجازه می‌دهد تا میدان الکتریکی را به صورت $\mathbf{E}=-\nabla V$ بنویسیم و این تضمین می‌کند که $\nabla\times\mathbf{E}=0$ باشد. نتیجه آن که: برای یافتن V تنها به یک معادله‌ی دیفرانسیل (معادله‌ی پواسن) نیاز داریم ؛ چون V یکتابع عددی است؛ در حالی که برای یافتن $\mathbf{E}$ به دو معادله‌ی دیفرانسیل ، معدله‌های رابطه‌ی (٦٦-٥) ، کرل و دیورژانس $\mathbf{E}$ ، نیازمندیم.

٥-٥ انرژی الکتروستاتیکی

در فصل ۳ ، بخش۱-۳-۳، انرژی لازم برای آرایش مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای را به دست آوردیم. انرژی لازم برای این که بارهای $q_1,q_2,\cdots,q_i,\cdots$ از بینهایت به مکان‌های $r_1,r_2,\cdots,r_i,\cdots$ بیاوریم در رابطه‌ی (۲۸-۳) داده شده است:

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iV\left(r_i\right) \qquad (٥-٧١)$$

که در آن $V\left(r_i\right)$ پتانسیل ناشی از تمام بارها به جز بار i-ام در مکان بار i-ام است. برای توزیع بار پیوسته کافی است که در رابطه‌ی بالا، علامت جمع را به انتگرال و q_i را با $\rho d\tau$ (برای توزیع حجمی) ، σda (برای توزیع سطحی بار) و یا با λds (برای توزیع خطی) جلیگزین کنیم. بنابراین، رابطه‌ی (٧١-٥) برای توزیع حجمی بار الکتریکی به صورت زیر در می‌آید

$$W=\frac{1}{2}\int\rho V d\tau \qquad (٥-٧٢)$$

این انتگرال روی حجمی گرفته می‌شود که بارهای الکتریکی را در بر دارد؛ همان‌گونه که علامت جمع در رابطه‌ی (٧١-٥) روی همه‌ی بارها بسته شده است. برای توزیع بارهای سطحی و خطی هم داریم

$$W=\frac{1}{2}\int_S\sigma da \quad , \quad W=\frac{1}{2}\int_L\lambda ds \qquad (٥-٧٣)$$

باز هم انتگرال‌ها روی سطح S و خم L محاسبه می‌شوند که بارها در روی آن سطح و خم قرار دارند. رابطه‌ی (٧٢-٥) را می‌توان برحسب میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ بازنویسی کرد. یعنی ρ و V را برحسب $\mathbf{E}$ نوشت. این کار را برای معادله‌های رابطه‌ی (٧٣-٥) هم می‌توان انجام داد. با این کار، انرژی الکتریکی به طور طبیعی به میدان الکتریکی نسبت داده می‌شود و این رویکرد خوبی است. در فصل ٤ دیدیم که میدان الکتریکی تنش ایجاد می‌کند و به ذره‌ی باردار فشار وارد می‌کند. هم‌چنین، بین ذره‌ی باردار و میدان الکتریکی انرژی تبادل می‌شود. اینک به جاست که ببینیم میدان انرژی‌اش را از کجا فراهم می‌کند.

جایگزینی ρ در رابطه‌ی (٧٢-٥) برحسب میدان آسان است. از قانون گوس در شکل دیفرانسیلی آن می‌توان استفاده کرد و نوشت

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E} \qquad (٥-٧٤)$$

پس، رابطه‌ی (٧٢-٥) به صورت زیر در می‌آید

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\nabla\cdot\mathbf{E})V d\tau \qquad (۵-۷۵)$$

برای این که بتوانیم کار را ادامه دهیم، به اتحاد ریاضی زیر نیاز داریم:

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}V) = (\nabla\cdot\mathbf{E})V + \mathbf{E}\cdot(\nabla V) \;\Rightarrow\; (\nabla\cdot\mathbf{E})V = \nabla\cdot(\mathbf{E}V) - \mathbf{E}\cdot(\nabla V) \qquad (۵-۷٦)$$

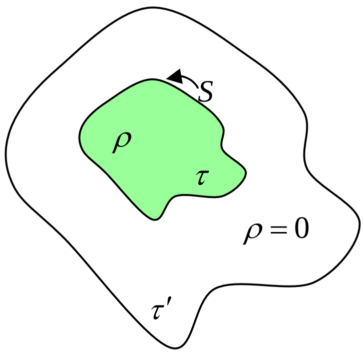
اگر در جمله‌ی آخر سمت راست این معادله قرار دهیم $\mathbf{E} = -\nabla V$، رابطه‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید

$$(\nabla\cdot\mathbf{E})V = \nabla\cdot(\mathbf{E}V) - \mathbf{E}\cdot(\nabla V) = \nabla\cdot(\mathbf{E}V) + E^2 \qquad (۵-۷۷)$$

و در نتیجه، رابطه‌ی (۷۵-۵) را می توان به صورت جمع دو انتگرال نوشت

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_\tau \nabla\cdot(\mathbf{E}V)\, d\tau + \int_\tau E^2 d\tau\right] \qquad (۵-۷۸)$$

این رابطه زشت به نظر می‌آید و اصلا از رابطه‌ای که با آن آغاز کردیم، رابطه‌ی (۷۲-۵) ، ساده‌تر نیست. با وجود این، زیبایی‌های آن به زودی آشکار خواهد شد. هر دوی انتکرال‌های رابطه‌ی بالا روی حجمی گرفته می‌شوند که بار در آن قرار دارد. فرض کنید بار الکتریکی موضعی و محدود به حجم τ در شکل (٦-۵) است. با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس (نگاه کنید به پیوست فصل ٤) انتگرال اول را می‌توان به انتگرال سطح تبدیل کرد.



شکل ٦-۵ سطح و حجم انتگرال گیری

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\oint_S V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} + \int_\tau E^2 d\tau\right) \qquad (۵-۷۹)$$

سطح S سطح بسته‌ای است که مرزهای حجم τ است. از سوی دیگر، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس، انتگرال حجم را به انتگرال سطحی تبدیل کردیم که در آن سطح میدان الکتریکی وجود دارد. اما میدان الکتریکی معمولا به یک حجم خاصی محدود نیست و بنابراین، به سطح S هم محدود نیست (به یاد بیاورید که خطهای میدان یک توزیع بار یا باید به بار دیگری ختم شود و یا تا بینهایت ادامه می‌یابد.) در واقع، انتگرال سطح (انتگرال نخست) در رابطه‌ی (۷۹-۵) باید بر روی سطح بسته‌ای گرفته شود که مرزهای آن در بینهایت قرار دارد. اگر مرزهای سطح S را به بینهایت ببریم (اما بار هنوز در حجم محدود τ جایگزیده است) در فاصله-ی دوری از توزیع بار قرار خواهیم گرفت و برای توزیع بار دلخواهف میدان الکتریکی در فاصله‌های بسیار دور از آن به صورت $1/r^2$ (و یا سریع‌تر) کاهش پیدا می‌کند. پتانسیل V مربوط به آن هم با $1/r$ کاهش می‌یابد. اما سطح S به صورت r^2 افزایش پیدا می‌کند. در نتیجه، انتگرالنده در انتگرال نخست رابطه‌ی (۷۹-۵) به صورت $(1/r^2)(1/r)r^2 = 1/r$ رفتار می‌کند. هنگامی که $r \to \infty$ میل کند، انتگرال اول صفر می‌شود و رابطه‌ی (۷۹-۵) در حد $r \to \infty$ به صورت زیر در می‌آید

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2 d\tau \qquad (۵-۸۰)$$

توجه کنید که گستره‌ی انتگرال‌گیری در این رابطه تمام فضا (تمام عالم) است. چرا؟ چون با بردن مرزهای سطح S به بینهایت، حجم آن را افزایش می‌دهیم. این نتیجه را به گونه‌ی دیگری هم می‌توان بیان کرد: به

رابطه‌ی (۷۲–۵) برگردید. از این رابطه نقطه‌ی آغاز ما بود و انتگرال روی حجمی گرفته شده است که بار را در بر دارد (حجم τ در شکل (٦–۵)) . اما می توان حجم بزرگتری را در نظر گرفت، مانند حجم τ' در شکل (٦–۵). فضای اضافی که با افزایش حجم به وجود می‌آید در مقدار انتگرال رابطه‌ی (۷۲–۵) تغییری به وجود نمی‌آورد؛ چ.ن در این فضای اضافی $\rho = 0$ است. اما در رابطه‌ی (۷۹–۵) انتگرال دوم (انتگرال E^2) فقط می‌تواند افزایش پیدا کند (چون E^2 یک کمیت مثبتی است). اما سمت چپ این رابطه، یعن W مقدار ثابتی است، پس باید انتگرال سطح با افزایش فضا کاهش پیدا کند و بزرگ شدن انتگرال حجم را جربان کند.

با افزایش حجم انتگرال‌گیری به تمام عالم، به ناگزیر، انتگرال سطح به صفر می‌گراید. آنچه باقی می‌ماند رابطه‌ی (۸۰–۵) است.

کمیت $\varepsilon_0 E^2/2$ **چگالی انرژی** الکتروستاتیکی نام دارد.

- **نکته**: شاید استدلال کنید که انتگرالنده‌ی $E^2 d\tau \propto \left(1/r^2\right)^2\left(r^3\right) \propto 1/r$ هم با دور شدن از توزیع بار به صفر میل می‌کند. این سخن نادرستی است؛ چون E^2 یک کمیت مثبتی است. درست است که اندازه‌ی آن با دور شدن از توزیع بار همواره کاهش می‌یابد، اما همواره مثبت باقی می‌ماند.انتگرال E^2 در تمام فضا مانند این است که یک سری نزولی نامنتاهی داشته باشیم که همه‌ی جمله‌هایش مثبت است و بخواهیم جمله-های آن را جمع ببندیم. روشن است که مقدار آن هرگز صفر نمی‌شود.

مثال ۹–۵ انرژی کره‌ای با توزیع بار سطحی: بار کل q در روی سطح کره‌ای به شعاع R بطور یکنواخت توزیع شده است. انرژی این آرایه را به دو روش: (۱) با استفاده از رابطه (۷۳–۵) و (۲) با استفاده از رابطه (۸۰–۵) بدست آورید.

حل (۱) با استفاده از رابطه (۷۳–۵) : پتانسیل روی سطح کره مقدار ثابتی است. از رابطه‌ی (۵۲–۵) داریم

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \tag{۵–۸۱}$$

بنابراین، انرژی عبارت است از

$$W = \frac{1}{2}\int \sigma V\, da = \frac{1}{2}\int_S \sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}da = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}\int \sigma\, da = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R} \tag{۵–۸۲}$$

(۲) با استفاده از رابطه‌ی (۸۰–۵) : تمام عالم به دو ناحیه نقسیم شده است. فضای درون کره ($r<R$) و فضای بیرون کره ($r>R$) . میدان در این دو ناحیه با هم فرق دارند. بنابراین، داریم

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r<R} E^2_{r<R} d\tau + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r>R} E^2_{r>R} d\tau \tag{۵–۸۳}$$

اما میدان در درون کره صفر است ($E_{r<R} = 0$) و در بیرون کره عبارت است از

$$\mathbf{E}_{r>R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad E^2_{r>R} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{q^2}{r^4} \tag{۵–۸۴}$$

پس، رابطه‌ی (۸۳–۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int 0\,d\tau+\frac{\varepsilon_0}{2}\int\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{q^2}{r^4}(r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi)$$
$$=0+\ \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}q^2(4\pi)\int_R^\infty\frac{1}{r^2}dr=\ \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R}\qquad(۵-۸۵)$$

پس، می بینیم که هر دو روش به یک پاسخ می انجامند.

مثال ۱۰-۵ انرژی کره‌ی با بار حجمی : بار q به طور یکنواخت در حجم کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. انرژی این آرایه را به سه روش به دست آورید. **(الف)**: با استفاده از رابطه‌ی (۷۳-۵) ، **(ب)**: با استفاده از رابطه‌ی (۸۰-۵) و **(پ)**: با استفاده از رابطه‌ی (۷۹-۵) . در روش سوم، کره‌ای به شعاع a انتخاب کنید و انتگرال‌ها را برای سطح و حجم آن به دست آورید. اگر $a\to\infty$ چه پیش می‌آید؟

حل: **(الف)** با استفاده از رابطه‌ی (۷۳-۵) . در مثال ۳-۵ ، رابطه‌ی (۴۰-۵) ، پتانسیل کره‌ی با بار حجمی را به دست آوردیم. در این جا از آن استفاده می‌کنیم. داریم

$$W=\frac{1}{2}\int\rho V\,d\tau=\frac{1}{2}\rho\int\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)\right)\left(4\pi r^2dr\right)$$
$$=\frac{1}{2}\rho\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2R}\int_0^R\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)4\pi r^2dr=\frac{q\rho}{4\varepsilon_0R}\left[3\frac{r^3}{3}-\frac{1}{R^2}\frac{r^5}{5}\right]\Bigg|_0^R$$
$$=\frac{q\rho}{4\varepsilon_0R}\left(R^3-\frac{R^3}{5}\right)=\frac{\rho q}{5\varepsilon_0}R^2=\frac{q}{5\varepsilon_0}R^2\left(\frac{q}{(4/3)\pi R^3}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{5}\frac{q^2}{R}\right)\qquad(۵-۸۶)$$

(ب) : با استفاده از رابطه‌ی (۸۰-۵) . بار هم ، همانند مثال پیش، تمام فضا به دو ناحیه تقسیم شده است، درون کره ($r<R$) و بیرون کره ($r>R$) . میدان الکتریکی در این دو ناحیه در فصل ۴، مثال ۳-۴ و رابطه‌های (۳۰-۴) و (۳۲-۴) ، حساب شدند:

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & ;\quad r>R\\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^2}r\,\hat{\mathbf{r}} & ;\quad r<R\end{cases}\qquad(۵-۸۷)$$

بنابراین، از رابطه‌ی (۸۰-۵) داریم

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2d\tau=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2q^2\left\{\int_0^R\left(\frac{r}{R^3}\right)^2\left(4\pi r^2dr\right)+\int_R^\infty\frac{1}{r^4}\left(4\pi r^2dr\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2}\left\{\frac{1}{R^6}\left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^R+\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty\right\}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{5R}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{q^2}{R}\qquad(۵-۸۸)$$

که همان پاسخ بخش (الف) است.

(**پ**) با استفاده از رابطه‌ی (۷۹-۵) : داریم

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\oint_S V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} + \int_\tau E^2 d\tau\right) \qquad (۵-۷۹)$$

در این رابطه حجم τ هر حجم دلخواهی است که توزیع بار را در بر دارد. اجازه دهید کره‌ای به شعاع $a > R$ را برگزینیم. در این صورت $V = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$ و داریم

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\oint_S V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} + \int_\tau E^2 d\tau\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{S:r=a}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi \\ \displaystyle +\int_0^R E_{r<R}^2 d\tau + \int_R^a\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2\left(4\pi r^2 dr\right)\end{array}\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{4\pi}{a} + \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{4\pi}{5R} + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi q^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^a\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2}\left\{\frac{1}{a} + \frac{1}{5R} - \frac{1}{a} + \frac{1}{R}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{q^2}{R} \qquad (۵-۸۹)$$

باز هم پاسخ با پاسخ‌هایی که با دو روش پیشین به دست آمد، یکسان است. در حد $a \to \infty$ سهم انتگرال سطح، $(1/4\pi\varepsilon_0)(q^2/a)$ ، به صفر میل می‌کند اما ، سهم انتگرال حجم بزرگ می‌شود.

- **نکته**: در فصل ٤ ، پس از رابطه‌ی (۱۱۲-٤) گفتیم که در یک رسانا، بارهای اضافی در سطح آن جمع می‌شوند. در آنجا گفتیم که یک چنیم آرایش بار انرژی رسانا را کمینه می‌کند. از مثال‌های (۹-۵) و (۱۰-۵) پیداست که اگر بار q در سطح کره توزیع شود انرژی‌اش کمتر از حالتی است که همین مقدار بار در حجم همان کره توزیع شود.

مثال ۱۱-۵ انرژی توزیع بار نا یکنواخت: توزیع بار حجمی در کره‌ای به شعاع R به صورت $\rho(r) = kr$ است. k مقدار ثابتی است. انرژی این آرایه را به دو روش، با استفاده از رابطه‌ی(۷۲-۵) و رابطه‌ی (۸۰-۵) حساب کنید.

حل از قانون گوس نخست میدان الکتریکی را در درون و بیرون کره حساب می‌کنیم. داریم

$$\varepsilon_0\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \varepsilon_0 4\pi r^2 E = q_{enc} = \int\rho\, d\tau = \int(kr')r'^2\theta\, dr'\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_0 4\pi r^2 E = 4\pi k\int_0^r r'^3 dr' = \begin{cases}\pi k r^4 & ; \quad r < R \\ \pi k R^4 & ; \quad r > R\end{cases} \qquad (۵-۹۰)$$

بنابراین، میدان در درون و بیرون کره عبارت اند از

$$\mathbf{E}_{r<R} = \frac{k}{4\varepsilon_0}r^2\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r < R \qquad , \qquad \mathbf{E}_{r>R} = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r > R \qquad (۵-۹۱)$$

(الف): با استفاده از رابطه‌ی (۸۰-۵):

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int E_{r<R}^2 d\tau + \int E_{r>R}^2 d\tau\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R \left(\frac{kr^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty \left(\frac{kR^4}{4\pi\varepsilon 0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= 4\pi\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{k}{4\varepsilon_0}\right)^2 \left\{\int_0^R r^6 dr + R^8\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr\right\}$$

$$= \frac{\pi k^2}{8\varepsilon_0}\left\{\frac{R^7}{7} + R^8\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^\infty\right\} = \frac{\pi k^2}{8\varepsilon_0}\left(\frac{R^7}{7} + R^7\right) = \frac{\pi k^2 R^7}{7\varepsilon_0} \tag{۵-۹۲}$$

(ب) استفاده از رابطه‌ی (۷۳-۵) : نخست باید پتانسیل را برای ناحیه‌ی $r<R$ حساب کنیم. این کار ساده است:

$$V(r<R) = -\int_\infty^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_\infty^R \left(\frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r'^2}\right)dr' - \int_R^r \left(\frac{kr'^2}{4\varepsilon_0}\right)dr' = -\frac{k}{4\varepsilon_0}\left\{R^4\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_\infty^R + \frac{r^3}{3}\Big|_R^r\right\}$$

$$= -\frac{k}{4\varepsilon_0}\left(-R^3 + \frac{r^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{k}{3\varepsilon_0}\left(R^3 - \frac{r^3}{4}\right) \tag{۵-۹۳}$$

پس:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^R (kr)\left[\frac{k}{3\varepsilon_0}(R^3 - \frac{r^3}{4})\right]4\pi r^2 dr = \frac{2\pi k^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R (R^3 r^3 - \frac{1}{4}r^6)dr$$

$$= \frac{2\pi k^2}{3\varepsilon_0}\left\{R^3\frac{R^4}{4} - \frac{1}{4}\frac{R^7}{7}\right\} = \frac{\pi K^2 R^7}{6\varepsilon_0}\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{\pi k^2 R^7}{7\varepsilon_0} \tag{۵-۹۴}$$

باز هم پاسخ‌های دو روش باهم سازگارند.

۶-۵ یک کاربرد عملی: شکافت هسته‌ای

در این بخش می خواهیم با استفاده از مثال (۱۰-۵) انرژی گداخت هسته‌ای را تخمین بزنیم. در مثال (۱۰-۵) انرژی توزیع بار در درون یک کره را حساب کردیم. نخست گفتار کوتاهی در باره‌ی شکافت هسته‌ای و فیزیک هسته‌ای.

هسته‌ی اتم سنگین Z پروتون و N نوترون دارد. در هسته‌های سنگین تعداد نوترون‌بیش از تعداد پروتون است. شعاع هسته به تقریب برابر است با

$$R = \left(1.2\times 10^{-15}\right)A^{1/3} \quad \text{m} \tag{۵-۹۵}$$

که در آن $A = Z + N$ عدد اتمی است. رابطه‌ی بالا می‌گوید که حجم هسته با تعداد نوکلیون (نوکلیون نام عمومی برای پرون و نوترون است) های هسته متناسب است. بنابراین، چگالی هسته برای همه‌ی هسته‌ها یکسان است. چون پروتون‌ها یکدیگر را می‌رانند، باید **نیروی ربایشی هسته‌ای** وجود داشته باشد که بر این

رانش چیره شود و هسته را از متلاشی شدن حفظ کند. این نیرو برای نوترون و پروتون یکسان است و برد کوتاهی در حدود 10^{-15} m دارد. یکی از پی‌آمدهای کوتاه‌برد بودن این نیرو و ثابت بودن چگالی هسته برای همه‌ی هسته‌ها این است که انرژی پتانسیل نیروی هسته‌ای، U_N ، به تنهایی با عدد اتمی A به تقریب متناسب است. برعکس، انرژی الکتروستاتیکی هسته، بنا به نتیجه‌ی مثال (۱۰–۵) برابر است با

$$U_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{q^2}{R} = \frac{3}{5}\left(\frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right) \tag{۵–۹۶}$$

و با مربع Z افزایش می‌یابد. e بار الکترون یا پروتون است. چون ، بخش برهم‌کنشی انرژی الکتروستاتیک (انرژی پتانسیل رانشی بین پروتون‌ها) مورد توجه ماست، باید جمله‌ای که متناسب با Ze^2 ار رابطه‌ی (۹۶–۵) کم کنیم. این جمله به خود–انرژی Z پروتون مربوط است (نگاه کنید به بخش بعدی ، بخش ۷–۵). پس، داریم

$$U_E = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{۵–۹۷}$$

این انرژی برای هسته‌ای که فقط یک پروتون دارد، صفر است. توجه کنید که $Z(Z-1)/2$ تعداد جفت پرتون‌های هسته است.

اگر نوترون کُند (نوترون گرمایی) به وسیله‌ی هسته‌ی اورانیوم به دام بیفتد، هسته‌ی اورانیوم ناپایدار می-شود و به دو هسته‌ی با اندازه‌های به فقریب یکسان شکافته می‌شود. چون در این واکنش، عدد اتمی کل پایسته می‌ماند، تغییر چندانی در انرژی هسته‌ای U_N به وجود نمی‌آید. اما انرژی الکتروستاتیک فراورده‌های هسته‌ای کمتر از انرژی الکتروستاتیک اولیه می‌شود؛ چون شکافت هسته‌ای بارهای همنام را در این واکنش از هم جدا می‌کند. انرژی الکتروستاتیک آزاد می‌شود و به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود.

برای این که انرژی آزاد شده را تخمین بزنیم، انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی را برای هسته‌ی اورانیوم حساب می‌کنیم. در هسته‌ی اورانیوم $Z = 92$ و $A = 235$ اند. با استفاده از رابطه‌ی (۹۷–۵) داریم

$$U_E\left({}^{92}U_{235}\right) = \frac{(3/5)(92)\left(1.6\times10^{-19}\right)^2}{\left(9\times10^9\right)^{-1}\left(1.2\times10^{-15}\right)(235)^{1/3}}\,\mathrm{J} \approx 10^9\ \mathrm{eV} \tag{۵–۹۸}$$

در گام آخر، یکای انرژی را از ژول به الکترون ولت تبدیل کردیم ($1\mathrm{eV} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$). دو پاره‌شکافت واکنش، به تقریب هر یک نیمی از Z و A اولیه را حمل می‌کنند و انرژی الکتروستاتیکی آنها برابر است با U_E (پاره‌شکافت ها) $= 0.6\times10^9$ eV و در نتیجه ، انرژی آزاد شده عبارت است از

$$\Delta U_E = U_E\left({}^{92}U_{235}\right) - U_E\left(\mathrm{Fragments}\right) \approx 0.4\times10^9\ \mathrm{eV} \tag{۵–۹۹}$$

این تخمین دست‌بالا است؛ چون نوکلیون‌هیی که در سطح هسته قرار دارند به اندازه‌ی نوکلیون‌هایی که در فضای درونی هسته قرار دارند در برهم‌کنش الکتروستاتیکی شرکت نمیکنند. مانند هر شاره‌ی دیگری، این ویژگی به انرژی در واحد سطح می‌انجامد که انرژی **کشش سطحی** نام دارد. در واکنش شکافت هسته‌ای، حجم ماده‌ی هسته‌ای تغییر نمی‌کند، اما کشش سطجی افزایش پیدا می‌کند. تغییر کشش سطحی در اثر شکافت، حدود نصف انرژی الکتروستاتیکی است. بنابراین، انرژی خالص آزاد شده که به طور تجربی اندازه

گرفته شده است، برابر است با

$$\Delta U \approx 0.2\times10^9 \ \text{eV} \qquad (۵-۱۰۰)$$

بنابراین، در هر شکافت هسته‌ای انرژی آزاد شده حدود 10^8 برابر انرژی واکنش شیمیایی (مانند سوزاندن چوب و نفت و ...) است

۵-۷ نکاتی پیرامون انرژی الکتروستاتیکی

- بنا به رابطه (۸۰-۵) انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار ساکن، همواره کمیتی **مثبت** است. این رابطه را ما از رابطه‌ی (۷۲-۵) به دست آوردیم. از مثال‌های ۹-۵ تا ۱۱-۵ دیده می‌شود که هر دو به یک پاسخ می‌انجامند. اما هیچ شرطی در رابطه (۷۲-۵) وجود ندارد که مثبت بودن نتیجه را تضمین کند. در واقع، پاسخ انتگرال در رابطه‌ی (۷۲-۵) می‌تواند مثبت یا منفی باشد (برای مثال انرژی آرایه‌ای از دو بار مساوی اما باا علامت‌های مخالف که در فاصله‌ی r از هیکدیگر قرار دارند بنا به رابطه‌ی (۷۲-۵) ،یا همزاد آن برای بارهای گسسته ، رابطه‌ی (۷۱-۵) برابر است با $\left(-q^2/4\pi\varepsilon_0 r\right) < 0$ که مقداری منفی است. این ناسازگاری از کجا ناشی شده است؟ کدام یک از این دو رابطه درست است؟ واقعیت این است که هر دو رابطه درست است ولی توجیه فیزیکی آن‌ها متفاوت است. در رابطه‌ی (۷۲-۵) کار لازم برای کنار هم چیدن بارها حساب شده است. این که بارها چگونه تولید شده اند وبرای تولید آن‌ها چه مقدار انرژی هزینه شده است، به حساب نیامده است. کار لازم برای خلق بار نقطه‌ای **خود ـ انرژی** نامیده می‌شود. ما بارهای نقطه‌ای را در اختیار داشتیم ، آنها را از بینهایت به مکان‌های مورد نظر آوردیم وکار لازم برای کنار هم چیدن آنها را حساب کردیم.

بنا به رابطه‌ی (۸۰-۵) خود- انرژی یک بار نقطه‌ای بینهایت است، چون میدان بار نقطه‌ای q برابر است با $\mathbf{E} = \left(q/4\pi\varepsilon_0 r^2\right)\hat{\mathbf{r}}$ و در نتیجه، انرژی آن عبارت است از

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \int_\infty \frac{q^2}{r^4}\left(r^2 \sin\theta dr\, d\theta d\phi\right) \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_0^\infty = \infty \end{aligned} \qquad (۵-۱۰۱)$$

محاسبه‌ی خود- انرژی بار نقطه‌ای به راستی باید به طور کوانتومی انجام بگیرد. نتیجه‌ی بالا به طور کلاسیکی به دست آمده است. با وجود این، محاسبه‌ی الکترودینامیک کوانتومی خود- انرژی بار نقطه‌ای مقدار بینهایت را به دست می‌دهد. یک راه فرار از این فاجعه این است که بگوییم بار الکتریکی نقطه‌ای وجود ندارد. اما تا جایی که می‌دانیم و می‌توانیم ابعاد کوچک‌تر را بکاویم، اگر الکترون بُعد هم داشته باشد، کمتر از 10^{-18} m است. الکترون بار نقطه‌ای است. هرگز ساختاری برای الکترون دیده نشده است. این که چگونه الکترون، خود- انرژی‌اش را به صورت جرم، متناهی نگه می‌دارد، رازی ناگشوده است. یکی از ره‌یافت‌هایی که برای این راز پیشنهاد شده است، این است که انرژی $+\infty$ الکتروستاتیکی الکترون با یک انرژی $-\infty$

گرانشی حذف می‌شود. برخی پژوهش‌های نطری از این دیدگاه پشتیبانی می‌کند، اما درک ما از مسئله‌ی خود- انرژی در حدی نیست که به نتیجه‌ی معتبری دست بیابیم.

خوش‌بختانه، در عمل چندان نگران این مسئله نیستیم، چون خود- انرژی در رابطه‌ی (۵-۱۰۱) مقدار ثابت (البته بینهایت) افزودنی به انرژی است و می‌توان آن را نادیده گرفت. می‌توانید به این موضوع این گونه بیندیشید که یک انرژی زمینه‌ی بینهایت دارد و همه چیز بر روی این تشک نرم انرژی قرار دارد. آن بخش از انرژی برای ما اهمیت دارد که با تغییر مکان بارها، تغییر می‌کند.

فرض کنید بار q در مبداء مختصات و بار q' در مکان $\mathbf{r}'$ قرار دارند. میدان الکتریکی این آرایه‌ی بارها در نقطه‌ای به فاصله‌ی $\mathbf{r}$ از مبداء عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\mathbf{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{۵-۱۰۲}$$

چگالی انرژی انرژی این بارها برابر است با

$$\frac{\varepsilon_0}{2}E^2=\frac{1}{8\pi}\left[\frac{q^2}{r^4}+\frac{q'^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^4}+2qq'\frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] \tag{۵-۱۰۳}$$

بنابراین، انرژی شامانه عبارت است از انتگرال رابطه‌ی بالا روی تمام فضا:

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\frac{q^2}{r^4}d\tau+\frac{1}{8\pi}\int\frac{q'^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^4}d\tau+\frac{2qq'}{8\pi}\int\frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\tau \tag{۵-۱۰۴}$$

جمله‌ی اول سمت راست انرژی الکتروستاتیکی بار نقطه‌ای منزوی q است؛ یعنی خود- انرژی بار q و همان گونه که دیدیم بینهایت است. جمله‌ی دوم، خود- انرژی بار نقطه‌ای q' است. فقط جمله‌س سوم است که به مکان بارها بستگی دارد. بنابراین، می توان نوشت

$$W=C+qq'\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\tau=C+\frac{qq'}{r'} \tag{۵-۱۰۵}$$

که در آن C مقدار ثابت افزودنی مربوط به خود- انرژی بارهاست.

نکته‌ی دیگری که اشاره به آن شاید جالب باشد، اینست که هرگز الکترون (یا بار الکتریکی نقطه‌ای) لخت نمی‌توان داشت! الکترون همواره به همراه میدان الکتریکی خود است. میدان الکتریکی الکترون، آن را در خود می‌پوشاند. این میدان همراه در واژگان نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی معادل بینهایت جفت الکترون- پاد الکترون (پوزیترون) است.

برگردیم به ناسازه‌ی ظاهری بین رابطه‌های (۵-۷۲) و (۵-۸۰): این تناقض ظاهری چگونه در محاسبه‌های ما خزیده است و از کجا ناشی می‌شود؟ تناقض در گذار از رابطه‌ی (۵-۷۱) به رابطه‌ی (۵-۷۲) به درون بحث خزید. در رابطه (۵-۷۱) پتانسیل $V(P_i)$ پتانسیل حاصل از تمام بارها به جز بار q_i است در حالی که در رابطه (۵-۷۲) پتانسیل $V(P)$ پتانسیل ناشی از **همه‌ی بارها** است، چون برای توزیع پیوسته بار یک چنین تمایزی وجود ندارد. مقدار بار درست در نقطه‌ی P به سمت صفر میل می‌کند و سهم آن در پتانسیل صفر است.

- رابطه‌های (۷۲–۵) و (۸۰–۵) دو روش برای محاسبه‌ی یک چیز اند. اولی یک انتگرال‌گیری روی توزیع بار است و دومی یک انتگرال‌گیری روی میدان الکتریکی است. حدود انتگرال‌گیری در دو حالت می‌تواند ناحیه‌های کاملاً متفاوتی باشند. در مثال ۹–۵ بار الکتریکی به سطح کره محدود است، در حالی که میدان الکتریکی در تمام فضای بیرون این سطح حضور دارد. بنابراین از دید رابطه (۷۲–۵) انرژی در خود بارها (سطح کره) ذخیره شده است. اما از دید رابطه (۸۰–۵)، انرژی در میدان ذخیره شده است. به راستی انرژی در کجاست؟ سطح این کتاب مجال بحث کردن درباره‌ی این پرسش را به ما نمی‌دهد. در چارچوب نظریه‌ی تابش و نیز نظریه‌ی نسبیت عام، به جاست که بگوئیم انرژی در **میدان** ذخیره شده است و چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی برابر است با

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \equiv T^{00} \qquad (۵–۱۰۶)$$

در الکتروستاتیک، همچنین می‌توان گفت که انرژی با چگالی $\rho V/2$ در **خود بار** الکتریکی ذخیره شده است. در رابطه‌ی (۱۰۶–۵) نماد T^{00} را برای چگالی انرژی **میدان** به کار بردیم. در این کتاب به آن نخواهیم پرداخت. اما در کتاب‌هایی که الکترودینامیک را در سطحی پیش‌رفته بررسی می‌کنند، از تانسور انرژی–تکانه $T^{\mu\nu}$ نام برده می‌شود. چگالی انرژی T^{00} یک مولفه‌ی این تانسور است.

- انرژی الکتروستاتیک بر حسب مجذور میدان الکتریکی است و بنابراین، از اصل برنهش پیروی نمی‌کند . یعنی انرژی یک سامانه ی ترکیبی، مجموع انرژی عناصر آن نیست

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2)^2 d\tau \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\mathbf{E}_1^2+\mathbf{E}_2{}^2+2\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2)\,d\tau = W_1+W_2+\varepsilon_0\int \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2 d\tau \end{aligned} \qquad (۵–۱۰۷)$$

معنی این حرف این است که برای مثال، اگر در همه جا بارهای الکتریکی را دو برابر بکنیم، انرژی کل چهار برابر نمی‌شود.

۸–۵ شرایط مرزی الکتروستاتیکی

۱–۸–۵ شرایط مرزی میدان الکتریکی

در مسئله‌های الکتروستاتیک، معمولا توزیع بارهای چشمه، ρ، داده می‌شود و میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را باید محاسبه کرد. اگر توزیع بار تقارن داشته باشد، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را می‌توان از شکل انتگرالی قانون گوس به دست آورد. اگر مسئله تقارن نداشته باشد، بهتر است نخست پتانسیل V را با استفاده از رابطه‌ی (۱۸–۵) به دست آورد و سپس میدان را از $\mathbf{E} = -\nabla V$ حساب کرد.

در الکتروستاتیک سه کمیت بنیادی وجود دارد که عبارتند از چگالی بار ρ، پتانسیل V و میدان الکتریکی $\mathbf{E}$. این یه کمیت به یکدیگر مربوط اند. ارتباط بیان آن‌ها را ما با پذیرش دو اصل (۱) اصل برهم‌نهی و (۲) قانون کولمب به دست آوردیم. در واقع، چیر تازه‌ای به جز این دو اصل در پروراندن مصالب این کتاب تا اینجا در آن نخزیده است. درست است که برخی روش‌های محاسباتی را هم آموختیم، اما این همه فقط بر این دو اصل استوار اند. با وام گرفتن از دیوید گرفیتس در کتاب

ارتباط David J.Griffiths,"Introduction To Electrodynamics" 2nd Ed., Prentice Hall, 1989.
بین این سه کمیت بنیادی را می‌توان در شکل زیر خلاصه کرد. این شکل همه‌ی آموخته‌های ما تا این‌جا را در بر دارد.

هم‌چنین، بارها مشاهده کردیم که در گذار از یک سطح باردار میدان الکتریکی گششته است (برای نمونه، نگاه کنید به بخش‌های ۲–۶–٤ و ٤–٦–٤). در درون کره‌ای به شعاع a با چگالی بار سطحی σ میدان الکتریکی صفر و در بیرون آن $\left(q/4\pi\varepsilon_0 r^2\right)\hat{\mathbf{r}} = \left(a^2\sigma/\varepsilon_0 r^2\right)\hat{\mathbf{r}}$ است. اگر از بیرون، یعنی از سوی $r > a$ به سطح کره نزدیک شویم،در $r = a$ میدان الکتریکی $\mathbf{E}_{r=a} = \left(\sigma/\varepsilon_0\right)\hat{\mathbf{r}}$ می‌شود. اما اگر از درون بهشوی سطح نزدیک شویم، میدان کماکان صفر باقی می‌ماند. یعنی حد بالا و حد پایین میدان الکتریکی در روی سطح باردار باهم برابر نیست. در روی سطح باردار میدان الکتریکی ناپیوسته است. نمونه‌ی دیگری از گسسته بودن میدان الکتریکی، میدان یک سطح باردار بینهایت گسترده است. میدان درست در بالای سطح $(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{n}}$ و درست در زیر سطح $(-\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{n}}$ است ($\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح و به سوی بیرون سطح است) . در هر دو نمونه، اختلاف اندازه‌ی میدان در دو سوی سطح باردار برابر است با $\Delta E = \sigma/\varepsilon_0$.
این وضعیت برای کره‌ای که بار در حجم آن توزیع شده است پیش نمی‌آید. همانطور که دیدیم، میدان در بیرون و در درون کره‌ای به شعاع a و با چگالی بار حجمی ρ عبارت است از

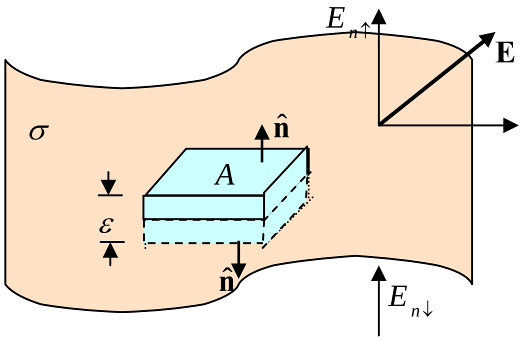
$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r < a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r > a \end{cases} \qquad (٥–١٠٨)$$

اگر r از سمت $r > a$ به a میل کند میدان الکتریکی به $\left(\rho a/3\varepsilon_0\right)\hat{\mathbf{r}}$ میل می‌کند. اگر r از سمت $r < a$ به a میل کند بازهم میدان الکتریکی به $\left(\rho a/3\varepsilon_0\right)\hat{\mathbf{r}}$ میل می‌کند. پس، در این جا هنگام گذار از درون کره به بیرون آن میدان گسستگی ندارد و حدهای بالا و پایین میدان الکتریکی در $r = a$ باهم برابر اند. این گونه هم باید باشد، چون سطح کره بار ندارد و همه‌ی بار آن به حجم کره محدود است.
یافتن اندازه‌ی گسستگی میدان الکتریکی در گدار از سطح باردار دشوار نیست. سطحی را در نظر بکیرید که چگالی بار سطحی آن σ است. همانند شکل (٥–٨) سطح گوسی به صورت قوطی کبریت رسم کنید که نیمی از آن در بالای سطح باردار و نیم دیگرش در زیر سطح باشد. به این ترتیب، سطح گوس بخشی از سطح باردار در درون سطح گوس قرار می‌گیرد. چون فقط به اندازه‌ی میدان درست در بالا و درست در زیر سطح باردار علاقمندیم، ارتفاع ε سطح گوس (قوطی کبریت) را خیلی کوچک فرض می‌کنیم. از قانون گوس داریم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}q_{enc} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A \qquad (٥–١٠٩)$$

که در آن A مساحت رویه‌ی قوطی کبریت است (توجه کنید که اگر σ از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر کند یا سطح باردار یک صفحه‌ی خمیده مانند سطح کره، باشد باید A را خیلی کوچک انتخاب کنیم.)

انتکرال سمت چپ در رابطه‌ی (۵–۱۰۹) شار گذرنده از سطح گوس است. به ازای $\varepsilon \to 0$ از سطح جانی قوطی گبریت شار نمی‌گذرد(سطح جانبی هم به صفر میل می‌کند). مولفه‌ی عمودی میدان درست در بالای سطح هم باردار ، $E_{n\uparrow}$ و هم درست در زیر سطح باردار، $E_{n\downarrow}$ رو به بالاست. بنابراین، شار فقط از رویه های بالا و رویه های پایین سطح گوس می‌گذرد. در شکل (۵–۸) بردارهای یکه‌ی عمود برسطح بالا و پایین قوطی کبریت نشان داده شده‌اند. بنابراین



شکل ۵–۸ سطح کوس و مولفه‌ی عمودی میدان **E**

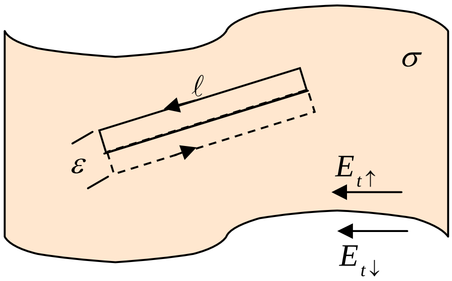
شار گذرنده از سطح گوس عبارت است از

$$E_{n\uparrow}A - E_{n\downarrow}A = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A \quad \Rightarrow \quad E_{n\uparrow} - E_{n\downarrow} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \qquad (۵–۱۱۰)$$

پس، دیده می‌شود که هنگام گذار از سطج باردار، مولفه‌ی عمودی میدان الکتریکی **E** به اندازه‌ی σ/ε_0 نا پیوسته است.

مولفه‌ی مماسی میدان الکتریکی، اما، پیوسته است. یعنی مولفه‌ی مماسی میدان درست در بالای سطح باردار، $E_{t\uparrow}$ ، و درست در زیر سطح باردار، $E_{t\downarrow}$ پیوسته است و از هیچ گونه گسستگی رنج نمی‌برد. برای اثبات آن انتگرال خط میدان را روی مسیر بسته‌ی مستطیل شکل (۵–۹) حساب می‌کنیم. مستطیل مسیر را چنان انتخاب کنید که نیمی از آن بالای سطح و نیم دیگرش در زیر سطح باردار قرار گیرد. فرض کنید، طول مستطیل ℓ و پهنای آن ε است. باز هم، چون فقط درست به بالا و درست به پایین سطح علاقمندیم، اجازه می‌دهیم که $\varepsilon \to 0$ میل کند. داریم

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0 &= \int E_{t\uparrow}ds + \int E_{t\downarrow}ds \\ &= \left(E_{t\uparrow}\ell\right) - \left(E_{t\downarrow}\ell\right) \\ &= \left(E_{t\uparrow} - E_{t\downarrow}\right)\ell \\ &\Rightarrow E_{t\uparrow} = E_{t\downarrow} \qquad (۵–۱۱۱)\end{aligned}$$



شکل ۵–۹ مولفه‌ی مماسی میدان و مسیر انتگرال خط میدان

توجه کنید که پنهاهای مستطیل سهمی در انتگرال بسته ندارند؛ چون $\varepsilon \to 0$. رابطه‌ی (۵–۱۱۱) نشان می‌دهد که مولفه‌ی مماسی میدان درست در بالای سطح باردار و درست در زیر آن باهم برابر اند و گششتگی ندارد.

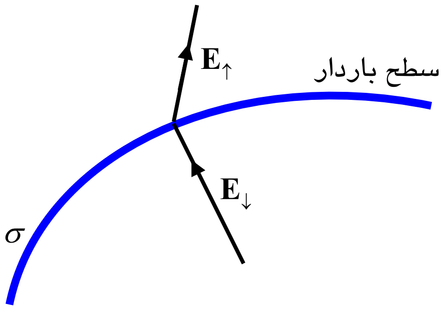
رابطه‌های (۵–۱۱۰) و (۵–۱۱۱) را در یک معادله خلاصه کرد و برای میدان کل **E** نوشت:

$$\mathbf{E}_{\uparrow}-\mathbf{E}_{\downarrow}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \qquad (٥-١١٢)$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح باردار است و مولفه‌ی عمودی میدان را بر می‌گزیند ببینید).

رابطه‌ی (٥-١١٢) نشان می‌دهد که وقتی از یک سطح باردار می‌گذریم ، خطهای میدان الکتریک $\mathbf{E}$ شکسته می‌شوند و جهت میدان الکتریکی در یک سوی سطح باردار با جهت میدان در سوی دیگر آن متفاوت اند (شکل ٥-١٠ را ببینید.)

نا پیوستگی میدان سبب می‌شود که میدان به سطح باردار فشار وارد کند. این موضوع را در فصل ٤ بررسی کردیم و در این جا تکرار نمی‌کنیم.

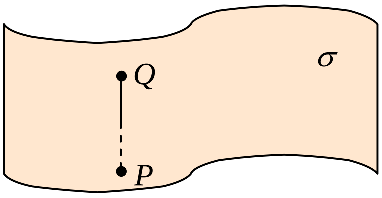


شکل ٥-١٠ شکست میدان الکتریکی در گذار از سطح باردار

آیا می‌توان این رابطه‌ی (٥-١١٢) را بر حسب پتانسیل V هم نوشت؟ می‌دانیم که $\mathbf{E}$ گرادیان پتانسیل است و برای این‌که تابعی در یک نقطه مشتق (گرادیان) باشد، باید در آن نقطه پیوسته باشد. آیا تابع پتانسیل در روی طیح باردار پیوسته است؟ خوشبختانه تابع پتانسیل هنگام گذار از یک سطح باردار پیوسته است. برای این که آن را ثابت کنیم در شکل (٥-١١) نقطه‌ی P درست در زیر سطح باردار و نقطه‌ی Q درست در بالای آن باشند. اختلاب پتانسیل این دو نقطه عبارت است از

$$V_Q-V_P=-\int_P^Q \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (٥-١١٣)$$

در حدی که نقاط P و Q به سوی صفحه‌ی باردار میل می‌کنند (این چیزی است که به آن علاقمندیم ؛ چون به رفتار پتانسیل درست دربالا و درست در پایین سطح باردار را بررسی می‌کنیم) $ds\to 0$ میل می‌کند و انتگرال سمت راست رابطه‌ی (٥-١١٣) صفر می‌شود. بنابراین، تابع پتانسیل در گذار از سطح باردار پیوسته است و داریم



شکل ٥-١١ پتانسیل الکتریکی پیوسته است

$$V_Q-V_P=-\int_P^Q \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}\to 0 \quad\Rightarrow\quad V_{\uparrow}=V_{\downarrow} \qquad (٥-١١٤)$$

سرانجام این که رابطه‌ی (٥-١١٢) می توان برحسب پتانسیل به صورت زیر نوشت

$$\nabla V_{\uparrow}-\nabla V_{\downarrow}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \qquad (٥-١١٥)$$

یا

$$\frac{\partial V_{\uparrow}}{\partial n}-\frac{\partial V_{\downarrow}}{\partial n}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (٥-١١٦)$$

که در آن

$$\frac{\partial V}{\partial n} \equiv \nabla V \cdot \hat{\mathbf{n}} \qquad (۵-۱۱۷)$$

مشتق تابع پتانسیل در راستای هموود بر سطح است.

شرط‌های بالا برای میدان $\mathbf{E}$ و پتانسیل V برای هر سطحی، باردار یا بدون بار و تخت یا خمیده درست اند و نتیجه‌ی مستقیم قانون گوس و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ اند.

مسئله‌ها

۵-۱ انرژی توزیع بار شعاعی: توزیع بار کروی به صورت زیر داده شده است

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \dfrac{r}{a} & ; \quad r \le a \\ 0 & ; \quad r > a \end{cases} \qquad (۵-۱۱۸)$$

(الف): میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در همه جای فضا (یعنی برای ناحیه‌ی $r < a$ و $r > a$) حساب کنید.

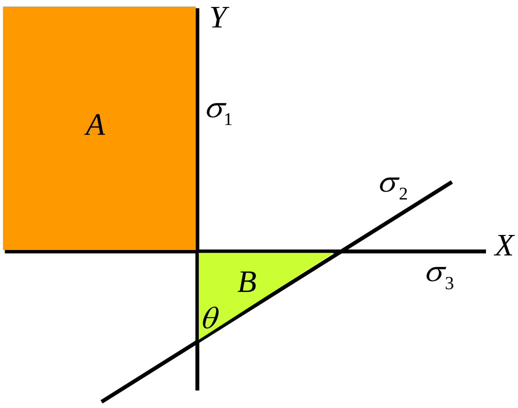
(ب): تابع پتانسیل الکتریکی V را در همه جا به دست آورید.

(پ): نمودار تابع پتانسیل قسمت (ب) را به صورت تابعی از r رسم کنید.

(ت): با استفاده از $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V V(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d\tau$ انرژی لازم برای سامان دادن این آرایه را به دست آورید .

(ج): انرژی ذخیره شده در میدان $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2 d\tau$ را حساب کنید. (*راهنمایی:* پاسخ را می‌توان بدون هیچ گونه انتگرال‌گیری به دست آورد.)

۵-۲ سه صفحه‌ی باردار: سه صفحه ی بینهایت گسترده باردار برابر شکل (۵-۱۲) قرار دارند. چگالی بار الکتریکی هر صفحه عبارت است از $\sigma_1 = \sigma_0$ و σ_2 و σ_3 است. فقط σ_0 و زاویه ی θ بین صفحه های با بار σ_1 و σ_2 داده شده اند.



شکل ۵-۱۲ سه صفحه‌ی باردار

(الف): σ_2 و σ_3 را چنان بیابید که میدان الکتریکی در درون مثلث B صفر شود.

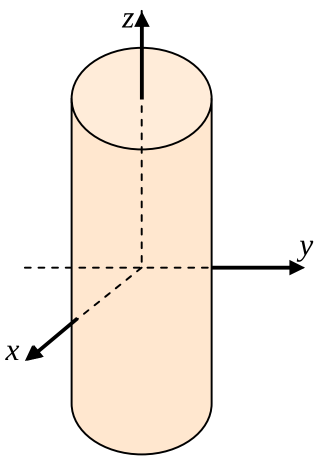
(ب): چگالی انرژی (انرژی در واحد حجم) میدان الکتریکی را در ناحیه ی A بیابید.

(پ): اگر صفحه ی با بار σ_2 در امتداد محور Y پایین آورده شود، انرژی کل سامانه افزایش می یابد یا کاهش پیدا می کند؟

(ت): اگر صفحه ها را از موقعیتی که دارند رها کنیم، حرکتشان چگونه خواهد شد؟

۵-۳ توزیع بار استوانه‌ای و کار: توزیع بار حجمی در استوانه‌ی شکل (۵-۱۳) به شعاع a و طول L ($L \gg a$) به صورت $r < a$, $\rho(r) = Ar$ است که در آن A مقدار ثابتی است و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

در مختصات استوانه‌ای اند.



شکل ۱۳-۵ توزیع بار استوانه‌ای

(الف): میدان الکتریکی $\mathbf{E}(r)$ این توزیع بار را در همه جای فضا بیابید. شما باید دو ناحیه‌ی مختلف را در نظر بگیرید.

(ب): فرض کنید پتانسیل در سطح استوانه صفر است: $V(a)=0$. تابع پتانسیل این توزیع بار را در همه‌ی ناحیه‌های فضا بیابید.

(پ): در یک گام نشان دهید که پتانسیلی را که در قسمت (ب) حساب کردید، با توزیع بار داده شده سازگار است.**

(ت): وقتی میدان را در بیرون استوانه ($r>a$) اندازه‌گیری می‌کنیم، می‌بینیم که به صورت $\mathbf{E}=\left(Aa^3/\varepsilon_0 r\right)\hat{\mathbf{r}}$ است. آیا این نتیجه با پاسخ قسمت (الف) سازگار است؟ اگر نیست، توضیح دهید.

(ج): درستی ابعاد میدان $\mathbf{E}$ را که در قسمت (ت) داده شده است بیازمایید.

(چ): با توجه به قسمت (ت) پتانسیل را در ناحیه‌ی $r>a$ به دست آورید.

(ح): برای جابه‌جایی بار q ار نقطه‌ی A با مختصات کارتزی $(3a,0,0)$ به نقطه‌ی B با مختصات کارتزی $(0,2a,0)$ چه مقدار کار لازم است.

(خ): برای جابه‌جایی بار q ار نقطه‌ی C با مختصات کارتزی $(2a,0,0)$ به نقطه‌ی D با مختصات کارتزی $(0,2a,0)$ چه مقدار کار لازم است؟

۴-۵ پتانسیل توزیع بار: در فضای سه بعدی پتانسیل یک توزیع بار الکتریکی عبارت است از

$$V(r,\theta)=\frac{Q_0}{a}\left(1-\frac{r\cos\theta}{3a}-\frac{a}{r}\right)\quad;\quad 0<r<a\quad,\quad V(r,\theta)=-\frac{Q_0 a\cos\theta}{3r^2}\quad;\quad r>a$$

(الف): با محاسبه ی $E=-\nabla V$ نشان دهید که میدان مربوط به این پتانسیل به صورت زیر است

$$\mathbf{E}=-\frac{Q_0}{a^2}\left(\frac{a^2}{r^2}-\frac{\cos\theta}{3}\right)\hat{\mathbf{r}}-\frac{Q_0\sin\theta}{3a^2}\hat{\boldsymbol{\theta}}\quad;\quad 0<r<a$$

$$\mathbf{E}=-\frac{2aQ_0\cos\theta}{3r^3}\hat{\mathbf{r}}-\frac{Q_0 a\sin\theta}{3r^3}\hat{\boldsymbol{\theta}}\quad;\quad r>a$$

(ب): به پرسش های زیر پاسخ دهید

۱- آیا پتانسیل V در $r=a$ پیوسته است؟ آیا انتظار دارید که پتانسیل پیوسته باشد؟

۲- آیا میدان در $r=a$ پیوسته است؟ برای پو.سته ی کروی به شعاع a از پاسختان چه برداشتی دارید؟

۳- در ناحیه ی $r<a$ چگالی بار حجمی ρ را حساب کنید.

٤- در ناحیه ی $r>a$ چگالی بار حجمی ρ را حساب کنید.

٥- بار کل Q_1 موجود در درون پوسته ی کروی به شعاع $R<a$ را حساب کنید.

٦- آیا پاسخ پرسش ٥ با پاسخ پرسش ۳ سازگار است؟ بار Q_1 در کجا جایگزین است؟

۷- کره ای به شعاع $R > a$ را در نظر بگیرید و بار کل Q_2 درون آن را بیابید. بار $Q_3 = Q_2 - Q_1$ را حساب کنید.

۸- با توجه به پاسخ پرسش های ۳ و ٤ ، مکان Q_3 کجاست؟

۹- چگالی بار سطحی را در روی کره ای به شعاع a حساب کنید.

۱۰- جمله های مختلف توزیع بار را به پتانسیل در $r < a$ و $r > a$ نسبت دهید.

۵-۵ انرژی و پتانسیل: میدان الکتریکی زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{E} = A(3r + 4R)\mathbf{r} \quad ; \qquad r \le R$$

$$\mathbf{E} = \frac{7AR^4}{r^3}\mathbf{r} \quad ; \qquad r \ge R$$

که در آن $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ و A مقدار ثابتی با یکای مناسب است.

(**الف**): چگالی بار ρ را برای همه ی نقاط فضا به دست آورید.

(**ب**): در درون کره ای به شعاع r_o و به مرکز مختصات مبداء چه مقدار بار، Q_t ، وجود دارد؟

(**پ**): پتانسیل الکتریکی ، V، را در همه ی نقاط فضا حساب کنید.

(**ت**): نمودارهای ρ , Q_t, V را برحسب r_o رسم کنید.

(**ج**): انرژی لازم برای این آرایش بار با چگالی ρ را به دست آورید.

(*راهنمایی:* محاسبه را در مختصات کروی انجام دهید.)

۶- میدان‌های الکتریکی در رساناها و پیرامون آنها

۶-۱ پیش‌گفتار

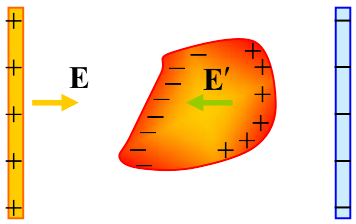
در فصل ٤ ویژگی‌های رساناها را برشمردیم. میدان الکتریکی در گوشت رسانا صفر است. سطح یک رسانا، سطح هم‌پتانسیل است، یعنی پتانسیل در تمام نقاط روی رسانا مقدار ثابتی است. در نتیجه، جابه‌جایی بار الکتریکی در روی رسانا هزینه‌ای ندارد و برای آن کاری خرج نمی‌شود. چگالی بار الکتریکی خالص در گوشت رسانا همواره صفر است و اگر رسانایی را باردار کنیم، بارها در سطح رسانا توزیع می‌شوند. توزیع بارها در سطح رسانا همواره به گونه‌ای است که از نفوذ میدان الکتریکی به درون آن (یعنی در ماده‌ی رسانا، در گوشت رسانا) جلوگیری می‌کند.

در این فصل، به بررسی سامانه‌های شامل رسانا می‌پردازیم که در میدان‌های الکتریکی و بارها به حالت مانا درآمده اند. یعنی سامانه از نظر الکتروستاتیکی به حالت مانا رسیده اند. این بدان معنی است که بارها را در رساناها خودشان را توزیع کرده اند و اینک بدون حرکت اند. به بیان دیگر، در حالت ایستایی بارها حرکت ندارند. این گزاره وسوسه انگیز و شاید هم اندکی گمراه کننده باشد. چون، اگر اثر نیروهای غیر الکتریکی را نادیده بگیریم، به این نتیجه می‌رسیم که اگر بارها به حالت ترازمندی رسیده‌اند و بی حرکت اند، پس باید میدان الکتریکی در درون رسانا صفر باشد. چون اگر میدان صفر نباشد، به حامل‌های بار الکتریکی نیرو وارد می‌شود و آنها را وادار به حرکت می‌کند. در نتیجه، حالت ایستایی نمی‌تواند برقرار شود. این گونه دلیل آوردن درست است، اما وجود نیروهای دیگر را، نیروهای غیر الکتریکی را، که به حامل‌های بار وارد می‌شوند، نادیده می‌گیرد. این گونه نیروها باید با نیروی الکتریکی حذف شوند تا این که سامانه به حالت مانا برسد. در نگاه نخست، کدام نیروهای غیر الکتریکی به ذهن می‌رسد؟ نیروی گرانش شاید نخستین آنها باشد. به هر حال یون مثبتی در ماده‌ی رسانا جرم دارد و پیوسته تحت تاثیر نیروی گرانش است. الکترون هم همین‌طور. شاید بگویید که نیروی گرانش در مقایسه با نیروی الکتریکی بسیار ضعیف است و می‌توان در تقریب نخست آن را نادیده گرفت. اما نیروهای دیگری هم وجود دارند و گاهی سبب می‌شوند که حامل‌های بار الکتریکی در رویارویی با میدان الکتریکی حرکت کنند. بگذارید این نیروها را با نام عمومی‌تر"شیمیایی" بشناسیم. نیروهای شیمیایی را در باطری و دیگر واکنش‌های شیمیایی، از جمله سلول زنده، می‌توان سراغ گرفت. از نگاه فیزیک مدرن و در سطحی بنیادی‌تر نیروهای شیمیایی به راستی نیروهای غیر الکتریکی نیستند، چون به ساختار اتمی و مولکولی ماده مربوط هستند و می‌دانیم که این ساختارها را با استفاده از قانون کولمب و مکانیک کوانتومی می‌توان توصیف کرد. با این حال، از دید نظریه‌ی کلاسیک الکتروستاتیک، این‌ها نیروهای ناآشنا اند و رفتارشان بر اساس قانون عکس مجذور فاصله نیست که نظریه‌ی کلاسیک بر پایه‌ی آن بنا نهاده شده است. نکته این است که گاهی ممکن است با شرایطی روبرو شویم که نیروهای غیر کولمبی به حامل‌های بار الکتریکی در درون ماده‌ی رسانا اثر می‌کنند. در چنین حالت‌هایی برای این که وضعیت الکتروستاتیکی برقرار شود، لازم است که میدان الکتریکی *محدودی* در رسانا وجود داشته باشد تا بتواند بر اثر این نیروها (از هر نوعی که باشد) چیره شود. با این هشدار به مسئله‌ی عمومی‌تر و مهم ماده‌ی رسانای همگن و همسانگرد می‌پردازیم که این گونه نیروها وجود ندارند. با اطمینان می‌توانیم بگوییم که در گوشت این گونه رسانا میدان الکتریکی باید صفر باشد. با این گزاره، منظور ما این است که میدان میانگین در گوشت رسانا صفر است (میانگین به معنی میانگین میدان بر روی ناحیه‌ای است که در مقایسه با ابعاد اتمی بسیار بزرگ است. به هر حال می‌دانیم که در مقیاس کوچک، در نزدیکی هسته‌ی اتم، حتی در بهترین رسانا، میدان الکتریکی خیلی قوی وجود دارد. میدان الکتریکی هسته در میدان میانگین سهمی ندارد، چون جهت آن در یک طرف هسته،

برخلاف جهتش در طرف دیگر هسته است. چگونه می‌توان میدان میانگین را تعریف کرد و آن را اندازه گرفت، پرسش دیگری است که در موضوع این فصل نمی‌گنجد.)

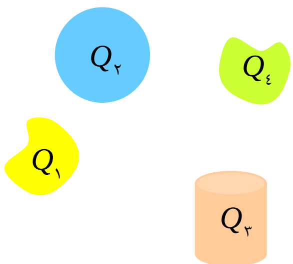
۲-۶ ماده‌ی رسانا در میدان الکتریکی

در بخش ٦-٤ ماده‌ی رسانا را تعریف کردیم و گفتیم که رسانا جسمی است که به‌ازای هر اتم یا مولکول یک یا دو حامل بار الکتریکی دارد که می‌توانند در گوشت رسانا حرکت کنند. حال یک جسم رسانا را در نظر بگیرید که در یک میدان الکتریکی قرار دارد. برای روشنی بیشتر، فرض کنید جسم رسانا را در فضای میان دو صفحه‌ی موازی با بارهای یکسان و ناهمنام قرار دادیم. شکل (١-٦) را ببینید. در فضای بین صفحه‌ها میدان الکتریکی وجود دارد و جهتش از صفحه‌ی مثبت به سوی صفحه‌ی منفی است. این میدان به حامل‌های بار در رسانا نیرو وارد می‌کند. حامل‌های بار مثبت در جهت میدان الکتریکی و حامل‌های بار منفی در خلاف جهت میدان حرکت می‌کنند. آنها فراتر از سطح رسانا نمی‌توانند بروند. بنابراین، بارهای مثبت در یک طرف و بارهای منفی در طرف دیگر رسانا انباشته می‌شوند. این بارها، میدان الکتریکی خود را در درون رسانا تولید می‌کنند. جهت آن برخلاف جهت میدان حاصل از دو صفحه‌ی موازی است و می‌کوشد تا میدان صفحه‌ها را در سطح رسانا خنثی کند. انباشت بارها در دو سوی رسانا ادامه می‌یابد تا این که میدان خارجی را کاملا از بین ببرد. توزیع نهایی بارها در سطح رسانا به گونه‌ای است که جمع میدان آنها و میدان بیرونی، در گوشت رسانا صفر می‌شود. این فرایند در رسانا "خودبه‌خود" و سریع روی می‌دهد. بنابراین، وقتی با رسانا در میدان خارجی سروکار داریم، کافی است که فقط سطح رسانا را بررسی کنیم.



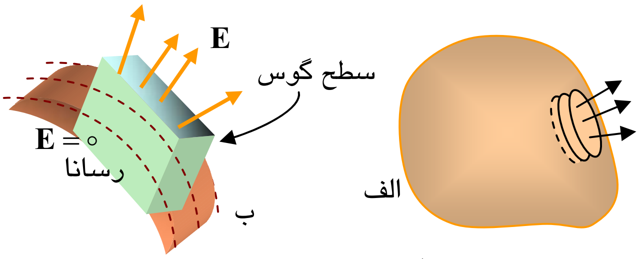
شکل ١-٦ جدایی بارها در رسانا

با این یادآوری، سامانه‌ای از چند جسم رسانای ساکن را در فضای تهی نظر بگیرید. شکل (٢-٦) را ببینید. بار خالص روی هر رسانا مقدار ثابتی است. منظور ما از بار خالص، اختلاف میان بارهای مثبت و منفی است. این مقدار ثابتی است، چون بارها نمی‌توانند از رسانا به بیرون و یا از بیرون به رسانا نشت کنند. بار کل رسانای k ام را Q_k بنامید. هر جسم را می‌توان با پتانسیل الکتریکی V_k آن هم مشخص کرد. چون سطح رسانا یک سطح هم-پتانسیل است، اندازه‌ی پتانسیل در تمام نقاط سطح رسانا مقدار ثابتی است. چون هیچ یک از رساناها تا بینهایت گسترده نیستند، می‌توانیم پتانسیل را در بینهایت صفر فرض کنیم. در این صورت، V_k کار در واحد بار است که باید خرج کنیم تا هر بار جزئی را از بینهایت به نقطه‌ای در روی رسانای k ام بیاوریم.



شکل ٢-٦ آرایه‌ی چهار رسانای باردار

چون سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است و پتانسیل در همه‌ی نقاط آن مقدار ثابتی است، میدان الکتریکی، $-\overrightarrow{\nabla V}$ ، باید در هر نقطه‌ای بر سطح رسانا عمود باشد. وقتی از درون رسانا به سوی بیرون حرکت می‌کنیم، در سطح رسانا با یک تغییر ناگهانی در میدان الکتریکی روبرو می‌شویم: میدان $\mathbf{E}$ در درون رسانا صفر است، اما در بیرون آن صفر نیست. علت گسستگی میدان وجود بار الکتریکی با چگالی σ در سطح رساناست. چگالی بار سطحی σ با قانون گوس به شدت میدان $\mathbf{E}$ در سطح رسانا مربوط است. این ارتباط در شکل (٣-٦ الف) نشان داده شده است. در شکل (٣-٦ ب) بخش کوچکی از سطح رسانا دیده می‌شود. سطح گوسی مانند یک قوطی کبریت را در نظر بگیرید. شار میدان فقط از رویه‌ی بیرونی آن می‌گذرد، چون رویه‌ی



شکل ۳-٦ ارتباط چگالی بار و شدت میدان در سطح رسانا

دیگر در درون رسانا قرار دارد و در آنجا میدان صفر است. روشن است که از سطح‌های جانبی قوطب کبریت (سطح گوس) هم شار نمی‌گذرد. خطها میدان در سطحی که شار از آن می‌گذرد، در هر نقطه بر این سطح عمود است. بنابراین، قانون گوس می‌گوید (A مساحت رویه است):

$$\Phi = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = Q_{enc}/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow E_n A = \sigma A/\varepsilon_0 \ \Rightarrow E_n = \sigma/\varepsilon_0 \qquad (٦-١)$$

میدان $\mathbf{E}$ میدان کل است که همه‌ی بارها، بارهای دوردست و نزدیک، در سطح رسانا تولید می‌کنند. بار سطحی σ فقط بخشی از آن است. توجه کنید که میدان الکتریکی E_n مولفه‌ی عمود بر سطح میدان است و این تنها مولفه‌ای است که میدان دارد. یعنی میدان الکتریکی در روی سطح رسانا هیچ مولفه‌ی دیگری ندارد، چون $\mathbf{E}$ همواره بر سطح رسانا عمود است.

همچنین، بار کل روی رسانا، Q_k، از انتگرال σ بر روی تمامی سطح رسانای k ام به‌دست می‌آید

$$Q_k = \int_{S_k} \sigma da = \varepsilon_0 \int_{S_k} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \qquad (٦-٣)$$

٭ ۳-۶ مسئله‌ی عمومی

اینک با وضعیتی روبرو هستیم که مقداری بار الکتریکی در روی یک یا چند رسانا توزیع شده‌اند. می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از این بارها را پیدا کنیم. در واقع، این مسئله‌ی بنیادی الکتروستاتیک است. در اینجا هم چون بارها ساکن اند، مسئله‌ی ما یک مسئله‌ی الکتروستاتیکی است. متاسفانه، شکل هندسی رساناها و آرایش هندسی‌شان در سه بعد، امکان یافتن پاسخ سر راست مسئله را دشوار می‌کند. در واقع، تعداد آرایش‌هایی که بتوان برای آنها پاسخ ریاضی بسته یافت، بسیار محدود است. برای این که سرشت ریاضی مسئله را بفهمیم، بگذارید آن را با زبان تابع پتانسیل، V، بیان کنیم. همان‌گونه که دیدیم، اگر بتوانیم تابع پتانسیل V را پیدا کنیم، تا یافتن میدان $\mathbf{E}$ فقط یک گام (یک مشتق‌گیری، یا محاسبه‌ی گرادیان) فاصله داریم. تابع پتانسیل در همه‌ی نقاط بیرون رسانا باید از معادله‌ی لاپلاس پیروی کند (فرض می‌کنیم بارهای الکتریکی به رسانا محدود است و در فضای بیرون آن بار یا چشمه‌ی میدان وجود ندارد.) معادله‌ی لاپلاس در سه بعد وقتی در مختصات کارتزی نوشته شود، به صورت زیر درمی‌آید

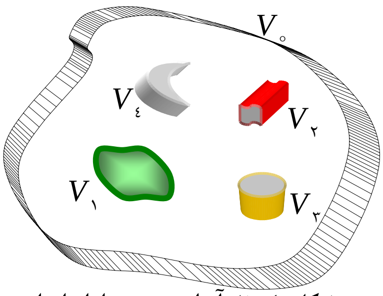
$$\nabla^2 V = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (٦-٤)$$

مسئله‌ی ما این است که تابع $V(x,y,z)$ را چنان بیابیم که در معادله‌ی (٦-٤) صدق کند و شرایط خاص مربوط به سطح رسانا را (مانند، هم‌پتانسیل بودن سطح رسانا) هم راضی کند. شرط‌های مربوط به ویژگی‌های رساناها ممکن است برای هر رسانا متفاوت باشد. مثلاً، برخی را به باتری وصل کنیم و به این ترتیب، اندازه‌ی پتانسیل در هر نقطه‌ی روی آن رسانا مقدار معینی باشد، یا ممکن است رسانایی به زمین وصل شود و در نتیجه، پتانسیل آن صفر باشد. نمونه‌ی دیگری از این شرایط مربوط به رسانا این است که گفته شود، چگالی بار سطحی در هر رسانا چیست. بنابراین، پاسخ معادله‌ی (٤-٧) باید مقدار درستی را در روی هر رسانا به‌دست بدهد. گاهی ناحیه‌ای را که می‌خواهیم در آن میدان $\mathbf{E}$ را حساب کنیم شامل چندین سطح رساناست که همگی در درون سطح رسانای بزرگ‌تری قرار دارند. در این صورت می‌توانیم به این رسانای بزرگ پتانسیلی

نسبت بدهیم و هر چیزی را که در بیرون آن قرار دارد، نادیده بگیریم. این‌ها نمونه‌هایی اند که نشان می‌دهند، تابع پتانسیل، یعنی پاسخ معادله‌ی (٤-٦) باید تعدادی شرایط مرزی را راضی کند.

همان گونه که گفتم، ممکن است بار کل Q_k هر رسانا داده شده باشد. در این صورت مقدار انتگرال سطح $\mathbf{E}$(یا $\overrightarrow{-\nabla V}$) در رابطه‌ی (٣-٧) داده می‌شود. گاهی ممکن است ترکیبی از مقدار بار Q_k در برخی سطح‌های رسانا و اندازه‌ی پتانسیل در برخی دیگر داده شده باشند. در این حالت آمیزه‌ای از دو نوع شرایط مرزی داریم.

پرسش کلی این است: با شرایط مرزی معین، آیا معادله‌ی (٤-٦) پاسخی دارد یا نه؟ آیا پاسخ معادله‌ی لاپلاس یگانه است یا می‌تواند پاسخ‌های متفاوت داشته باشد؟ توجه کنید که این پرسش‌ها معنی‌دار هستند. چون معادله‌ی (٤-٦) یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی نیست، بلکه معادله‌ی دیفرانسیل پارمشتق مرتبه‌ی دو است. نظریه‌ی معادله‌های دیفرانسیل پارمشتق به ما می‌آموزد که این گونه معادله‌ها اساسا بینهایت پاسخ دارند. به بیان دیگر، تنها با معادله‌ی لاپلاس نمی‌تواند تابع پتانسیل را تعیین کرد، بلکه باید آن را با مشخص کردن شرایط مرزی به پاسخ مشخصی راهنمایی کرد. ما بر آن نیستیم که همه‌ی مسئله های مربوط به معادله‌ی لاپلاس را بکاویم. یک وضعیت مهم را بررسی خواهیم کرد. این وضعیت به ما نشان خواهد داد که چگونه می‌توان با این مسئله‌ها کنار آمد و به نتیجه‌ی سودمندی دست یافت.



شکل ٤-٦ آرایه‌ی رساناها با پتانسیل‌های معین

فرض کنید پتانسیل‌های V_k در روی همه‌ی رساناها، از جمله رسانایی که بقیه را دربر می‌گیرد، معین و داده شده اند. شکل (٤-٦) را ببینید. ما همچنین شرط می‌کنیم که پتانسیل در بینهایت به صفر می‌گراید. هدف ما یافتن میدان الکتریکی در فضای بین این رساناهاست. وقتی مسئله به زبان پتانسیل فرمولبندی شود، به یافتن تابع پتانسیلی که شرایط مرزی را راضی کند، کاهش می‌یابد. منظور از شرایط مرزی چیست؟ نخست باید بگویم که مرزها همانا رویه‌های رساناهاست. شرط مرزی هم به این معنی است که در هر مرزی پتانسیل مقدار معین و ثابتی دارد. از نظر فیزیکی روشن است که این مسئله فقط یک پاسخ دارد. یعنی تنها یک تابع پتانسیل وجود دارد که همه‌ی شرط‌های مرزی در آن صدق می‌کنند. علت این یگانگی پاسخ روشن است، چون سامانه در یک حالت فیزیکی معین قرار دارد. اما اثبات این که معادله‌ی (٤-٦) هم برای این مسئله فقط یک پاسخ دارد، داستان دیگری است. این نوشته مجال اثبات عمومی آن را به ما نمی‌دهد. در عوض ثابت می‌کنیم که با مجموعه‌ای از شرایط مرزی، اگر معادله‌ی لاپلاس پاسخی داشته باشد، این پاسخ باید یگانه باشد. قضیه‌ای را که در زیر به آن می‌پردازیم، **قضیه‌ی یگانگی*** نامیده می‌شود. قضیه‌های یگانگی در الکتروستاتیک فراوانند، ما به یکی یا دو تا از آنها خواهیم پرداخت.

قضیه‌ی یگانگی ١: اگر $V(x,y,z)$ پاسخ معادله‌ی لاپلاس در ناحیه‌ای از فضا باشد و پتانسیل در همه‌ی سطح‌های این فضا معین باشد، تابع $V(x,y,z)$ تنها و یگانه پاسخ است.

اثبات: فرض کنید تابع دیگری مانند $\phi(x,y,z)$ هم وجود دارد که پاسخ معادله‌ی لاپلاس در فضای مورد نظر است با همان شرایط مرزی است. به عبارت دیگر، هر دوی $V(x,y,z)$ و $\phi(x,y,z)$ در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کنند. یعنی داریم

$$\nabla^2\phi=0 \quad , \quad \nabla^2V=0 \tag{٦-٥}$$

بنابراین، هر ترکیب خطی از V و ϕ، مانند $\psi=c_1V+c_2\phi$ هم پاسخ معادله‌ی لاپلاس است. به ویژه تفاضل آن دو

* uniqueness theorem

$$\psi(x,y,z)\equiv V(x,y,z)-\phi(x,y,z) \qquad (٦-٦)$$

هم پاسخ معادله‌ی لاپلاس است. البته روشن است که تابع $\psi(x,y,z)$ در شرایط مرزی مسئله صدق نمی‌کند. برای دیدن این یکی از مرزها را، مثلا رسانای استوانه در شکل (٤-٦) را درنظر بگیرید. هر دوی V و ϕ در روی این مرز مقدار یکسان V_2 دارند. بنابراین، مقدار ψ در این مرز به خصوص صفر است. در واقع، مقدار تابع $\psi(x,y,z)$ در روی همه‌ی مرزهای فضای مورد نظر ما صفر است. بنابراین، $\psi(x,y,z)$ پاسخ مسئله‌ی ما نیست، بلکه پاسخ مسئله‌ی الکتروستاتیک **دیگری** است، مسئله‌ای با همان آرایش رساناها، اما همگی در پتانسیل صفر. بنابراین، $\psi(x,y,z)$ باید در همه‌ی نقاط فضا صفر باشد، چون اگر $\psi(x,y,z)$ در همه جا صفر نباشد، باید در نقطه‌ای مانند P کمینه یا بیشینه داشته باشد. چون ψ در بینهایت و نیز در روی همه‌ی مرزها صفر است، اگر کره‌ای به مرکز P در نظر بگیریم، میانگین تابع ψ بر روی این کره باید با مقدار آن در مرکز، یعنی در نقطه‌ی P برابر باشد. اگر P مکان بیشینه یا کمینه باشد، این نشدنی است (می‌توانستیم از آموزه‌های فصل ٥ استفاده کنیم و بگوییم پاسخ معادله‌ی لاپلاس، کمینه یا بیشینه‌ی موضعی نمی‌پذیرد.) پس، در هیچ نقطه‌ای ψ نمی‌تواند بیشینه یا کمینه داشته باشد. در نتیجه، مقدارش باید در همه جا صفر باشد. در نتیجه، در همه جا $V=\phi$ است. به بیان دیگر، پاسخ معادله‌ی لاپلاس به همراه شرایط مرزی معین در روی همه‌ی مرزها، پاسخی یگانه است. •

یک پی‌آمد قضیه‌ی یگانگی این است که در فضای درون رسانای توخالی اگر بار الکتریکی وجود نداشته باشد، میدان الکتریکی صفر است.

اثبات: تابع پتانسیل $V(x,y,z)$ در درون رسانا باید از معادله‌ی لاپلاس پیروی کند. تمامی مرز این ناحیه، خود رساناست که یک سطح هم‌پتانسیل در V_0 است. بنابراین، $V=V_0$ مقدار ثابتی در همه‌ی نقاط مرزهای ناحیه است. پس، در درون حجمی که رسانا مرزهای آن است، یک پاسخ معادله‌ی لاپلاس $V=V_0$ است. بنا به قضیه‌ی یگانگی، تنها یک پاسخ وجود دارد و در نتیجه، V_0 پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل است. چون V_0 مقدار ثابتی است، پس میدان الکتریکی $\mathbf{E}=-\overrightarrow{\nabla V_0}=0$ است.•

مهم نیست که میدان الکتریکی در بیرون رسانای توخالی چه باشد، نتیجه‌ی بالا همواره درست است. در واقع، این نتیجه اندکی شگفت آور است. یک جعبه‌ی رسانا را در نظر بگیرید. فرض کنید در بیرون آن بارهای الکتریکی وجود دارند و میداان الکتریک تولید می‌کنند. بنابه اصل برهم‌نهی، میدان در هر نقطه‌ی فضا، از جمله در **درون جعبه** با جمع برداری میدان‌های حاصل از بارهای بیرون برابر است. اما نتیجه‌ی بالا می‌گوید، مهم نیست که توزیع بار در بیرون جعبه چگونه است، میدان در درون جعبه همواره صفر است. اگر حسابش را بکنید، بارهای سطحی جعبه باید خودشان را به گونه‌ای توزیع کرده باشند که میدان‌های بیرونی را درست در سطح جعبه حذف کنند. این توزیع بار می‌تواند کاملا نایکنواخت باشد.

واقعیت این که میدان الکتریکی در درون پوسته‌ی رسانا صفر است، اساس سپرگذاری[†] الکتریکی است. به این دلیل است که ابزار دقیق الکترونیکی را در جعبه‌های فلزی قرار می‌دهند تا از آسیب میدان‌های الکتریکی بیرونی در امان باشد. در آینده خواهیم دید که میدان‌های مغناطیسی هم از رسانا عبور نمی‌کنند. یعنی رسانا سپر خوبی در برابر میدان‌های الکترومغناطیسی است. به این دلیل است که آینه سازها پشت شیشه را با رساناهای خوبی مانند جیوره و نقره اندود می‌کنند. نور ترکیبی از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است. هنگامی که به اینه تابیده می‌شود، با سطح رسانا در پشت آینه روبرو می‌شود. چون رسانا اجازه نمی‌دهد میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی (نور) به درون آن نفوذ کند، ناگزیر بازتابیده می‌شود و شما چهره‌ی خود و هر چیز دیگری را که در میدان آینه قرار دارد، می‌بینید. هنگامی که آذرخش تولید می‌شود، در جو زمین میدان الکتریکی

[†] electrical shielding

بسیار قوی به وجود می‌آید. تصور کنید که در بیابانی قرار دارید و در آسمان آذرخش می‌درخشد. برای گریز از آسیب "برق گرفتگی" چه کار می‌کنید؟ حالا باید پاسخ را بدانید. بهتر است که به درون اتوموبیل خود پناه ببرید. چون بدنه‌ی آن معمولا از فلز ساخته شده است و رساناست. اتوموبیل سپر خوبی در برابر برق گرفتگی فراهم می‌کند. البته، اگر آذرخش به اتوموبیل برخورد کند، انرژی زیادی را به آن واریز خواهد کرد و ممکن است آن را تا دمای زیادی داغ کند. در درون اتوموبیل امکان کباب شدن و سوختگی وجود دارد، اما، دستکم، از آسیب ناگوار برق گرفتگی در امان خواهید بود.

می‌توان به قضیه‌ی یگانگی بالا را اندکی عمومی‌تر کرد. اثباتی که برای آن ارایه شد، فرض می‌کرد که در ناحیه‌ی مورد نظر، یعنی، فضای بین رساناها، بار الکتریکی وجود ندارد (و بنابراین، تابع پتانسیل از معادله‌ی لاپلاس پیروی می‌کرد). اگر در این فضا توزیع باری با چگالی حجمی ρ هم وجود می‌داشت، هنوز هم قضیه برقرار می‌بود. این بار تابع پتانسیل باید از معادله‌ی پوواسن پیروی کند. اثبات قضیه هنوز هم همان است. فرض کنید V و ϕ هر دو پاسخ معادله‌ی پوواسن اند و هر دو در شرایط مرزی صدق می‌کنند. در این صورت داریم

$$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0 \quad , \quad \nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0 \qquad (٦-٧)$$

بنابراین، تفاصل آن دو، $\psi = V - \phi$، هنوز هم در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند:

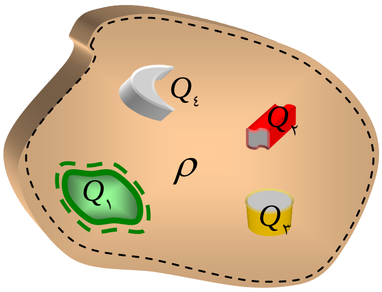
$$\nabla^2\psi = \nabla^2(V-\phi) = \nabla^2 V - \nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0 - (-\rho/\varepsilon_0) \;\Rightarrow\; \nabla^2\psi = 0 \qquad (٦-٨)$$

و مقدارش در روی همه‌ی مرزها صفر است. بنابراین $\psi = 0 \;\Rightarrow\; V = \phi$.

نتیجه: اگر چگالی بار در ناحیه‌ی مورد نظر داده شده باشد و پتانسیل در روی مرزهای ناحیه معین باشد، پتانسیل در آن ناحیه، یگانه است.

قضیه‌ی یگانگی دستاورد مهم و سودمندی است. به ما می‌گوید اگر تابعی داشته باشید که در معادله‌ی لاپلاس صدق کند و شرایط مرزی را راضی کند، مهم نیست که چگونه به این تابع رسیده باشید، آن تابع پاسخ مسئله است. سودمندی این قضیه را در بخش ٤-٦ خواهیم دید.

قضیه‌ی یگانگی را ما برای گروه خاصی از شرایط مرزی بیان کردیم. شرایط مرزی را با معین بودن پتانسیل در همه‌ی مرزها (رویه‌های رساناها و بینهایت) بیان کردیم. همان‌گونه که در آغاز این بخش گفتم، این تنها نوع شرایط مرزی نیست. گروه دیگری از شرایط مرزی را در نظر بگیرید. شکل (٤-٦) را دوباره در نظر بگیرید: تعدادی رسانا در شکل‌های هندسی متفاوت و یک رسانای بزرگ‌تر که مرز بیرونی ناحیه‌ی مورد نظر را تعریف می‌کند. اما حالا پتانسیل‌ها را در روی رساناها نمی‌شناسیم. در عوض، می‌دانیم که در روی هر رسانا چه مقدار بار الکتریکی وجود دارد. فراتر از این، فرض کنید در فضای بین رساناها توزیع بار ρ هم وجود دارد. می‌خواهیم میدان الکتریکی را در این ناحیه حساب کنیم.



شکل ٥-٦ آرایه‌ی رساناها با بارهای معین روی آنها و بار ρ

شکل (٥-٧) را ببینید.تنها چیزی که در مورد رساناها می‌دانیم مقدار بار کل هر یک است. ما شکل توزیع این بارها را در روی رساناها نمی‌شناسیم، چون به محض این که بارها را بر روی رساناها قرار دادیم، بارها خود را به گونه‌ای توزیع می‌کنند که در کنترل ما نیست. آیا میدان الکتریکی در این فضا یگانه است؟ میدان را بارهای روی رساناها و بار حجمی ρ تولید می‌کند. توزیع ρ را می‌شناسیم و در نتیجه، دستکم در بنیاد، میدان آن را هم می‌توانیم حساب کنیم. اما کنترلی بر روی توزیع بارهای رساناها نداریم. آیا ممکن است آنها به گونه‌های گوناگون خود را توزیع بکنند و هر بار میدان

متفاوتی به‌وجود بیاورد؟ خوش‌بختانه این نگرانی بی‌مورد است. قضیه‌ی یگانگی دیگری را می‌توان ثابت کرد که می‌گوید، با دانستن بار کل هر رسانا و توزیع بار ρ در فضای بین رساناها، میدان الکتریکی به طور یگانه تعیین می‌شود. یعنی فقط یک تابع میدان الکتریکی وجود دارد. قضیه به صورت زیر است:

قضیه‌ی یگانگی ۲: در ناحیه‌ای که شامل رساناست و توزیع بار ρ در فضای بین رساناها وجود دارد، اگر بار کل روی هر رسانا معلوم باشد، میدان در آن ناحیه به‌طور یگانه تعیین می‌شود.

اثبات: فرض کنید دو میدان $\mathbf{E}_۱$ و $\mathbf{E}_۲$ وجود دارند و هر دو در شرایط مسئله صدق می‌کنند. میدان‌های $\mathbf{E}_۱$ و $\mathbf{E}_۲$ در فضای بین رساناها از شکل دیفرانسیلی قانون گوس پیروی می‌کنند

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_۱=\rho/\varepsilon_\circ \qquad , \qquad \vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_۲=\rho/\varepsilon_\circ \tag{۶-۹}$$

اگر سطح گوسی رسانای i ام را (مانند رسانای با بار $Q_۱$ در شکل ۵-۶) دربر داشته باشد، میدان‌های $\mathbf{E}_۱$ و $\mathbf{E}_۲$ در شکل انتگرالی به‌دست می‌دهند:

$$\oint_i \mathbf{E}_۱\cdot d\mathbf{a}=Q_i/\varepsilon_\circ \qquad , \qquad \oint_i \mathbf{E}_۲\cdot d\mathbf{a}=Q_i/\varepsilon_\circ \tag{۶-۱۰}$$

هم‌چنین برای مرز بیرونی ناحیه‌ی مورد نظر (که ممکن است یک رسانا باشد یا بینهایت) داریم

$$\oint_{\text{outer}} \mathbf{E}_۱\cdot d\mathbf{a}=Q_{\text{total}}/\varepsilon_\circ \qquad , \qquad \oint_{\text{outer}} \mathbf{E}_۲\cdot d\mathbf{a}=Q_{\text{total}}/\varepsilon_\circ \tag{۶-۱۱}$$

که در آن Q_{total} بار کل (بار مربوط به چگالی ρ و بارهای روی رساناها) است. حال تفاضل میدان‌ها، $\mathbf{E}_۳=\mathbf{E}_۱-\mathbf{E}_۲$، را در فضای بین رساالناها نظر بگیرید.

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_۳=\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_۱-\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_۲=\left(\rho/\varepsilon_\circ\right)-\left(\rho/\varepsilon_\circ\right)=\circ \tag{۶-۱۲}$$

و همین کار را برای هر یک از مرزهایی که سطح رساناها می‌سازند، تکرار کنید. برای هر رسانا داریم

$$\oint_i \mathbf{E}_۳\cdot d\mathbf{a}=\oint_i \mathbf{E}_۱\cdot d\mathbf{a}-\oint_i \mathbf{E}_۲\cdot d\mathbf{a}=\left(Q_i/\varepsilon_\circ\right)-\left(Q_i/\varepsilon_\circ\right)=\circ \tag{۶-۱۳}$$

اگرچه نمی‌دانیم بارهای الکتریکی چگونه بر روی رساناها توزیع شده اند، اما می‌دانیم که سطح هر رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است. می‌توانیم از این ویژگی استفاده کنیم. و بگوییم که پتانسیل $V_۳$ متناظر متناظر با $\mathbf{E}_۳$ مقدار ثابتی است (لازم نیست که $V_۳$ برای همه‌ی رساناها یکسان باشد. لازم هم نیست که $V_۳=\circ$ باشد، چون ممکن است $V_۱$ و $V_۲$ برابر نباشند. اما می‌دانیم که $V_۱$ و $V_۲$ در سطح هر یک از رساناها مقدارهای ثابت اند.) حال از اتحاد زیر استفاده کنید:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(V_۳\mathbf{E}_۳\right)=V_۳\left(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_۳\right)+\mathbf{E}_۳\cdot\left(\overrightarrow{\nabla V_۳}\right)=\circ+\mathbf{E}_۳\cdot\left(-\mathbf{E}_۳\right)=-E_۳^۲ \tag{۶-۱۴}$$

اکر از این رابطه بر روی حجم تمام ناحیه‌ی بین رساناها انتگرال بگیریم و از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\left(V_۳\mathbf{E}_۳\right)d\tau=\int_S V_۳\mathbf{E}_۳\cdot d\mathbf{a}=-\int_\tau E_۳^۲ d\tau \tag{۶-۱۵}$$

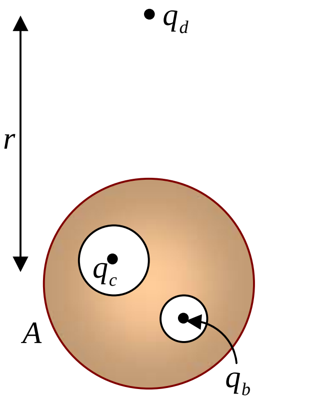
انتگرال سطح شامل همه‌ی مرزهای ناحیه‌ی مورد نظر (یعنی مرزهایی که سطح رساناها به وجود می‌آورند و مرز بیرونی) است. در روی هر مرزی $V_۳$ یک مقدار ثابتی اس، بنابراین، از زیر علامت انتگرال بیرون می‌آید. چیزی که در زیر علامت انتگرال می‌ماند $\mathbf{E}_۳$ است. اما بنابه رابطه‌ی (۱۳-۷)، انتگرال $\mathbf{E}_۳$ بر روی هر سطحی صفر است. در نتیجه،

$$\int_\tau E_۳^۲ d\tau=\circ \tag{۶-۱۶}$$

اما انتگرالنده در این رابطه، همواره مقدار مثبتی است و تنها راهی که ممکن است انتگرال رابطه‌ی ۰۱۶-۶) صفر باشد، این است که $\mathbf{E}_۳=\circ$ باشد و این یعنی $\mathbf{E}_۱=\mathbf{E}_۲$. این اثبات قضیه را کامل می‌کند.●

قضیه‌ی یگانگی می‌گوید اگر مجموعه‌ای رسانا داشته باشیم و هر کدام در پتانسیل معینی باشند، تابع پتانسیل یگانه‌ای برای تمام نقاط فضا وجود دارد که در شرایط مرزی داده شده صدق می‌کند. قضیه‌های یگانگی پی‌آمد معادله‌ی لاپلاس، $\nabla^2 V = 0$، اند. این بدان معنی است که اگر تابعی داشته باشیم که در همه‌ی شرایط مرزی صدق کند، تنها تابعی است که پاسخ درست مسئله است. واقعیت این که میدان الکتریکی در گوشت رسانا صفر است، نتیجه‌ی همین قضیه است.
قضیه‌ی یگانگی به ما می‌اموزد که اگر توانستیم با هر شگردی (از جمله خواب‌نما شدن!) تابعی پیدا کنیم که در شرایط مرزی صدق کند، آن تابع، تنها تابع پتانسیل درست مسئله است. یکی از پی‌آمدهای بسیار مهم قضیه‌ی یگانگی **روش بارهای تصویر** است که در بخش بعدی به آن می‌پردازیم.

مثال ۱-۶ بارهای درون کاواک : در درون رسانای کروی A برابر شکل (٦-٦) دو کاواک وجود دارد. بار کل رسانا صفر است، اما در مرکز یکی از کاواک‌ها بار نقطه‌ای q_b و در مرکز دیگری بار نقطه‌ای q_c قرار دارند. در فاصله‌ی دورتر r از مرکز رسانا بار q_d وجود دارد. نیروهایی که به هر یک از بارهای q_b، q_c، q_d و رسانای A وارد می‌شوند چیست؟ کدام پاسخ تقریبی است و به دور بودن فاصله‌ی r بستگی دارد؟



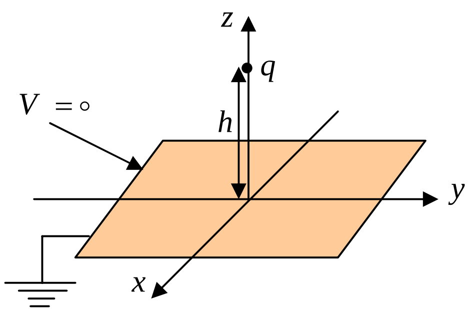
شکل ٦-٦ رسانا و کاواک‌ها

حل: به بارهای q_b و q_c نیرویی وارد نمی‌شود. بار q_b را در نظر بگیرید. اگر بار q_b در کاواک پایینی وجود نمی‌داشت، قضیه‌ی یگانگی می‌گوید که میدان در درون این کاواک صفر می‌بود. این نتیجه مستقل از آن است که بارهای q_c و q_d چه می‌کنند. اما اینک در مرکز کاواک بار q_b وجود دارد و سبب می‌شود که بار $-q_b$ در سطح داخلی کاواک القاء بشود (مقدار بار القایی درست برابر $-q_b$ است. این را از قانون گوس می‌توان فهمید: اگر سطح گوس کروی در درون گوشت رسانا و به مرکز بار q_b در نظر بگیرید، چون میدان الکتریکی در گوشت رسانا صفر است، جمع بارهای درون سطح گوس هم باید صفر شود. در درون سطح گوس بارهای القایی بعلاوه‌ی بار نقطه‌ای q_b وجود دارند. در نتیجه، مقدار بار القایی برابر $-q_b$ است.) بارهای القایی $-q_b$ به طور یکنواخت در سطح کاواک توزیع می‌شوند، چون q_b در مرکز کاواک است. در نتیجه، هنوز هم میدان در مرکز کاواک صفر خواهد بود. بنابراین، نیروی وارد به بار q_b صفر است. به همین دلیل، نیروی وارد به بار q_c صفر است.
نکته: اگر بار q_b در مکانی غیر از مرکز کاواک قرار داشت، نیروی وارد به آن صفر نمی‌شد.♣
حالا رسانای A را در نشر بگیرید. چون بار کل رسانای A صفر است، باید بار $q_b + q_c$ در سطح بیرونی رسانا توزیع شده باشد تا بارهای القایی $-q_b$ و $-q_c$ را که در سطح کاواک‌ها القاء شده اند، خنثی کند. اگر بار q_d وجود نمی‌داشت، میدان در بیرون رسانا می‌بایست متقارن و برابر $E = (q_b + q_c)/4\pi\varepsilon_0 r^2$ می‌بود و بارهای $q_b + q_c$ به طور یکنواخت در سطح بیرونی کره‌ی A توزیع می‌شد (دلیل یکنواختی مانند بالاست؛ افزون بر این، فرض کردیم که در بیرون رسانا بار وجود ندارد. در نتیجه، در بیرون کره، آرایه‌ای با تقارن کروی داریم). وجود بار q_d توزیع بار روی سطح بیرونی کره را اندکی تغییر می‌دهد و سبب می‌شود که چگالی بارهای با علامت مخالف علامت بار q_d در طرف نزدیک به q_d بیشتر باشد، اما تغییری در بار کل رسانا ایجاد نمی‌کند. بنابراین، برای rهای بزرگ، نیروی وارد به بار q_d به تقریب $q_d\,(q_b + q_c)/4\pi\varepsilon_0 r^2$ (اندکی بیش‌تر از این است. نیروی وارد به A باید درست به همین اندازه و در جهت عکس باشد.

مقدار دقیق نیروی وارد به بار q_d برابر است با جمع نیروی $q_d\left(q_b+q_c\right)/4\pi\varepsilon_0 r^2$ و نیرویی که بار کل موجود در سطح و در درون رسانای A اگر صفر می‌بود (در این مثال (q_b+q_c) به بار q_d وارد می‌کرد. این نیروی آخری را می‌توان با استفاده از روش بارهای تصویر حساب کرد.

⁕ ۴-۶ روش بارهای تصویر[◊]

قضیه‌ی یگانگی پروانه‌ی تجسم کردن است. می‌گوید که اگر تابع پتانسیلی بیابید که شرایط مرزی را راضی کند، آن تابع درست و یگانه برای پاسخ مسئله است. یکی از ساده‌ترین مثال‌های کلاسیک برای نمایش این دستاورد و سودمندی آن، یافتن پتانسیل در بالای صفحه‌ی رسانای بینهایت گسترده و بار نقطه‌ای در فاصله‌ی h از صفحه است. در شکل (۷-۶) صفحه‌ی رسانای گسترده‌ای نشان داده شده است که بار نقطه‌ای و مثبت q به فاصله‌ی h از آن قرار دارد. فرض کنید صفحه به زمین وصل است و در نتیجه، در پتانسیل صفر قرار دارد. هدف ما یافتن پتانسیل در فضای بالای صفحه است.



شکل ۷-۶ صفحه‌ی رسانا و بار نقطه‌ای

مسئله چندان ساده نیست، چون بار q در بالای صفحه، میدان الکتریکی تولید می‌کند. این میدان سبب می‌شود که بارهای منفی رسانا به سوی بار مثبت q رانده شوند. یعنی، بار مثبت q مقداری بار منفی در روی رسانا القاء خواهد کرد. اما انتظار نداریم که بارهای منفی درست در زیر بار مثبت و در روی رسانا جمع بشوند. اگر رسانا وجود نداشت، پتانسیل حاصل از بار q برابر $q/4\pi\varepsilon_0 r$ می‌شد (r فاصله از بار q است). اما وجود بارهای القائی در روی سطح رسانا هم اینک در پتانسیل سهم خواهد داشت. پرسش واقعی این است که چگونه می‌توانیم سهم بارهای القایی را در پتانسیل کل حساب کنیم؟

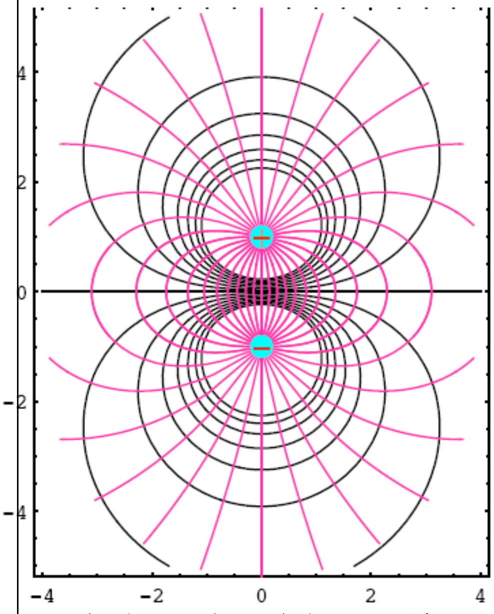
از نظر ریاضی باید معادله‌ی پوواسن را در ناحیه‌ی $z>0$ با شرایط مرزی $V=0$ در $z=0$ و $V\to 0$ برای فاصله‌های دور از بار q (یا $x^2+y^2+z^2\gg h^2$) حل کنیم. قضیه‌ی یگانگی ۱ می‌گوید که فقط یک تابع وجود دارد که در این شرایط مرزی صدق می‌کند. اگر با شگرد یا گمانی زیرکانه بتوانیم ایت تابع را بیابیم، پاسخ را یافته‌ایم.

در این گونه مسئله‌ها شگرد این است که مسئله‌ی اصلی را فراموش کنیم و مسئله‌ی دیگری بسازیم که همان شرایط مرزی را داشته باشد و این مسئله‌ی جایگزین را حل کنیم. چگونه می‌توان آرایه‌ای از بارهای الکتریکی ساخت که پتانسیل آنها در $z=0$ برابر صفر باشد و در بینهایت پتانسیل به صفر میل کند؟ توجه کنید که اینها شرایط مرزی مسئله‌ی اصلی (رسانا و بار نقطه‌ای) است. پاسخ به نظر بدیهی است. اگر دو بار نقطه‌ای $+q$ در $z=h$ و بار $-q$ در $z=-h$ در نظر بگیریم (بدون صفحه‌ی رسانا) پتانسیل این دو بار در $z=0$ برابر صفر می‌شود و در بینهایت به صفر میل می‌کند. چون این همان شرایط مسئله‌ی اصلی ماست، قضیه‌ی یگانگی تضمین می‌کند که پاسخ درست مسئله‌ی اصلی (رسانا و بار نقطه‌ای) است. حالا یافتن پتانسیل دو بار (مسئله‌ی جایگزین) ساده است:

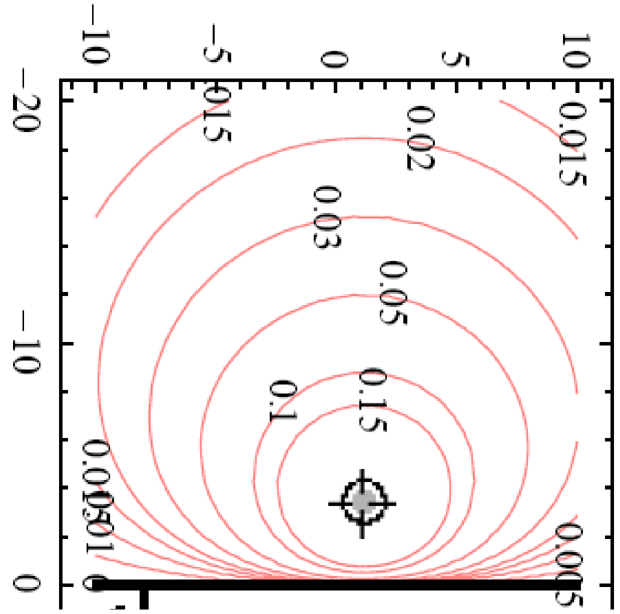
$$V\left(x,y,z\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-h\right)^2}}+\frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z+h\right)^2}}\right] \qquad (۶-۱۷)$$

[◊] The method of image charges

توجه کنید که به ازای $z=0$ داریم $V=0$ و در فاصله‌های دور، یعنی $x^2+y^2+z^2 \gg h^2$ ، پتانسیل $V \to 0$ می‌گراید. خط‌های میدان و سطح‌های هم‌پتانسیل مسئله‌ی جایگزین در شکل (۸-۶) دیده می‌شوند. قسمت بالای این شکل ($z \geq 0$) در شکل (۹-۶) نشان داده شده است



شکل ۸-۶ خط‌های میدان و سطح‌های پتانسیل دو بار نقطه‌ای q و $-q$



شکل ۹-۶ رسانا، بار نقطه‌ای و سطح‌های هم‌پتانسیل

همانگونه که دیده می‌شود در سطح رسانا پتانسیل صفر است و با دور شدن از بار پتانسیل به صفر میل می‌کند و فقط بار $+q$ در $(0,0,h)$ وجود دارد. اینها دقیقا ویژگی‌های مسئله‌ی اصلی ماست. نیمی زیرین ($z<0$) شکل (۸-۶) کاملا چیز دیگری است، اما این برای ما مهم نیست، ما در پی یافتن پتانسیل در نیمه‌ی بالایی بودیم و آن را یافتیم.

حالا می‌توانیم در باره‌ی توزیع بارهای القایی در سطح رسانا هم سخن بگوییم. به یاد بیاورید که ما می‌دانستیم که بار q سبب القاء بار در سطح رسانا می‌شود، اما نمی‌توانستیم بگوییم چقدر است و چگونه توزیع شده است. بگذارید توزیع بار سطحی القایی را در روی رسانا حساب کنیم. با دانستن پتانسیل، این کار آسان و سر راست است. با استفاده از رابطه‌ی (۱۱۶-۵) داریم

$$\frac{\partial V}{\partial n}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (۶-۱۸)$$

که در آن $\partial V/\partial n$ مشتق پتانسیل در جهت عمود بر سطح است. در مثال ما جهت عمودی راستای z است. در نتیجه،

$$\sigma=-\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0} \qquad (۶-۱۹)$$

پتانسیل V با رابطه‌ی (۱۷-۶) داده شده است. مشتق آن نسبت به z عبارت است از

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q(z-h)}{\left(x^2+y^2+(z-h)^2\right)^{3/2}}+\frac{q(z+h)}{\left(x^2+y^2+(z+h)^2\right)^{3/2}}\right] \qquad (۶-۲۰)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(x,y)=-\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{1}{2\pi}\frac{-qh}{\left(x^2+y^2+h^2\right)^{3/2}} \qquad (۶-۲۱)$$

می‌بینیم که بار القایی منفی است و در $x=y=0$ بیش‌ترین چگالی را دارد. همچنین توجه کنید که همه‌ی بار درست در این

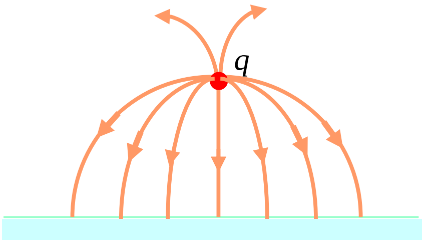
نقطه و در زیر بار $+q$ انباشته نشده است.

بار کل القایی را اینک می‌توانیم حساب کنیم. سطح رسانا را به حلقه‌های به شعاع r و پهنای dr تقسیم کنید و بر روی r از صفر تا بینهایت انتگرال بگیرید. چون $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$ است، به‌دست می‌آید

$$Q=\int_{۰}^{\infty}\sigma\cdot ۲\pi r\,dr=-qh\int_{۰}^{\infty}\frac{r\,dr}{\left(r^{۲}+h^{۲}\right)^{۳/۲}}=\left.\frac{qh}{\left(r^{۲}+h^{۲}\right)^{۳/۲}}\right|_{۰}^{\infty}=-q \qquad (۶-۲۲)$$

مقداری که انتظارش را داشتیم.

نکته: شرایط مرزی در اینجا دقیقا همان نیست که در قضیه‌ی یگانگی در نظر گرفتیم. پتانسیل صفحه‌ی رسانا معین و برابر صفر است. اما یک بار نقطه‌ای (بار q) هم داریم که در روی آن پتانسیل به بینهایت میل می‌کند. برای گریز از این دشواری، بار نقطه‌ای را می‌توان حالت حدی کره‌ی رسانای کوچکی در نظر گرفت که بار ثابت q دارد. این وضعیتی را پیش رو می‌گذارد که شرایط مرزی ترکیبی از پتانسیل ثابت در روی یک رسانا و بار معین در روی رسانای دیگر است. با این حال، قضیه‌ی یگانگی۲ تضمین می‌کند که اگر میدان الکتریکی را برای مسئله‌ی جایگزین حل کنیم، پاسخ درست و یگانه‌ای برای مسئله‌ی اصلی به‌دست خواهیم آورد. به یاد بیاورید که میدان الکتریکی بر سطح رسانا عمود است. شکل (۶-۱۰) میدان الکتریکی را در بالای صفحه نشان می‌دهد. می‌توانیم به مسئله‌ی جایگزین برگردیم و اندازه و جهت میدان را در هر نقطه‌ی دلخواه، با استفاده از قانون کولمب حساب کنیم. نقطه‌ای را برابر شکل (۶-۱۱) در روی سطح و به فاصله‌ی r از مبداء مختصات در نظر بگیرید. فاصله تا بار q برابر $\sqrt{r^{۲}+h^{۲}}$ است. مولفه‌ی z میدان حاصل از بار q در نقطه‌ای **روی سطح** رسانا

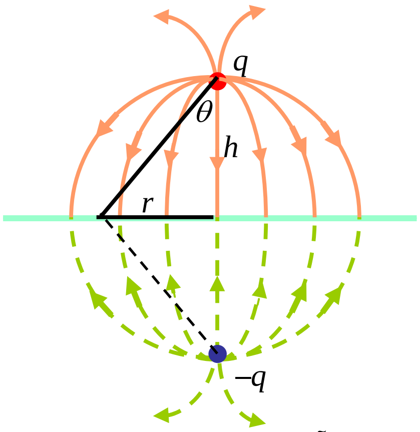


شکل ۱۰-۶ خطهای میدان در بالای صفحه‌ی رسانا

$$E_{z,q}\frac{-q\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_{۰}\left(r^{۲}+h^{۲}\right)} \qquad (۶-۲۳)$$

است. مولفه‌ی z میدان ناشی از "بار تصویر" $-q$ واقع در زیر صفحه هم همین اندازه است. بنابراین، میدان کل در روی سطح رسانا برابر است با

$$\begin{aligned}E_{z}&=\frac{-۲q\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_{۰}\left(r^{۲}+h^{۲}\right)}\\&=\frac{-۲q}{۴\pi\varepsilon_{۰}\left(r^{۲}+h^{۲}\right)}\frac{h}{\left(r^{۲}+h^{۲}\right)^{۱/۲}}=\frac{-qh}{۲\pi\varepsilon_{۰}\left(r^{۲}+h^{۲}\right)^{۳/۲}}\end{aligned} \qquad (۶-۲۴)$$



شکل ۱۱-۶ آرایه‌ی جایگزین و خطهای میدان

اما همچنین می‌دانیم که میدان الکتریکی درست در بالای سطح برابر $\sigma/\varepsilon_{۰}$ است. بنابراین،

$$\sigma=\varepsilon_{۰}E_{z}=\frac{-qh}{۲\pi\left(r^{۲}+h^{۲}\right)^{۳/۲}} \qquad (۶-۲۵)$$

است که همان پاسخ پیشین است. انتگرال آن روی سطح بار کل القایی را به‌دست می‌دهد که برابر $-q$ است. این بدان معنی است که همه‌ی شار (خطهای میدان) که از بار q سرچشمه می‌گیرند، در روی رسانا پایان می‌یابند.♣

جمع‌بندی کنیم: اگر بخواهیم پتانسیل الکتریکی حاصل از رسانا و مجموعه‌ای از بارها را در بیرون رسانا حساب کنیم، بیش‌تر وقت‌ها می‌توانیم پتانسیل مورد نظر را که در شرایط مرزی صدق می‌کند، با به کار گیری بارهای تصویر بسازیم. اگر بتوانیم بارهای تصویر درست را در مکان‌های مناسب آن قرار دهیم که پتانسیل آنها شرایط مرزی را راضی کند، بنابه قضیه‌ی یگانگی، باید تابع پتانسیل درستی برای بیرون رسانا باشد. توجه کنید که نمی‌توان از بار تصویر استفاده کرد و پتانسیل را در ناحیه‌ای که بار تصویر قرار دارد، به‌دست آورد. در مثال بالا (رسانای تخت و بار q در بالای آن) بار تصویر $-q$ را در $(\circ,\circ,-h)$ قرار دادیم، این آرایش، در بالای صفحه، پتانسیل درستی به‌دست داد. در زیر صفحه، پتانسیل مقدار ثابتی است و این پتانسیلی نیست که از بار واقعی q در $(\circ,\circ,+h)$ وبار تصویر $-q$ را در $(\circ,\circ,-h)$ به‌دست می‌دهد. در بیش‌تر حالت‌ها، معمولا پتانسیل در ناحیه‌ای که بار تصویر قرار می‌گیرد، مقدار ثابتی است، در نتیجه، تاثیری نخواهد داشت. در این گونه مسئله‌ها، فیزیک جالب در سطح و بیرون رسانا روی می‌دهد.

مثال ۲-۶ نیرو و انرژی در مسئله‌ی صفحه‌ی رسانای تخت گسترده و بار q در فاصله‌ی h در بالای آن، دیدیم که مقداری بار منفی در سطح رسانا القاء می‌شود. این بارهای منفی به بار q نیروی ربایشی وارد می‌کنند. آن را حساب کنید.

حل: نیرویی که به بار q وارد می‌شود برابر $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ است. $\mathbf{E}$ میدانی است که بارهای القایی سطح رسانا تولید می‌کنند. این نیرو را می‌توان از بار تصویر حساب کرد.

$$\mathbf{F}=-\frac{q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_\circ(۲h)^{۲}}\hat{\mathbf{z}} \qquad (۶-۲۶)$$

نکته: شاید گمان کنید که همه چیز در مسئله‌ی جایگزین (بار اولیه بعلاوه‌ی بار تصویر و بدون رسانا) و مسئله‌ی اصلی (یک بار و صفحه‌ی رسانا) یکسان است (به هر حال دیدیم، که میدان الکتریکی و پتانسیل یکسان بودند). این گمان درست نیست. انرژی در دو آرایه متفاوت اند. انرژی در مسئله‌ی جایگزین، برابر است با مقدار کار لازم برای آوردن بار q از بینهایت و قرار دادن آن در مکان $(\circ,\circ,h)$ و قرار دادن بار $-q$ را در $(\circ,\circ,-h)$. کار لازم برای اولی صفر است و کار لازم برای دومی

$$W=-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q^{۲}}{۲h} \qquad (۶-۲۷)$$

است. اما در مسئله‌ی اصلی، یعنی بار q در $(\circ,\circ,h)$ و صفحه‌ی رسانا در $x=y=\circ$ تنرژی عبارت است از

$$W=\int_\circ^h \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^h\frac{q^{۲}}{۴z^{۲}}dz=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(-\frac{q^{۲}}{۴z}\right)\Bigg|_\circ^\infty=-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q^{۲}}{۴h} \qquad (۶-۲۸)$$

این مقدار نصف مقداری است که در رابطه‌ی (۶-۲۷) برای مسئله‌ی جایگزین به‌دست آوردیم. چرا چنین است؟ به یاد بیاورید که انرژی الکتروستاتیکی در میدان الکتریکی ذخیره می‌شود و داریم

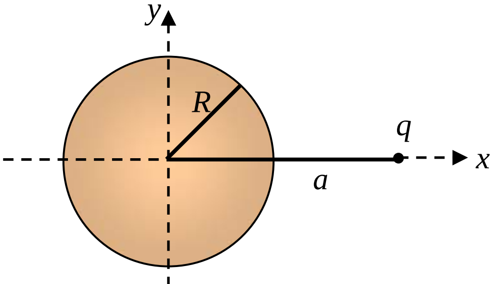
$$W=\frac{\varepsilon_\circ}{۲}\int_\infty E^{۲}d\tau \qquad (۶-۲۹)$$

که در آن انتگرال بر روی تمام فضا گرفته می‌شود. در مسئله‌ی جایگزین میدان را باید برای هر دوی $z>\circ$ و $z<\circ$ در نظر بگیریم، اما در مسئله‌ی اصلی، میدان فقط در ناحیه‌ی $z>\circ$ وجود دارد.♣

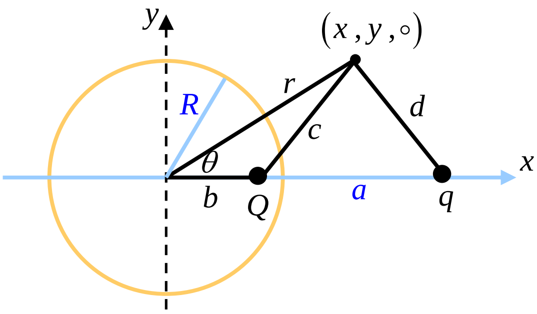
مثال ۳-۶ کره‌ی رسانا و بار q: پوسته‌ی کره‌ی رسانایی به شعاع R به زمین وصل است و در نتیجه، در پتانسیل صفر

است. بار نقطه‌ای q به فاصله‌ی $a > R$ در بیرون کره قرار دارد. با استفاده از روش بارهای تصویر، پتانسیل را در همه‌جا حساب کنید.

حل۱: بار نخست که من این مسئله را حل کردم، از روشی که در اینجا توضیح می‌دهم استفاده کردم. اما راه کوتاه‌تری هم وجود دارد که در حل ۲ به آن می‌پردازم. مسئله را با مختصات شکل (۱۲-۶) در نظر بگیرید. برای یافتن پتانسیل از دو واقعیت بهره خواهیم گرفت: پتانسیل در سطح رسانا مقدار ثابتی است. در این مسئله، پتانسیل در سطح رسانا صفر است و این که میدان الکتریکی باید بر سطح رسانا عمود باشد. پیش از انکه بخواهیم محاسبه‌ای انجام بدهیم، بهتر است حدس بزنیم که کجا باید بار تصویر را قرار دهیم (بنا به قضیه‌ی یگانگی، اگر بتوانیم با بارهای تصویر میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی بسازیم که ویژگی‌های رسانا را، یعنی شرایط مرزی را برآورده کند، باید میدان و پتانسیل درست باشند.) اگر بار تصویر را در بیرون کره قرار دهیم، دو نقطه‌ی $(R,0,0)$ و $(-R,0,0)$ که در دو انتهای روبروی کره اند، هرگز نمی‌توانند در یک پتانسیل باشند. بنابراین، بار تصویر را باید در جایی در درون کره قرار دهیم. بنا به تقارن، بار تصویر باید در روی محور x باشد، چون پتانسیل در $y<0$، قرینه‌ی پتانسیل در $y>0$ است. پس، برای این که پتانسیل را در همه‌جای فضا تعیین کنیم، لازم است که بار تصویر بار تصویر چه اندازه باید باشد و در کجای محور x قرار گیرد. بار تصویر را Q بنامید و مکان آن را با b نشان دهید. شکل (۱۳-۶) را ببینید. برای سادگی، محاسبه را در $z=0$ انجام خواهیم داد. برای حالا بپذیرید که این گزینه از عمومیت محاسبه نمی‌کاهد. پتانسیل ناشی از دو بار q و Q (اما بدون کره‌ی رسانا) در نقطه‌ی $(x,y,0)$ عبارت است از



شکل ۱۲-۶ کره‌ی رسانا در $V=0$ و بار q



شکل ۱۳-۶ پتانسیل در نقطه‌ی $(x,y,0)$

$$V(x,y,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{c}+\frac{q}{d}\right] \qquad (۶-۳۰)$$

از قانون کسینوس‌ها برای یافتن c و d استفاده خواهیم کرد. داریم

$$c^2=r^2+b^2-2rb\cos\theta,\quad \cos\theta=x/r\ ,\ r^2=x^2+y^2 \quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{x^2+y^2+b^2-2bx} \qquad (۶-۳۱)$$

$$d^2=r^2+a^2-2ra\cos\theta,\quad \cos\theta=x/r\ ,\ r^2=x^2+y^2 \quad\Rightarrow\quad d=\sqrt{x^2+y^2+a^2-2ax} \qquad (۶-۳۲)$$

$$\Rightarrow\quad V(x,y,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+b^2-2bx}}+\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+a^2-2ax}}\right] \qquad (۶-۳۳)$$

در سطح رسانا پتانسیل صفر است، بنابراین به ازای $x^2+y^2=R^2$ باید داشته باشیم، $V=0$. در نتیجه،

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+b^2-2bx}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2ax}}\quad\Rightarrow\quad Q^2\left(R^2+a^2-2ax\right)=q^2\left(R^2+b^2-2bx\right) \qquad (۶-۳۴)$$

حالا از واقعیت دوم استفاده می‌کنیم که می‌گوید میدان باید بر سطح رسانا عمود باشد. این بدان معنی است که در نقطه‌ی $(0,R)$ میدان باید عمودی باشد و برای این وضعیت، مولفه‌هاافقی میدان‌های Q و q باید یکدیگر را حذف کنند. نخست میدان

هر یک از این دو بار را حساب کنید. داریم

$$\mathbf{E}_q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}\hat{\mathbf{d}}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q(x-a)}{(x^2+y^2+a^2-2xa)\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\hat{\mathbf{x}}+\frac{qy}{(x^2+y^2+a^2-2xa)\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\hat{\mathbf{y}}\right] \qquad (6\text{-}35)$$

$$\mathbf{E}_Q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}\hat{\mathbf{c}}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q(x-b)}{(x^2+y^2+b^2-2xb)\sqrt{(x-b)^2+y^2}}\hat{\mathbf{x}}+\frac{Qy}{(x^2+y^2+b^2-2xb)\sqrt{(x-b)^2+y^2}}\hat{\mathbf{y}}\right] \qquad (6\text{-}36)$$

به ازای $x=0$ و $y=R$ مولفه‌های x دو میدان بالا باید یکدیگر را حذف کنند. در نتیجه، اگر در رابطه‌ی

$$\frac{Q(x-b)}{(x^2+y^2+b^2-2xb)\sqrt{(x-b)^2+y^2}}=-\frac{q(x-a)}{(x^2+y^2+a^2-2xa)\sqrt{(x-a)^2+y^2}} \qquad (6\text{-}37)$$

قرار دهیم $x=0$ و $y=R$ خواهیم داشت

$$\frac{Qb}{(R^2+b^2)^{3/2}}=-\frac{qa}{(R^2+a^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad Q=-\frac{qa(R^2+b^2)^{3/2}}{b(R^2+a^2)^{3/2}} \qquad (6\text{-}38)$$

(**نکته**: می‌توانستیم از $\mathbf{E}=-\vec{\nabla}V$ هم استفاده کنیم و مولفه‌ی x میدان الکتریکی را مساوی صفر قرار دهیم.♣)

حال این مقدار را در رابطه‌ی (۳۴-۶) جایگزین کنید. به‌دست می‌آید

$$\frac{q^2a^2(R^2+b^2)^3}{b^2(R^2+a^2)^3}(R^2+a^2-2ax)=q^2(R^2+b^2-2bx) \qquad (6\text{-}39)$$

اما رابطه‌ی (۳۸-۶) به ازای $x=0$ برقرار بود. بنابراین، در اینجا هم اگر $x=0$ قرار دهیم، رابطه‌ی (۳۹-۶) باید برقرار باشد:

$$\Rightarrow \quad \frac{q^2a^2(R^2+b^2)^3}{b^2(R^2+a^2)^3}(R^2+a^2)=q^2(R^2+b^2) \quad \Rightarrow \quad a^2(R^2+b^2)^2=b^2(R^2+a^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad b^2=\frac{R^4+a^4\pm(R^4-a^4)}{2a^2} \quad \begin{cases} b^2=a^2 \\ b^2=R^4/a^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b=\pm a \\ \boxed{b=\pm R^2/a} \end{cases} \qquad (6\text{-}40)$$

توجه کنید که اگر $b=a$ باشد، خواهیم داشت $Q=-q$ و این سبب می‌شود که پتانسیل در روی رسانا صفر باشد. این البته پاسخ است، اما پاسخ بدیهی است. اگر $b=-a$ باشد، پتانسیل فقط در $x=0$ برابر صفر می‌شود. پس، این پاسخ پذیرفتنی نیست. بنابراین، پاسخ $b=\pm R^2/a$ را در نظر می‌گیریم و آن را در رابطه‌ی (۳۸-۶) قرار می‌دهیم تا Q را بیابیم.

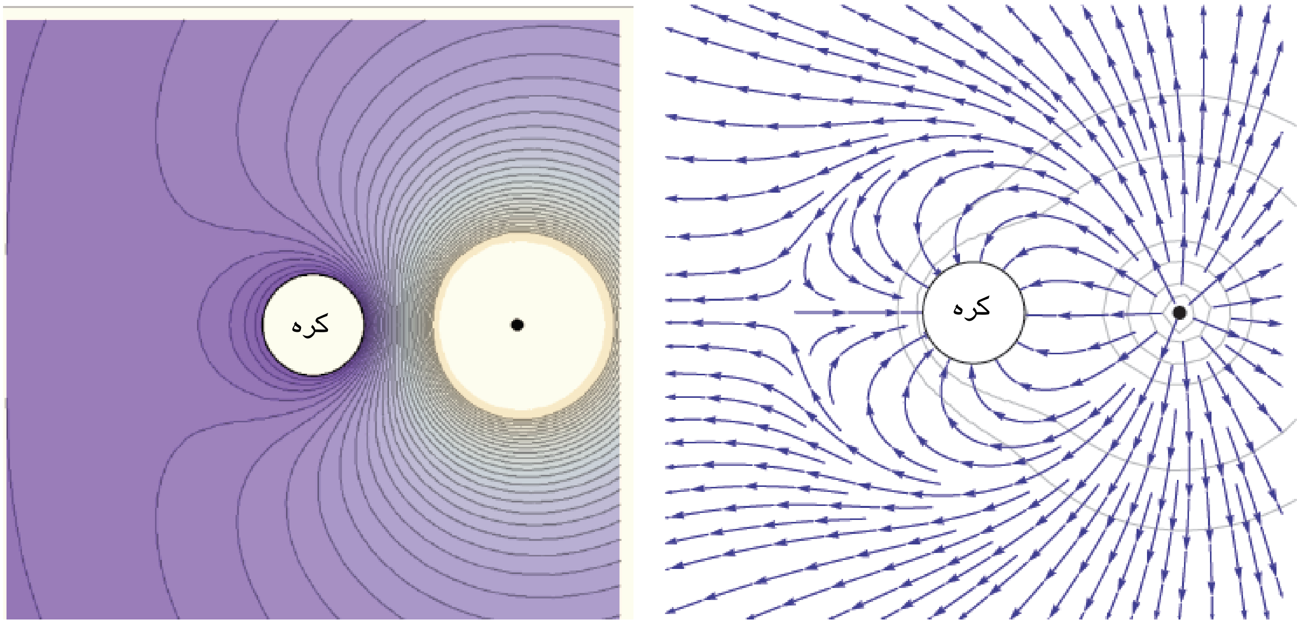
$$Q=\mp\frac{qa^{2}\left(R^{2}+R^{4}/a^{2}\right)^{3/2}}{R^{2}\left(R^{2}+a^{2}\right)^{3/2}}=\boxed{\mp\frac{qR}{a}} \qquad (٦-٤١)$$

حال که مقدار بار تصویر Q و مکان b آن را یافتیم، می‌توانیم پتانسیل را در نقطه‌ی دلخواه (x,y,z) در بیرون کره‌ی رسانا حساب کنیم:

$$V_{\text{Out}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\left[\frac{q}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}+a^{2}-2xa}}-\frac{qR}{a\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}+R^{4}/a^{2}-2xR^{2}/a}}\right] \qquad (٦-٤٢)$$

توجه کنید که به ازای $x^{2}+y^{2}+z^{2}=R^{2}$ داریم $V_{\text{Out}}=0$ که نتیجه‌ی دلخواه است و در بنابراین، با گزینه‌ی $z=0$ در آغاز حل مسئله، چیزی از دست ندادیم. همچنین باید بگویم که پتانسیل در درون کره، $V_{\text{In}}=0$ است، چون نمی‌توانیم از روش بار تصویر استفاده کنیم و در ناحیه‌ای که بار تصویر قرار دارد، پتانسیل را حساب کنیم.

در شکل (١٤-٦) نمودار پتانسیل الکتریکی و خط‌های میدان برای $a=4R$ نشان داده شده اند. در نمودار پتانسیل، نمودار سمت چپ، ناحیه‌ی سفید پیرامون بار نقطه‌ای در اثر محدودیت محاسباتی در *Mathematica* است. تجسم کنید که با نزدیک شدن به بار نقطه‌ای پتانسیل به بینهایت میل می‌کند. همچنین توجه کنید که در نمودار خط‌های میدان، این خط‌ها بر پوسته‌ی کروی عمود اند. به گسستگی خط‌های میدان در روی سطح پوسته‌ی کروی رسانا هم توجه کنید. این گسستگی به چه معنی است؟



شکل ١٤-٦ (راست): خط‌های میدان الکتریکی. (چپ): پتانسیل الکتریکی

حل۲: می‌توانستیم دو نقطه‌ای را برگزینیم که می‌دانیم پتانسیل در آنجا چگونه باید باشد و سپس Q و b را چنان بیابیم که در این نقاط پتانسیل را به‌دست بدهد. بعد از آن می‌توانیم ببینیم که آیا این پتانسیل شرایط مرزی را راضی می‌کند یا نه.
می‌دانیم که در نقاط $(R,0,0)$ و $(-R,0,0)$ پتانسیل صفر است، چون این دو نقطه‌ی ساده در روی کره‌ی رسانا هستند. این دو نقطه دو معادله به‌دست می‌دهد تا دو مجهول Q و b را پیدا کنیم.

$$V\left(R,0,0\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{a-R}+\frac{Q}{R-b}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad Q=-q\frac{R-b}{a-R} \qquad (6-43)$$

$$V\left(-R,0,0\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{a+R}+\frac{Q}{R+b}\right]=0 \qquad (6-44)$$

اگر مقدار Q را از رابطه‌ی (۴۳-۶) در معادله‌ی (۴۴-۶) قرار دهیم خواهیم داشت

$$\frac{q}{a+R}-\frac{q\left(R-b\right)}{\left(b+R\right)\left(a-R\right)}=0 \quad\Rightarrow\quad \left(b+R\right)\left(a-R\right)=\left(R-b\right)\left(a+R\right)$$

$$\Rightarrow\quad 2ab=2R^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{b=\frac{R^2}{a}} \quad ; \quad Q=-q\frac{R-\frac{R^2}{a}}{a-R}=\boxed{-q\frac{R}{a}} \qquad (6-45)$$

که همان پاسخ‌های حل ۱ اند.

مثال ۴-۶ بازهم پوسته‌ی رسانا: پوسته‌ی کروی رسانای مثال ۳-۶ را دوباره در نظر بگیرید. نیرویی را که کره به بار q وارد می‌کند، حساب کنید. توزیع بار روی پوسته را حساب کنید. اگر پوسته به زمین وصل نبود و بار Q_0 داشت، از چه آرایش بار تصویر می‌بایست استفاده می‌کردید؟

حل: نیروی وارد به بار q همان نیرویی است که بار تصویر جایگزیده در $\left(b,0,0\right)$ به آن وارد می‌کند، چون میدانی را که بار q بر اثر کره‌ی رسانا می‌بیند، همان میدانی است که در نبود کره‌ی رسانا بار تصویر تولید می‌کند. بنابراین،

$$\mathbf{F}_q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{\left(a-b\right)^2}\hat{\mathbf{x}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2Ra}{\left(a^2-R^2\right)^2}\hat{\mathbf{x}} \qquad (6-46)$$

برای یافتن توزیع بار روی پوسته‌ی رسانا از گسستگی میدان الکتریکی در روی سطح رسانا استفاده خواهیم کرد. می‌دانیم که $\Delta\mathbf{E}_\perp\equiv\Delta\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\sigma/\varepsilon_0$ است ($\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح است). می‌دانیم که میدان الکتریکی در درون رسانا صفر است. پس، تغییر در میدان الکتریکی با میدان درست در بیرون سطح رسانا برابر است. در مثال ۳-۶ میدان $\mathbf{E}$ را حساب کردیم (از $\mathbf{E}=-\overrightarrow{\nabla V}$ هم می‌توانیم استفاده کنیم.) در هر حال به‌دست می‌آید

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}=$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(x-a,y,z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2-2xa\right)^{3/2}}-\frac{R\left(x-R^2/a,y,z\right)}{a\left(x^2+y^2+z^2+R^4/a^2-2xR^2/a\right)^{3/2}}\right]\cdot\frac{\left(x,y,x\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\left[\frac{x^2-ax+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2-2xa\right)^{3/2}}-\frac{R\left(x^2+y^2+z^2-xR^2/a\right)}{a\left(x^2+y^2+z^2+R^4/a^2-2xR^2/a\right)^{3/2}}\right] \qquad (6-47)$$

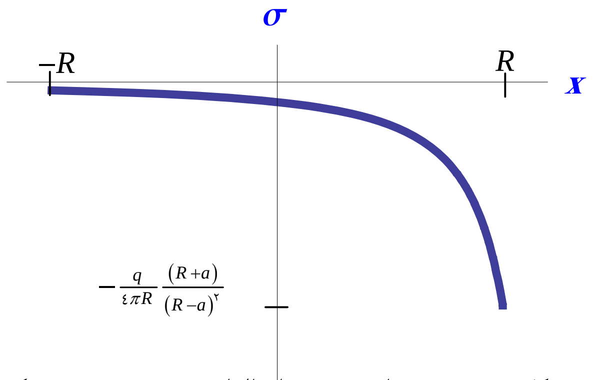
در رابطه‌ی بالا از بردار شعاعی برای $\hat{\mathbf{n}}$ استفاده کردیم. حالا باید رابطه‌ی بالا را در سطح کره، یعنی در $x^2+y^2+z^2=R^2$ حساب کنیم. خواهیم داشت

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R}\left[\frac{R^2-ax}{\left(R^2+a^2-2ax\right)^{3/2}}-\frac{R^2-xR^2/a}{a\left(R^2+R^4/a^2-2xR^2/a\right)^{3/1}}\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R}\left[\frac{R^2-ax}{\left(R^2+a^2-2ax\right)^{3/2}}-\frac{R^2-xR^2/a}{\left(R^2/a^2\right)\left(a^2+R^2-2ax\right)^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R}\left[\frac{R^2-a^2}{\left(R^2+a^2-2ax\right)^{3/2}}\right]=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\ \Rightarrow\ \boxed{\sigma=\frac{q}{4\pi R}\left[\frac{R^2-a^2}{\left(R^2+a^2-2ax\right)^{3/2}}\right]} \qquad (٦-٤٨)$$

در شکل (٦-١٥) نمودار توزیع بار بر روی سطح رسانا دیده می‌شود. می‌توانیم ببینیم که آیا این یافته با مقدار کل بار در روی پوسته سازگار است یا نه. برای محاسبه‌ی بار کل از σ بر روی سطح رسانا انتگرال بگیرید. انتگرال را در مختصات کروی حساب کنید. چون محور x را به دلخواه برگزیدیم، بهتر است آن را با $z=R\cos\theta$ جایگزین بکنیم تا محاسبه‌ی انتگرال‌ساده‌تر بشود.



شکل ٦-١٥ نمودار توزیع بار القایی بر روی پوسته کروی

$$Q_{tot}=\int_S\sigma da=\frac{q}{4\pi R}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\left[\frac{R^2-a^2}{\left(R^2+a^2-2aR\cos\theta\right)^{3/2}}\right]R^2\sin\theta d\theta d\phi \qquad (٦-٤٩)$$

با تغییر متغیر $u=R^2+a^2-2aR\cos\theta\ \Rightarrow\ du=2aR\sin\theta d\theta$ خواهیم داشت

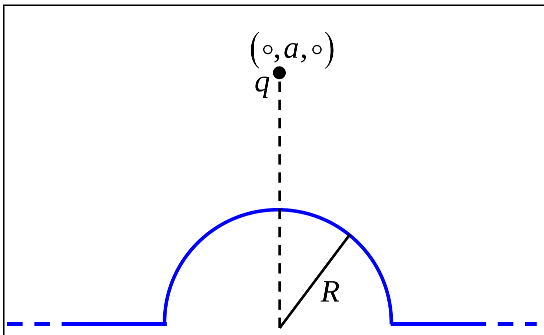
$$Q_{tot}=\frac{q}{4a}\int_{(r-a)^2}^{(R+a)^2}\frac{R^2-a^2}{u^{3/2}}du=-\frac{q}{2a}\left(R^2-a^2\right)u^{-1/2}\Big|_{(r-a)^2}^{(R+a)^2}=-\frac{q}{2a}\left(R^2-a^2\right)\left[\frac{1}{R+a}-\frac{1}{|R-a|}\right]$$

$$\Rightarrow\ Q_{tot}=-\frac{q}{2a}\left[R-a+R+a\right]=-q\frac{R}{a} \qquad (٦-٥٠)$$

پس، به همان مقدار بار کل می‌رسیم که انتظار داشتیم.

نکته: اگر پوسته به زمین وصل نبود (در پتانسیل صفر نبود) و بار $Q_\circ$ می‌داشت، کافی بود یک بار تصویر دیگری با مقدار مناسب در مرکز کره قرار می‌دادیم تا مقدار بار روی کره را از مقدار $-qR/a$ که به‌دست آوردیم به مقدار $Q_\circ$ برساند. پس، افزون بر بار تصویر $-qR/a$ در R^2/a به یک بار تصویر دیگری به اندازه‌ی $\boxed{Q_\circ+qR/a}$ در مرکز هم نیاز داشتیم.♣

مثال ۵-۶ صفحه‌ی رسانای بینهایت گسترده با برآمدگی: صفحه‌ی رسانای بینهایت گسترده شکل (٦-١٦) به زمین وصل است و یک برآمدگی نیم‌کره به شعاع R دارد. بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی $a>R$ از مرکز برآمدگی در مکان $(\circ,a,\circ)$ بالای برآمدگی است. با استفاده از روش بارهای تصویر پتانسیل را در همه‌جا حساب کنید.



شکل ۱۶-۶ صفحه‌ی رسانا با برآمدگی

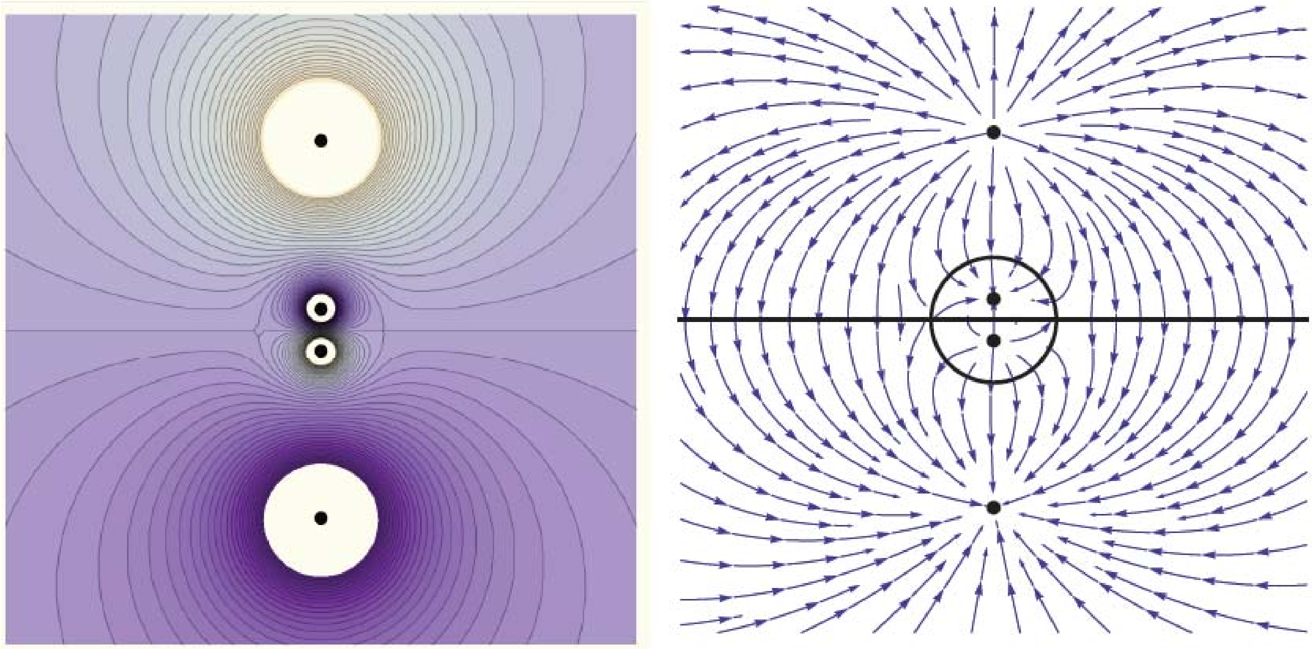
حل: این آرایه در واقع آمیزه‌ی مثال‌های ۱-۶ و ۳-۶ است. می‌توانیم از آموزه‌های آن دو مثال در اینجا استفاده کنیم. می‌خواهیم رسانا یک سطح هم‌پتانسیل باشد و میدان الکتریکی بر سطح آن عمود باشد. پتانسیل رسانا را $V=0$ قرار دهید. بنابراین، همه‌جا در زیر رسانا هم در $V=0$ خواهد بود، چون در ناحیه‌ی زیر رسانا میدان الکتریکی صفر است. ما آزادیم هر کاری در ناحیه‌ی زیر رسانا انجام دهیم تا به پتانسیل و میدان الکتریکی دلخواهمان در بالای رسانا برسیم. این اجازه را قضیه‌ی یگانگی به ما می‌دهد (اگر پاسخی یافتیم که در شرایط مرزی صدق بکند، آن پاسخ درست و یگانه است.) پس از یافتن پاسخ، می‌توانیم بگوییم که در ناحیه‌ی زیر رسانا همه‌چیز صفر است و رسانا را می‌توانیم از برهم‌نهی یک صفحه‌ی بینهایت گسترده و یک پوسته‌ی کروی بسازیم. در آغاز بخش ۴-۶ و مثال ۱-۶ دیدیم که یک بار تصویر به‌اندازه‌ی $-q$ جایگزیده در $(0,-a,0)$ لازم داریم تا پتانسیل و میدان الکتریکی درست را در بالای صفحه‌ی بینهایت گسترده متصل به زمین را به‌دست آوریم. این بار تصویر در واقع تصویر بار واقعی q در $(0,a,0)$است. در مثال ۳-۶ هم دیدیم که به بار تصویری به اندازه‌ی $-qR/a$ در مکان $(0,R^2/a,0)$ نیاز داریم تا میدان و پتانسیل مناسب ناشی از بار q واقع در $(0,a,0)$ و پوسته‌ی کروی با شعاع R را تولید کند. اما اگر این دو را باهم ترکیب کنیم، با یک دشواری روبرو خواهیم شد: با بازسازی میدان و پتانسیل برای صفحه‌ی رسانا، بار دیگری را (بار $-q$ در $(0,-a,0)$) در بیرون پوسته‌ی کروی رسانا قرار می‌دهیم. همچنین برای بازسازی میدان و پتانسیل پوسته‌ی کروی رسانا بار $-qR/a$ را در $(0,R^2/a,0)$ بالای صفحه‌ی رسانا قرار دادیم. این بارها آرایش ما را در مجموع به‌هم می‌زنند. برای این که اثر بار بار اضافی در بالای صفحه‌ی رسانا را تصحیح کنیم، می‌توانیم یک بار تصویر دیگر را با علامت مخالف درزیر صفحه و در مکان مناسب آن قرار دهیم. با این کار، بار تصویر سومی به اندازه‌ی qR/a در $(0,-R^2/a,0)$ خواهیم داشت. توجه کنید که با تصحیح کردن اثر بار تصویر واقع در بالای صفحه، اثر بار تصویر در بیرون پوسته‌ی کروی رسانا را هم تصحیح کردیم، چون به یک بار تصویر به اندازه‌ی qR/a در $(0,-R^2/a,0)$ برای میدان درست ناشی از رسانای کروی و یک بار تصویر به اندازه‌ی q در $(0,-a,0)$ نیاز داشتیم. پس، پتانسیل حاصل از بار واقعی q و رسانا در بالای رسانا همان پتانسیل ناشی ازبارهای زیر است: بار واقعی q در $(0,a,0)$، بار تصویر $-qR/a$ در $(0,R^2/a,0)$، بار تصویر qR/a در $(0,-R^2/a,0)$ و بار تصویر $-q$ در $(0,-a,0)$. سرانجام این که پتانسیل در بالای رسانا عبارت است از $(k\equiv 1/4\pi\varepsilon_0)$

$$V_{\text{above}}=\frac{kq}{\sqrt{x^2+(y-a)^2+z^2}}-\frac{kq\,R/a}{\sqrt{x^2+\left(y-R^2/a\right)^2+z^2}}+\frac{kq\,R/a}{\sqrt{x^2+\left(y+R^2/a\right)^2+z^2}}-\frac{kq}{\sqrt{x^2+(y+a)^2+z^2}} \qquad (۵۱-۶)$$

و پتانسیل در زیر رسانا $V_{\text{Below}}=0$ است.

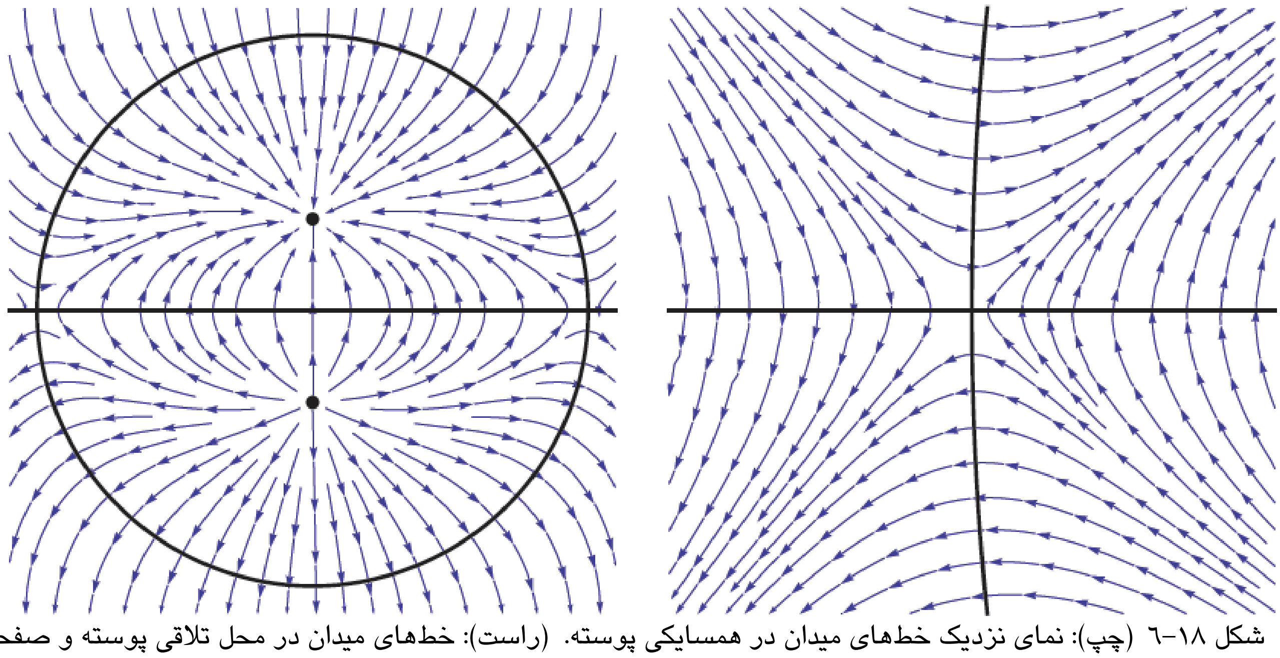
خیلی دشوار نیست که نشان دهیم به‌ازای $y=0$ پتانسیل صفر است. همچنین، می‌توانید نشان دهید که در روی پوسته، یعنی وقتی $x^2+y^2+z^2=R^2$ است، بازهم $V=0$ می‌شود. برای تمرین، می‌توانید میدان الکتریکی را از $\mathbf{E}=-\overrightarrow{\nabla V}$ به‌دست بیاورید. همچنین می‌توانید با برهم‌نهی میدان‌های چهار بار نقطه‌ای آن را حساب کنید. در نمودارهای شکل (۱۷-۶) خط‌های

میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی حاصل از چهار بار نقطه‌ای بالا نشان داده شده است. این نمودار به راستی زیباست!



شکل ۱۷-٦ (راست) خط‌های میدان ناشی از چهار بار نقطه‌ای. (چپ): پتانسیل الکتریکی چهار بار نقطه‌ای

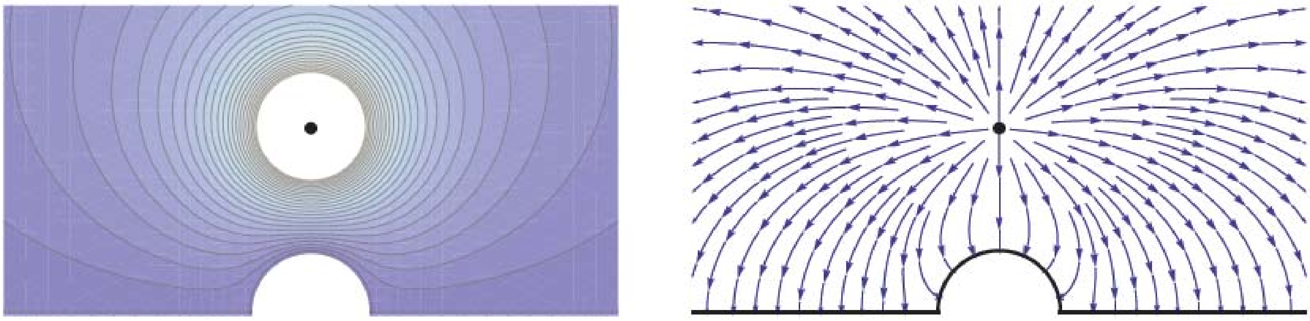
در سمت چپ شکل (۱۸-٦) نمای میدان در نزدیکی‌های برآمدگی کروی دیده می‌شود. توجه کنید که به‌راستی میدان بر سطح پوسته‌ی کروی و بر صفحه‌ی رسانا عمود است. نمودار سمت راست نمای نزدیک میدان در محل تلاقی پوسته‌ی کروی و



شکل ۱۸-٦ (چپ): نمای نزدیک خط‌های میدان در همسایکی پوسته. (راست): خط‌های میدان در محل تلاقی پوسته و صفحه

صفحه است. توجه کنید که درست در نقطه‌ی تلاقی میدان صفر است. باید هم این‌چنین باشد، چون تنها میدان عمود بر دو صفحه‌ی متعامد، بردار صفر است.

نمودارهای بالا به‌راستی پتانسیل و میدان الکتریکی واقعی را نشان نمی‌دهند، چون در زیر رسانا پتانسیل و میدان صفر اند. برای نمایش میدان و پتانسیل واقعی باید آنها را حذف کنیم. نمودار شکل (۱۹-۶) میدان و پتانسیل واقعی را نشان می‌دهند. به گسستگی در میدان الکتریکی در روی رساناها توجه کنید. این گسستگی چه چیزی را بیان می‌کند؟



شکل ۱۹-۶ (راست): خط‌های میدان در بالای رسانا. (چپ) نمودار پتانسیل در بالای رسانا

۵-۶ خازن و ظرفیت خازن

در آغاز این فصل و در فصل ٤ ویژگی‌های رساناها را بررسی کردیم. دیدیم که سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است، یعنی پتانسیل در روی رسانا مقدار ثابتی است. پتانسیل یک رسانای منزوی با بار Q نسبت به بینهایت مقدار معین $V_\circ$ است. بار Q با پتانسیل $V_\circ$ متناسب است. ضریب تناسب فقط به شکل رسانا بستگی دارد. ما این ضریب تناسب را ظرفیت راسانا می‌نامیم و آن را با C نشان می‌دهیم. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$Q = CV_\circ \qquad (6-52)$$

روشن است که یکای C بستگی به یکاهای $V_\circ$ و Q دارد. در یکاهای SI بار الکتریکی با کولمب و پتانسیل با ولت اندازه‌گیری می‌شود. پس، یکای ظرفیت C کولمب بر ولت است. این ترکیب یکاها نام خاصی برای خود دارد: *فاراد*. چون یک ولت برابر ژول بر کولمب است، می‌توانیم فاراد را برحسب یکاهای دیگری هم بیان کنیم: $1\,\text{farad} = 1\left(\text{C}^2.\text{s}^2/\text{kg.m}^2\right)$.

پتانسیل کره‌ی رسانا منزوی با شعاع a و بار Q نسبت به بینهایت $V_\circ = Q/4\pi\varepsilon_\circ a$ است. پس، ظرفیتش $C = Q/V_\circ = 4\pi\varepsilon_\circ a$ است.

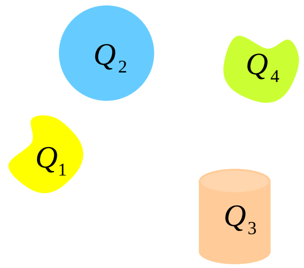
یک فاراد واحد بسیار بزرگی است، ظرفیت کره‌ای منزوی به بزرگی زمین فقط برابر است با

$$C_E = 4\pi\varepsilon_\circ a = 4\pi\left(8,85\times10^{-12}\,\tfrac{\text{C}^2\text{s}^2}{\text{kgm}^3}\right)\left(6,4\times10^{6}\,\text{m}\right) \approx 7\times10^{-4}\,\tfrac{\text{C}^2\text{s}^2}{\text{kgm}^2} = 7\times10^{-4}\,\text{farad} \qquad (6-53)$$

است. به این دلیل، از یکاهای کوچک‌تر میکروفاراد (μF) که 10^{-6} برابر یک فاراد است استفاده می‌شود. پیکوفاراد (pF) سنجه‌ی دیگری است که برابر 10^{-12} فاراد است.

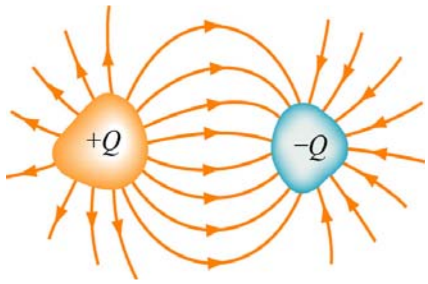
نام عمومی برای آرایه‌ای از چند رسانای باردار و پتانسیل **خازن** است. معمول‌ترین خازن‌ها شامل دو رسانا است که بارهای برابر و ناهمنام $+Q$ و $-Q$ دارند. در این حالت، ظرفیت با نسبت بار Q به اختلاف پتانسیل بین دو رسانا تعریف می‌شود. در شکل (۲۰-۶) آرایه‌ای با چهار رسانا نشان داده شده است.

خازن وسیله‌ای برای انبار کردن بار الکتریکی است. اندازه و شکل خازن‌ها متفاوت اند. اما پیکربندی بنیادی شامل دو رسانا با بارهای مساوی و ناهمنام، همانند شکل (۲۱-۶) است. خازن‌ها در صنعت الکترونیک کاربردهای فراوان دارند. ذخیره کردن



شکل ٢٠-٦ آرایه‌ی چهار رسانای

انرژی پتانسیل الکتریکی آشناترین کاربرد آن است. اگر خازن به همراه مقاومت در مدار الکتریکی به کار برود، برای به تاخیرانداختن تغییر ولتاژ، پالایش بسامدهای ناخواسته در یک سیگنال الکترونیکی، ساختن مدارهای تشدید، تقسیم کننده‌ی مستقل از بسامد و وابسته به بسامد ولتاژ را می‌توان از دیگر کاربردهای آن برشمرد. برخی از این کاربردها را در فصل‌های آینده بررسی خواهیم کرد.



شکل ٢١-٦ پیکربندی بنیادی

دو رسانای شکل (٢١-٦) را در نظر بگیرید. بار در روی یکی از این رساناها $+Q$ و در روی رسانای دیگر $-Q$ است. چون رسانا سطح هم‌پتانسیل است، اختلاف پتانسیل بین این دو رسانا کاملا تعریف شده است و می‌توان نوشت

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (٦-٥٤)$$

وقتی که خازن بی بار است، بار هر دو رسانا صفر است. در فرایند باردار کردن خازن، بار Q روی یک رسانا و بار $-Q$ در روی رسانای دیگر توزیع می‌شوند و در نتیجه، بین رساناها اختلاف پتانسیل ΔV به وجود می‌آید. رسانای با بار مثبت در پتانسیل بالاتر از رسانای با بار منفی قرار می‌گیرد. توجه کنید که چه خازن باردار باشد و چه بی‌بار، در هر دو حالت بار کل خازن صفر است.

برای این که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در فضای بین دو رسانا حساب کنیم و در نتیجه، اختلاف پتانسیل را به‌دست آوریم، باید توزیع بار را در روی رساناها بدانیم. آنچه را که می‌دانیم، مقدار کل بار در روی هر یک از رساناهاست، اما تابع توزیع بار را نمی‌شناسیم. اگر شکل رساناها نامنظم باشد، محاسبه‌ی میدان در فضای بین آنها می‌تواند بسیار پیچیده باشد و در نتیجه، یافتن اختلاف پتانسیل را هم با دشواری روبرو کند. اما از قانون کولمب یک نکته را می‌توان استنباط کرد: میدان الکتریکی با بار Q متناسب است؛ چون

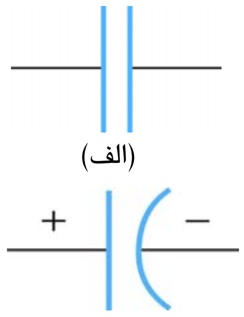
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)\rho\, d\tau \qquad (٦-٥٥)$$

است. پس، اگر چگالی توزیع بار با ضریب α افزایش (یا کاهش) پیدا کند، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و بار کل Q هم با ضریب α افزایش (یا کاهش) پیدا می‌کنند. به بیان دیگر، اگر بار Q (و به همراه آن $-Q$ را) دوبرابر کنیم، چگالی بار هم در روی این رساناها دو برابر خواهند شد. بنابراین، چون میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ با بار Q متناسب است، اختلاف پتانسیل ΔV هم با بار Q متناسب است. ضریب تناسب بین ΔV و Q **ظرفیت** آرایه‌ی رساناها (خازن) است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad (٦-٥٦)$$

C کمیت مثبتی است (توجه کنید که ΔV مثبت تعریف شده است وبرابر است با پتانسیل رسانای با بار مثبت منهای پتانسیل رسانای با بار منفی). از نظر فیزیکی، C معیار توانایی ذخیره‌ی بار الکتریکی در اختلاف پتانسیل معین ΔV است. همان‌گونه که پیش‌تر گفتم، ظرفیت C یک کمیت هندسی است. در حالت کلی، تابع شکل، ابعاد، و فاصله‌ی بین رساناهاست. در شکل‌های (٢٢-٦) نماد خازن در مدارهای الکتریکی نشان داده شده است. شکل (٢٢-٦ الف) نماد عمومی است، اما برای خازن با قطبایی

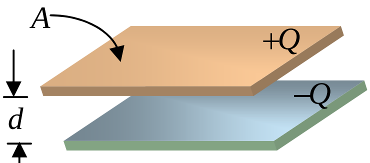
ثابت، از شکل (۲۲-٦ ب) استفاده می‌شود.



شکل ۲۲-٦ نماد خازن

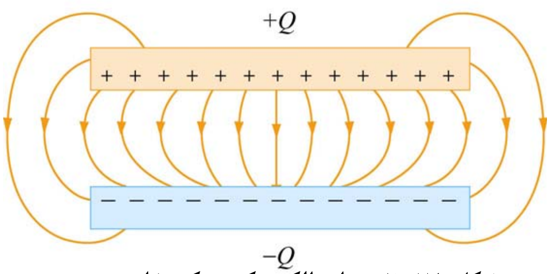
۶-۶ محاسبه‌ی ظرفیت خازن

ساده‌ترین نوع خازن از دو صفحه‌ی تخت موازی با مساحت A تشکیل شده است که به فاصله‌ی d از هم قرار دارند (شکل۲۳-٦). بار صفحه‌ی بالایی $+Q$ وبار صفحه‌ی پایینی $-Q$ است. خازن را می‌توان با وصل کردن آن به یک باتری، باردار کرد. به این وسیله اختلاف پتانسیلی بین صفحه‌ها به‌وجود می‌آید. همان‌طور که گفتیم، برای محاسبه‌ی ظرفیت C باید میدان الکتریکی بین صفحه‌ها را بدانیم. چون ابعاد صفحه‌های یک خازن واقعی محدود است در لبه‌های صفحه‌ها خط‌های میدان راست نیستند و میدان هم به طور کامل به فضای بین صفحه‌ها محدود نیست. این پدیده را **اثر لبه** می‌گویند و میدان را در حاشیه‌ی صفحه‌ها **میدان‌های چتری** می‌نامند. در شکل (۲٤-٦) خط‌های میدان الکتریکی خازن تخت به همراه اثرهای لبه و میدان‌های چتری آن دیده می‌شود. با وجود این، در محاسبه‌ای که انجام خواهیم داد، اثرهای لبه را نادیده خواهیم گرفت و به وضعیتی آرمانی خواهیم پرداخت که خط‌های میدان به درون فضای بین صفحه‌ها محدود است و در این فضا، خط‌های میدان، خط‌های راست اند. در حالت حدی که صفحه‌ها بینهایت بزرگ اند (اگر فاصله‌ی بین صفحه‌ها در مقایسه با ابعاد صفحه، خیلی کوچک باشد، این تقریب پذیرفتنی است و معمولا هم این چنین است.)،



شکل ۲۳-٦ نمای یک خازن تخت

سامانه تقارن صفحه‌ای دارد و با استفاده از قانون گوس می‌توان میدان الکتریکی را در همه‌جا به دست آورد. برابر شکل (۲۵-٦) ،سطح گوسی به صورت قوطی کبریت با مساحت رویه‌ی A' انتخاب کنید که بارهای صفحه‌ی مثبت را در برداشته باشد. بنا به قانون گوس، داریم

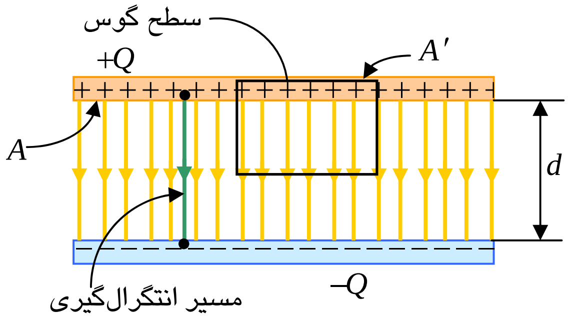


شکل ۲٤-٦ میدان الکتریکی یک خازن

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{enc}} \Rightarrow EA' = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A' \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (٦\text{-}٥٧)$$

نتیجه‌ای که پیش‌تر هم با استفاده از اصل برهم‌نهی به‌دست آورده بودیم. حالا می‌توان اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن را حساب کرد

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = Ed \qquad (٦\text{-}٥٨)$$



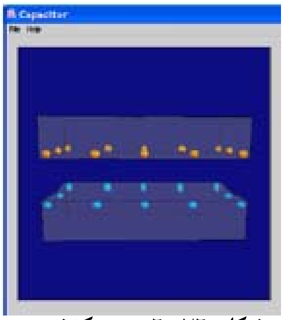
شکل ۲۵-٦ سطح گوس برای میدان بین دو صفحه

مسیر انتگرال‌گیری را در راستای خط میدان از صفحه‌ی مثبت به صفحه‌ی منفی برگزیدیم. چون جهت خط میدان همیشه از ناحیه‌ی با پتانسیل بالا به سوی ناحیه‌ی با پتانسیل پایین است، در این‌جا $V_+ > V_-$ است. اما وقتی می‌خواهیم ظرفیت C را حساب کنیم، علامت ΔV مهم نیست، و اندازه‌ی آن، $|\Delta V|$ ، کفایت می‌کند. پس داریم، $|\Delta V| = Ed$. از تعریف ظرفیت می‌توان نوشت

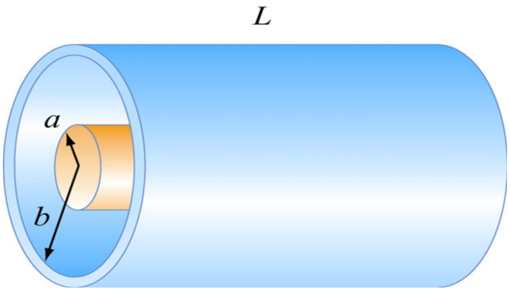
$$C \equiv \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{(\sigma/\varepsilon_\circ)d} = \frac{\varepsilon_\circ A}{d} \qquad (٦-٥٩)$$

همانطور که دیده می‌شود، ظرفیت C به ابعاد هندسی آرایه (A و d) و سرشت محیط (در ایجا خلاء: $\varepsilon_\circ$) بستگی دارد. ظرفیت به‌طور خطی با A افزایش می‌یابد؛ چون در اختلاف پتانسیل معین ΔV، صفحه‌ی بزرگ‌تر می‌تواند بارهای بیشتری داشته باشد. همچنین، C با d نسبت وارون دارد، چون به ازای بار معین Q، هرقدر d کوچک‌تر باشد اختلاف پتانسیل هم کوچک‌تر است.

یکی از پرسش‌های معمول دانشجویان این است که صفحه‌های خازن به هر حال ضخامت دارند و بار هم در روی سطح رسانا توزیع می‌شود. پس، چرا بار در رویه‌های روبروی صفحه‌های رسانا (مانند شکل ٦-٦) جمع می‌شود و در روی سطوح دور از هم انباشته نمی‌شود. برای این که به این پرسش به جا و درست پاسخ بدهیم، به یکی از چارچوب‌های شبیه‌سازی توزیع بار در خازن تخت توجه کنید [١]. این چارچوب در شکل (٦-٢٦) نشان داده شده است. برای سادگی در پی‌گیری جابه‌جایی بارها و برهم‌کنش آنها در رسانا، ١٢ بار نقطه‌ای در روی هر یک از صفحه‌ها در نظر گرفته شده است. در هر صفحه، بارها با نیروی کولمبی با هم برهم‌کنش می‌کنند. بارهای صفحه‌ی بالایی مثبت و بارهای صفحه‌ی پایین منفی است. برهم‌کنش بین بارهای هر صفحه رانشی است. بنابراین، بارها در یک صفحه ناگزیرند که فاصله‌ی میان خودشان را بیشینه کنند و به طور یکنواخت خود را در لبه‌های صفحه‌ی خود توزیع کنند. اما از سوی دیگر، بین بارهای یک صفحه و صفحه‌ی دیگر نیروی ربایشی وجود دارد. این نیرو می‌خواهد فاصله‌ی بارهای صفحه‌ها را کمینه کند. در نتیجه، بارهای هر صفحه خود را در روی سطح‌های نزدیک به صفحه‌ی دیگر توزیع می‌کنند.


شکل ٦-٢٦ برهم‌کنش بارها در خازن تخت

مثال ٦-۶ خازن استوانه‌ای: استوانه‌ی رسانای توپری به شعاع a برابر شکل (٦-٢٧) در درون پوسته‌ی استوانه‌ی رسانای دیگری با شعاع درونی b قرار دارد. دو استوانه هم‌محور اند. طول هر دو استوانه L است. فرض کنید $L \gg b-a$ است و از اثرهای لبه چشم‌پوشی کنید. بار استوانه‌ی داخلی $+Q$ و بار استوانه‌ی بیرونی $-Q$ است. ظرفیت این آرایه را بیابید.



شکل ٦-٢٧ یک خازن استوانه‌ای

حل: برای این که ظرفیت را حساب کنیم، نخست باید میدان الکتریکی را در همه‌جا پیدا کنیم. برای این کار از قانون گوس استفاده می‌کنیم. چون سامانه تقارن استوانه‌ای دارد،سطح گوس را استوانه‌ی هم‌محوری به طول $\ell < L$ و به شعاع r انتخاب می‌کنیم. در فضای بین دو استوانه $a < r < b$ (شکل ٦-٢٨ را ببینید) داریم

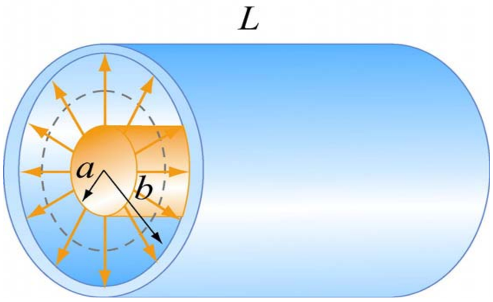
$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = EA = E(٢\pi r\ell) = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_\circ} \quad\Rightarrow\quad E = \frac{\lambda}{٢\pi\varepsilon_\circ r} \qquad (٦-٦٠)$$

که در آن $\lambda = Q/L$ بار در واحد طول استوانه‌ی داخلی است. توجه کنید که فقط در ناحیه‌ی بین دو استوانه، $a < r < b$، میدان

---

[١] http://web.mit.eud/8.02t/8.02TEAL3D/www/visualization

الکتریکی غیر صفر است؛ .چون، ناحیه‌ی $r<a$ در گوشت رسانا قرار دارد و بار درون سطح گوس صفر است: $q_{enc}=0$. همچنین در ناحیه‌ی $r>b$ بار درون سطح گوس برابر $q_{enc}=\lambda\ell-\lambda\ell=0$ است ($\lambda\ell$ در روی استوانه‌ی توپر داخلی و $-\lambda\ell$ در سطح داخلی پوسته‌ی بیرونی). پس، برای این ناحیه هم میدان الکتریکی صفر است. اختلاف پتانسیل بین دو استوانه عبارت است از



شکل ۶-۲۸ سطح گوس و میدان الکتریکی

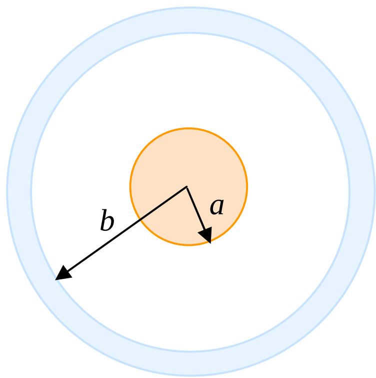
$$V(b)-V(a)=-\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b\frac{1}{r}dr=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ell n\left(b/a\right) \qquad (۶-۶۱)$$

این کمیت مثبتی استو یعنی استوانه‌ی داخلی در پتانسیل بالاتر قرار دارد؛ چون بار این استوانه مثبت است.

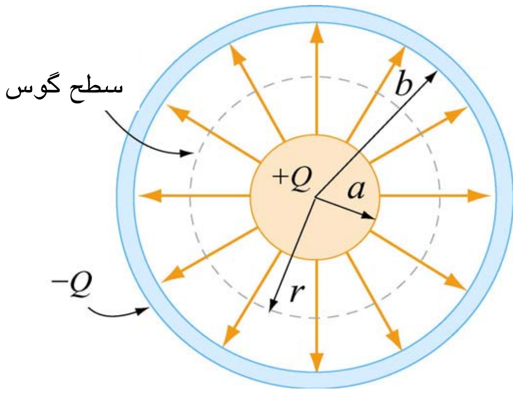
$$V\equiv V(a)-V(b)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_\circ L}\ell n(b/a)\ \Rightarrow C\equiv\frac{Q}{V}=\frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{\ell n(b/a)}\quad\Rightarrow\quad C=\frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{\ell n(b/a)} \qquad (۶-۶۲)$$

باز هم می‌بینیم که C فقط به ابعاد سامانه بستگی دارد. اگر استوانه‌ی داخلی توپر هم می‌بود، پاسخ همین می‌شد.

مثال ۷-۶ خازن کروی: کره‌ی رسانایی به شعاع a برابر شکل (۶-۲۹) در درون و هم‌مرکز با پوسته‌ی رسانای کروی با شعاع داخلی b قرار دارد. این آرایه، یک خازن کروی است. ظرفیت آن را حساب کنید.



شکل ۶-۲۹ دو کره‌ی هم‌مرکز: خازن کروی



شکل ۶-۳۰ سطح گوس برای محاسبه‌ی میدان

حل: بار $+Q$ را روی کره‌ی درونی و بار $-Q$ را روی کره‌ی بیرونی قرار دهید. میدان الکتریکی فقط در فضای بین دو کره ، $a<r<b$ غیر صفر است. با استفاده از قانون گوس (سطح گوس در شکل (۶-۳۰) نشان داده شده است)، میدان در این ناحیه

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=E\left(4\pi r^2\right)=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}\qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۶-۶۳)$$

است. بنابراین، اختلاف پتانسیل بین دو کره برابر است با

$$\Delta V=V_a-V_b=-\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_b^a\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \qquad (۶-۶۴)$$

در نتیجه، ظرفیت خازن عبارت است از

$$C=\frac{Q}{\Delta V}=4\pi\varepsilon_\circ\frac{ab}{b-a} \qquad (۶-۶۵)$$

باز هم می‌بینیم که ظرفیت خازن فقط به ابعاد سامانه (a و b) بستگی دارد.

گاهی از خازن با یک رسانا صحبت می‌شود. منظور از این حرف آن است که رسانای دوم در بینهایت قرار دارد. همان‌گونه که در آغاز این بخش گفتم، یک رسانای "منزوی" (رسانای دوم در بینهایت است) هم ظرفیت دارد. برای نمونه، مثال کره را در نظر بگیرید. کره‌ی بیرونی را به بینهایت ببرید، یعنی $b\to\infty$. در این صورت رابطه‌ی بالا به شکل زیر در می‌آید.

$$\lim_{b\to\infty} C = \lim_{b\to\infty} ٤\pi\varepsilon_\circ\left(\frac{ab}{b-a}\right) = \lim_{b\to\infty} ٤\pi\varepsilon_\circ \frac{a}{\left(١-\frac{a}{b}\right)} = ٤\pi\varepsilon_\circ a \qquad (٦-٦٦)$$

بنابراین، ظرفیت کره‌ی رسانای منزوی با شعاع R برابر است با

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (٦-٦٧)$$

می‌شود که پیش‌تر هم دیدیم.

❊ ٧-۶ آرایه‌ی با بیش از دو رسانا

در حالت کلی ، آرایه‌ای از n رسانا را هم می‌توان بررسی کرد. فرض کنید پتانسیل هر یک از رساناها V_i ($i=١,٢\cdots n$) و بار آن‌ها Q_i است. بارهای Q_i و پتانسیل‌های V_i با یک رابطه‌ی خطی به هم مربوط اند؛ چون روابطه‌های الکتروستاتیک خطی اند. یعنی میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ به‌طور خطی به بار Q و پتانسیل V به خطی به میدان $\mathbf{E}$ مربوط اند. بنابراین، در آرایه‌ای از رساناها، پتانسیل رسانای i ام را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\ Q_j \quad (i=1,2,...n) \qquad (٦-٦٨)$$

که در آن P_{ij} به هندسه‌ی رساناها بستگی دارد و **ضرایب پتانسیل** نام دارند. رابطه‌ی (٦-٦٨) شامل n معادله‌ی زیر است

$$\begin{aligned} V_١ &= P_{١١}Q_١ + P_{١٢}Q_٢ + P_{١٣}Q_٣ + ... \\ V_٢ &= P_{٢١}Q_١ + P_{٢٢}Q_٢ + P_{٢٣}Q_٣ + ... \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (٦-٦٩)$$

می‌توان آنها را برحسب Q_i نوشت:

$$Q_i = \sum_{j=١}^{n} C_{ij}\ V_j \quad (i=١,٢,...n) \qquad (٦-٦٩)$$

ضرایب C_{ii} ظرفیت نامیده می‌شوند. C_{ij} ($i\neq j$) را **ضرایب القائی** می‌نامند. بنابه تعریف، ظرفیت رسانا عبارت است از بار کل روی آن رسانا هنگامی‌که رسانا در پتانسیل واحد قرار دارد و بقیه رساناها در پتانسیل صفر اند.

انرژی آرایه‌ی n رسانا عبارت است از (نگاه کنید به رابطه‌ی (٣-٢٨) یا (٥-٧١))

$$W = \frac{١}{٢}\sum_{i=١}^{n} V_i Q_i = \frac{١}{٢}\sum_{i=١}^{n}\left(\sum_{j=١}^{n} P_{ij}Q_j\right)Q_i = \frac{١}{٢}\sum_{i=١}^{n}\left(V_i\sum_{j=١}^{n} C_{ij}V_j\right) \qquad (i=١,٢,....n) \qquad (٦-٧٠)$$

می‌توان نشان داد که $P_{ij}=P_{ji}$ و $P_{ii}\geq P_{ij}$ اند: از رابطه‌ی (٦-٧٠) استفاده می‌کنیم. اگر بار روی رسانای kام را به اندازه dQ_k تغییر دهیم، انرژی آرایه‌ی رساناها به اندازه dW تغییر خواهد کرد. بنابراین

$$dW = (\partial W/\partial Q_k)\,dQ_k \qquad (٥-٧١)$$

اگر از رابطه‌ی (٦-٧٠) مشتق بگیریم، برای dW خواهیم داشت

$$dW=\frac{1}{2}\sum_i\left(\sum_j P_{ij}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial Q_k}Q_i dQ_k+\frac{\partial Q_i}{\partial Q_k}Q_j dQ_k\right)\right) \qquad (٦-٧٢)$$

اما، چون بار رسانای i ام و j ام مستقل از هم اند، داریم

$$\frac{\partial Q_j}{\partial Q_k}=\frac{\partial Q_i}{\partial Q_k}=\begin{cases}0\ ; & j\neq i\neq k\\ 1\ ; & j=i=k\end{cases} \qquad (٦-٧٣)$$

بنابراین، در رابطه‌ی (٦-٧٢) جمله‌ی نخست داخل پرانتز، تنها هنگامی غیرصفر است که $j=k$ باشد (یعنی در جمع روی j فقط یک جمله‌ی غیر صفر باقی می‌ماند که برابر یک است.) همچنین، جمله‌ی دوم درون پرانتز فقط به ازای $i=k$ غیر صفر است (یعنی وقتی روی i جمع ببندیم، این جمله برابر یک می‌شود). بنابراین، رابطه‌ی (٦-٧٢) به‌صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید

$$dW=\frac{1}{2}\left(\sum_i P_{ik}Q_i\,dQ_k+\sum_j P_{kj}Q_j\,dQ_k\right) \qquad (٦-٧٤)$$

در رابطه‌ی بالا، دو جمع مستقل از هم وجود دارد و می‌توانیم در جمع دوم زیرنویس j را با i جایگزین کنیم. خواهیم داشت

$$dW=\frac{1}{2}\left(\sum_i P_{ik}Q_i\,dQ_k+\sum_i P_{ki}Q_i\,dQ_k\right)\Rightarrow dW=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(P_{ik}+P_{ki})Q_i\,dQ_k \qquad (٦-٧٥)$$

از طرفی ، می‌دانیم که انرژی بار Q در پتانسیل V برابر $W=VQ$ است. پس، وقتی بار Q_k را به اندازه‌ی dQ_k تغییر دهیم، انرژی آن به اندازه‌ی $dW=V_k dQ_k$ تغییر می‌کند. در نتیجه

$$dW=V_k\,dQ_k=\sum_{j=1}^{n}P_{ki}\,Q_i\,dQ_k \qquad (٦-٧٦)$$

از مقایسه‌ی رابطه‌های (٦-٧٥) و (٦-٧٦) نتیجه می‌گیریم

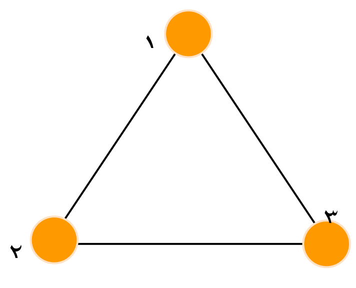
$$\frac{1}{2}(P_{ik}+P_{ki})=P_{ki} \qquad (٦-٧٧)$$

اما این تساوی فقط موقعی می‌تواند برقرار باشد که داشته باشیم

$$P_{ik}=P_{ki} \qquad (٦-٧٨)$$

چون $C_{ii}=1/P_{ii}>0$ (توجه کنید که C_{ii} ظرفیت و یک کمیت مثبت است) بنابراین، $P_{ii}>0$ است. یعنی: بیشینه‌های تابع پتانسیل به بارهای مثبت مربوط اند و کمینه‌های آن به بار منفی مربوط است، به بیان دیگر پتانسیل ناشی از بار مثبت، مثبت است.

مثال ٨-۶ سه کره در سه گوشه‌ی مثلث: سه کره‌ی فلزی یکسان را در نظر بگیرید که در آغاز بدون بار و دور از یکدیگر قرار دارند. کره‌ی شماره ١ را به پتانسیل V می‌رسانیم ومرکز آن را در راس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار می‌دهیم. بار الکتریکی این کره Q_1 است. سپس، کره‌ی دوم را به پتانسیل V می‌رسانیم و می‌بینیم که بار آن Q_2 است. مرکز این کره را هم در یک گوشه‌ی مثلث قرار می‌دهیم. سرانجام، کره‌ی سوم را به پتانسیل V می‌رسانیم و مرکز آن را در گوشه‌ی سوم مثلث قرار می‌دهیم ، شکل (٦-٣١). بار کره‌ی سوم را



شکل ٦-٣١ سه کره‌ی رسانا در سه گوشه

حساب کنید.

حل: چون شکل و نوع کره‌ها یکسان اند، ضرایب پتانسیل P_{ij} $(i\,,j=1,2,3)$ برابرند: کره‌ها یکسان اند، $P_{11}=P_{22}=P_{33}$.
از طرفی، چون $P_{ij}=P_{ji}$ اند، پس $P_{12}=P_{21}$ ، $P_{13}=P_{31}$ و $P_{23}=P_{32}$ هستند. در نتیجه، تنها دو ضریب مستقل P_{11} و P_{12} باقی می‌ماند. پتانسیل رساناها با رابطه‌ی (۶-۶۸) به بار آنها مربوط است. در گام نخست آرایش کره‌ها، بار کره‌های ۲ و ۳ صفر اند. بنابراین، پتانسیل V کره‌ی شماره ۱ با رابطه‌ی زیر به بار Q آن مربوط است

$$V=P_{11}Q_1 \qquad (۶-۷۹)$$

در گام دوم، بار کره‌های اول و دوم و سوم به ترتیب Q_1 ، Q_2 و صفر است و کره‌ی دوم در پتانسیل V است. پس برای کره‌ی دوم می‌توان نوشت

$$V_2=V=P_{21}Q_1+P_{22}Q_2+P_{23}Q_3 \qquad (۶-۸۰)$$

و سرانجام، برای کره‌ی سوم داریم

$$V_3=V=P_{31}Q_1+P_{32}Q_2+P_{33}Q_3 \qquad (۶-۸۱)$$

کره‌ها در گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طور متقارن قرار دارند و بنابراین، روشن است که $P_{12}=P_{13}=P_{23}$ است.
پس، برای کره‌های دوم و سوم خواهیم داشت

$$V_2=V=P_{12}Q_1+P_{11}Q_2+P_{23}(0) \qquad \text{(برای کره‌ی دوم)} \qquad (۶-۸۲)$$

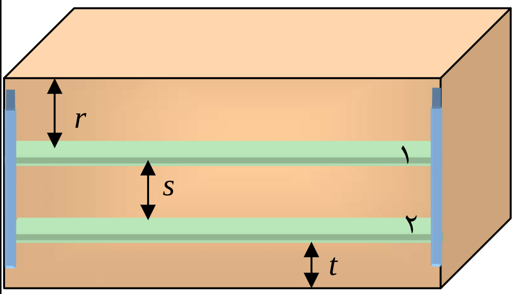
$$\begin{aligned}V_3=V&=P_{13}Q_1+P_{23}Q_2+P_{11}Q_3=P_{12}Q_1+P_{12}Q_2+P_{11}Q_3\\&=P_{12}Q_1+P_{12}Q_2+P_{11}Q_3=P_{11}Q_3+P_{12}(Q_1+Q_2)\end{aligned} \qquad \text{(برای کره‌ی سوم)} \qquad (۶-۸۳)$$

اما از رابطه‌ی (۶-۷۹) داریم $P_{11}=V/Q_1$ که اگر در رابطه‌ی (۶-۸۲) قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$P_{12}=\frac{V}{Q1}\left(1-\frac{Q_2}{Q_1}\right) \qquad (۶-۸۴)$$

حال که P_{11} و P_{12} را یافتیم، اگر مقادیر آنها را در رابطه‌ی (۶-۸۳) چایگزین کنیم، به دست می‌آید

$$Q_3=\frac{Q_2^2}{Q_1} \qquad (۶-۸۵)$$



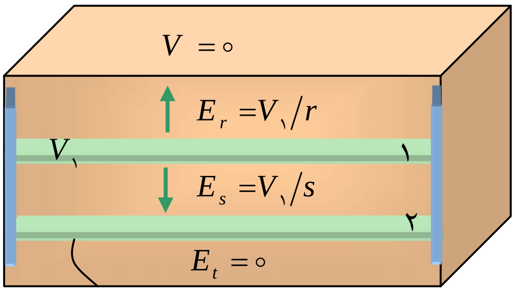
شکل ۶-۳۲ دو صفحه در یک جعبه

مثال ۶-۹ دو ورق در درون جعبه: در شکل (۶-۳۲) جعبه‌ای فلزی نشان داده شده است که در درونش دو صفحه‌ی تخت افقی ۱ و ۲ با مساحت A قرار دارد. صفحه‌ها با نوارهای عایق از بدنه‌ی جعبه جدا شده اند. جعبه در پتانسیل صفر قرار دارد. فاصله‌های صفحه‌ها از یکدیگر و از رویه‌ی بالایی و پایینی جعبه با r، s و t در شکل دیده می‌شوند. فرض کنید این فاصله‌ها در مقایسه با طول و پهنای صفحه‌ها کوچک اند و می‌توان از اثرهای لبه‌ای چشم‌پوشی کرد. با این تقریب ضریب‌های ظرفیت C_{11}، C_{22} و ضریب‌های القایی C_{12} و C_{21} را بیابید و ببینید آیا $C_{12}=C_{21}$ است یا نه؟ رابطه‌ی این ضریب‌ها و ظرفیت یک خازن تخت چگونه است؟

حل: چون پتانسیل جعبه صفر است، می‌توانیم بنویسیم

$$Q_1=C_{11}V_1+C_{12}V_2 \qquad , \qquad Q_2=C_{21}V_1+C_{22}V_2 \qquad (۶-۸۶)$$

وضعیتی را در نظر بگیرید که با سیمی صفحه‌ی ۲ به بدنه‌ی جعبه وصل شده است و بنابراین $V_۲ = ۰$ است. شکل (۶-۳۳).



شکل ۶-۳۲ میدان بین صفحه‌ها

در نتیجه، میدان در ناحیه‌های مختلف $E_r = V_۱/r$ ،$E_s = V_۱/s$ و $E_t = ۰$ اند. سطح گوسی در نظر بگیرید که صفحه‌ی ۱ را کاملا دربر دارد. قانون گوس می‌گوید $Q_۱ = \varepsilon_۰ \left(AE_r + AE_s\right)$ است. اگر به جای E_r و E_s مقدارها را برحسب $V_۱$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$Q_۱ = \varepsilon_۰ A\left(\frac{۱}{r} + \frac{۱}{s}\right)V_۱ = C_{۱۱}V_۱ \quad \Rightarrow \quad C_{۱۱} = \varepsilon_۰ A\left(\frac{۱}{r} + \frac{۱}{s}\right) \qquad (۶-۸۷)$$

همچنین، قانون گوس با سطحی که تمامی صفحه‌ی ۲ را دربرداشته باشد، نشان می‌دهد که

$$Q_۲ = -\frac{\varepsilon_۰ AV_۱}{s} = C_{۲۱}V_۱ \quad \Rightarrow \quad C_{۲۱} = -\frac{\varepsilon_۰ A_۱}{s} \qquad (۶-۸۸)$$

محاسبه‌ی بالا را می‌توانیم با وصل کردن صفحه‌ی ۱ به بدنه جعبه و $V_۱ = ۰$ تکرار کنیم. این کار فقط به جایگزینی $۲ \leftrightarrow ۱$ و $r \to t$ می‌انجامد (s تغییر نمی‌کند). بنابراین، به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم

$$C_{۲۲} = \varepsilon_۰ A\left(\frac{۱}{t} + \frac{۱}{s}\right) \quad , \quad C_{۱۲} = -\frac{\varepsilon_۰ A}{s} \qquad (۶-۸۹)$$

همان‌گونه که انتظار داشتیم، $C_{۲۱} = C_{۱۲}$ است.

این چهار ضریب چگونه به ظرفیت $C = \varepsilon_۰ A/s$ خازن تخت (رابطه‌ی ۶-۵۹) مربوط می‌شود؟ در خازن تخت معمولی جعبه‌ای وجود ندارد که صفحه‌ها را دربر داشته باشد. به بیان دیگر، فاصله‌ی s بین صفحه‌ها خیلی کوچک‌تر از فاصله‌های r و t است. در نتیجه، اگر اجازه دهیم $r \to \infty$ و $t \to \infty$ میل کنند، باید بتوانیم ظرفیت $C = \varepsilon_۰ A/s$ را به‌دست آوریم. در این حد، جمله‌های $۱/r$ و $۱/t$ قابل چشم‌پوشی می‌شوند و معادله‌ی (۶-۸۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$Q_۱ = \frac{\varepsilon_۰ A}{s}V_۱ - \frac{\varepsilon_۰ A}{s}V_۲ \quad , \quad Q_۲ = -\frac{\varepsilon_۰ A}{s}V_۱ + \frac{\varepsilon_۰ A}{s}V_۲ \qquad (۶-۹۰)$$

به یاد بیاورید که در خازن، بار و پتانسیل با $Q = CV$ به یکدیگر مربوط اند که در واقع به معنی $Q = C\left(\Delta V\right)$ است و ΔV اختلاف پتانسیل دو صفحه (یا دو رسانا) است و $\pm Q$ بار روی صفحه‌هاست. به ازای پتانسیل‌های $V_۱$ و $V_۲$ برابر $\pm \Delta V/۲$ ، معادله‌ی (۶-۹۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$Q = \frac{\varepsilon_۰ A}{s}\left(\frac{\Delta V}{۲}\right) - \frac{\varepsilon_۰ A}{s}\left(-\frac{\Delta V}{۲}\right) = \frac{\varepsilon_۰ A}{s}\Delta V \quad , \quad -Q = -\frac{\varepsilon_۰ A}{s}\left(\frac{\Delta V}{۲}\right) + \frac{\varepsilon_۰ A}{s}\left(-\frac{\Delta V}{۲}\right) = -\frac{\varepsilon_۰ A}{s}\Delta V \qquad (۶-۹۱)$$

هر دوی این معادله‌ها با $Q = \left(\varepsilon_۰ A/s\right)\Delta V$ برای خازن تخت هم‌ارزند.

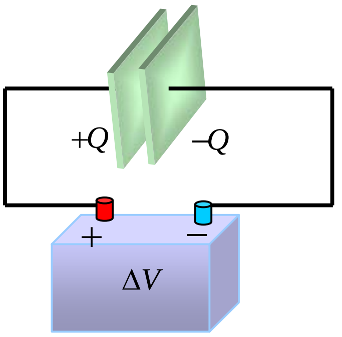
چون ضرایب C_{ij} با رابطه‌ی (۶-۷۱) به P_{ij} مربوط اند، ویژگی‌های C_{ij} را می‌توان از ویژگی‌های P_{ij} نتیجه گرفت و نشان داد که

$$C_{ij} = C_{ji} \quad , \quad C_{ii} > ۰ \quad , \quad C_{ij} \leq ۰ \quad (i \neq j) \qquad (۶-۹۲)$$

۶-۸ باردار کردن خازن و انرژی انباشته در آن

همان‌گونه که در آغاز این فصل گفتیم، از خازن برای انبار کردن انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی می‌توان استفاده کرد. مقدار

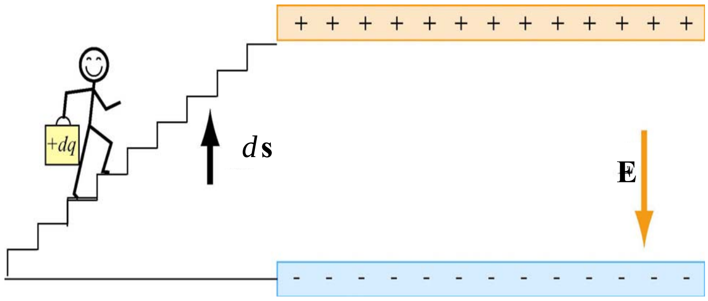
انرژی ذخیره شده در خازن با کار لازم برای باردار کردن آن برابر است. برای این که خازن بی بار را باردار کنیم، می‌توانیم همانند شکل (۳۳-٦) صفحه‌های آن را به پایانه‌های یک باتری وصل کنیم (پایانه‌های باتری در اختلاف پتانسیل ΔV قرار دارند که **ولتاژ پایانه** نام دارد). وقتی صفحه‌های خازن به باتری وصل می‌شود، هر پایانه‌ی باتری بار خودش را با صفحه‌ای که به آن وصل است شریک می‌شود. صفحه‌ای که به پایانه‌ی مثبت باتری وصل است، مقداری بار مثبت و صفحه‌ی وصل به پایانه‌ی منفی باتری مقداری بار منفی به‌دست می‌آورد. به اشتراک گذاشتن بار سبب کاهش لحظه‌ای بار در پایانه‌ها و افت پتانسیل پایانه می‌شود. در نتیجه، در باتری واکنش شیمیایی آغاز می‌شود. واکنش شیمیایی بار را از یک پایانه به پایانه‌ی دیگر منتقل می‌کند و کاهش بار را در آن پایانه جبران می‌کند و اختلاف پتانسیل را به وضعیت اولیه برمی‌گرداند. بنابراین، می‌توان باتری را همانند پمپ بار پنداشت که بار را از یک صفحه‌ی خازن به صفحه‌ی دیگر منتقل می‌کند. در فرایند باردار کردن خازن، باتری برای انتقال بار از یک صفحه به صفحه‌ی دیگر، کار انجام می‌دهد.



شکل ۳۳-٦ خازن متصل به باتری

فرض کنید، خازن در آغاز بی بار است. در هر صفحه‌ی خازن تعداد زیادی بار مثبت و منفی وجود دارد، اما شمار بارهای منفی و مثبت باهم برابر اند و در نتیجه یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین، بار خالص وجود ندارد و بین صفحه‌های خازن هم میدان الکتریکی نیست.

فرض کنید پیمانه‌ای داریم که می توان آن را با بار الکتریکی پُر کرد. همچنین فرض کنید چندین پله صفحه‌ی پایین خازن را به صفحه‌ی بالایی وصل می‌کند. شکل (۳٤-٦) را ببینید. از صفحه‌ی پایین شروع می‌کنیم. سطل را با بار $+dq$ پُر می‌کنیم و آن را به صفحه‌ی بالایی منتقل می‌کنیم. حالا صفحه‌ی بالایی به اندازه‌ی dq بار مثبت به‌دست آورده است. با این کار، اما صفحه‌ی پایین به اندازه‌ی $+dq$ بار از دست داده است که معادل این است که بگوییم صفحه‌ی پایین بار $-dq$ به‌دست آورده است. از پله‌ها سرازیر می‌شویم و دوباره سطل را از بار $+dq$ پر و به صفحه‌ی بالایی منتقل می‌کنیم. این کار را بارها تکرار می‌کنیم تا



شکل ۳٤-٦ با انتقال بار از صفحه‌ی پایین به بالای خازن ، عامل خارجی کار انجام

خازن باردار شود و در فضای بین صفحه‌های خازن میدان الکتریکی به‌وجود بیاید.

فرض کنید در یک لحظه به صفحه‌ی بالایی نگاه می‌کنیم و می‌بینیم که مقدار بار انباشته شده در آن $+q$ است (این بار نهایی خازن نیست، بلکه بار لحظه‌ای است). بنابراین، در این لحظه اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها برابر $|\Delta V| = q/C$ است. برای این که یک سطل دیگر بار $+dq$ در روی صفحه‌ی بالایی خالی کنیم، باید برای چیرگی به نیروی رانشی بین بارهای مثبت روی صفحه و بار $+dq$ سطل، کار انجام دهیم. مقدار کار لازم برابر $dW = |\Delta V| dq$ است. اگر در پایان فرایند باردار کردن، بار نهایی روی صفحه‌ی بالایی خازن $+Q$ باشد، کار کل که در این فرایند انجام می‌گیرد، عبارت است از

$$W = \int dW = \int_{\circ}^{Q} dq\,|\Delta V| = \int_{\circ}^{Q} dq\,\frac{q}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^{2}}{C} \qquad (۶-۹۳)$$

و این مقدار با انرژی پتانسیل الکتریکی سامانه برابر است:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^{2}}{C} = \frac{1}{2}Q\,|\Delta V| = \frac{1}{2}C\,|\Delta V|^{2} \qquad (۶-۹۴)$$

انرژی ذخیره شده در خازن، در خود میدان الکتریکی بین صفحه‌ها ذخیره می‌شود. به هر حال، در فصل ۵ دیدیم که میدان الکتریکی انرژی حمل می‌کند. برای این که نشان دهیم انرژی خازن در رابطه‌ی (۶-۹۴) در واقع به میدان الکتریکی بین صفحه‌ها مربوط است، خازن تخت را برای نمونه بررسی می‌کنیم. ظرفیت خازن تخت $C = \varepsilon_\circ A/d$ و اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های آن $|\Delta V| = Ed$ است. بنابراین، رابطه‌ی (۶-۹۴) را می‌توان برحسب این کمیت‌ها به‌صورت زیر نوشت:

$$U_E = \frac{1}{2}C\,|\Delta V|^{2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_\circ A}{d}(Ed)^{2} = \frac{1}{2}\varepsilon_\circ E^{2}(Ad) \qquad (۶-۹۵)$$

کمیت (Ad) حجم فضای بین صفحه‌های خازن است. بنابراین، $u_E \equiv U_E/(Ad)$ انرژی در واحد حجم یا چگالی انرژی خازن است

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_\circ E^{2} \qquad (۶-۹۶)$$

با توجه به آنچه که در بخش ۵-۵ گفته شد، این پاسخ دور از انتظار نبود.

با روش دیگری هم می‌توان انرژی ذخیره شده در خازن را حساب کرد. چون بار صفحه‌ها مخالف یکدیگر اند، صفحه‌ها یکدیگر را به سوی خود می‌کشند. برای جلوگیری از این کار و ثابت نگه داشتن فاصله‌ی بین آنها باید به صفحه‌ها نیرو وارد کرد. از فصل ۴-۶-۴ و رابطه‌ی (۴-۱۴۵) می‌دانیم که وقتی سطح باردار در میدان الکتریکی قرار دارد به آن نیرو وارد می‌شود. بنا به رابطه‌ی (۴-۱۴۵) به جزء بار $\sigma(\Delta A)$ نیرویی برابر $\Delta F = \sigma^{2}(\Delta A)/2\varepsilon_\circ$ وارد می‌شود. اگر سطح کل صفحه A باشد، عامل خارجی باید نیرویی برابر $F_{Ext} = \sigma^{2}A/2\varepsilon_\circ$ به آن وارد کند تا بر نیروی ربایش الکترکی بین صفحه‌ها چیره شود و فاصله‌ی آن‌ها را d نگه دارد. چون شدت میدان الکتریکی در فضای بین صفحه‌ها $E = \sigma/\varepsilon_\circ$ است، این نیروی خارجی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F_{Ext} = \frac{\varepsilon_\circ}{2}E^{2}A \qquad (۶-۹۷)$$

توجه کنید که نیروی خارجی به d بستگی ندارد. کار کل این نیروی برای جدایی d صفحه‌ها برابر است با

$$W_{Ext} = \int \mathbf{F}_{Ext}\cdot d\mathbf{s} = F_{Ext}d = \left(\frac{\varepsilon_\circ E^{2}A}{2}\right)d \qquad (۶-۹۸)$$

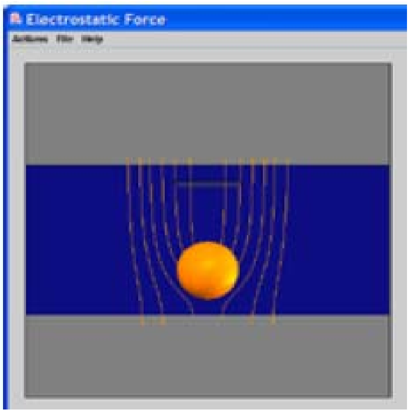
که با رابطه‌ی (۶-۹۵) کاملا سازگار است.

چون انرژی پتانسیل سامانه با کار عامل خارجی برابر است، پس داریم

$$u_E = \frac{W_{Ext}}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_\circ E^{2} \qquad (۶-۹۹)$$

همچنین، توجه کنید که u_E با فشار در رابطه‌ی (۴-۱۴۶) یکی است. پس، u_E را می‌توان فشار P الکتروستاتیکی هم توصیف کرد.

چگونه می‌توان این فشار را دید؟ شکل (۶-۳۵) شبیه‌سازی آزمایشی است که در آن با باردار شدن خازن، کره‌ی آلومینیومی



شکل ۳۵-۶ نیروی الکتروستاتیکی وارد به کره در فضای بین صفحه‌های خازن تخت.

توسط نیروی الکتروستاتیکی از روی صفحه‌ی پایین خازن برمی‌خیزد و به سوی صفحه‌ی بالایی می‌رود*. وقتی کره با صفحه‌ی پایینی خازن در تماس است، چگالی بار کره با چگالی بار صفحه‌ی پایین یکی است. وقتی خازن درحال باردار شدن است، چگالی بار کره متناسب با اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها افزایش می‌یابد. افزون بر این، با افزایش تدریجی شدت میدان، انرژی هم به فضای بین صفحه‌ها شارش پیدا می‌کند. شارش انرژی را در حرکت خط‌های میدان از کناره‌ها به سوی وسط خازن می‌توان دید. با افزایش اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن، به کره نیروی فزاینده‌ی ربایشی به سوی صفحه‌ی بالایی خازن وارد می‌شود. انگار که با وصل شدن بیشتر و بیشتر خط‌های میدان به کره، کشش رو به بالای میدان هم افزایش پیدا می‌کند. سرانجام این نیرو به حدی می‌رسد که بر نیروی گرانش رو به پایین چیره می‌شود و کره از روی سطح پایینی بلند می‌شود. پس از جدا شدن کره از صفحه‌ی پایینی، چگالی بار آن دیگر افزایش پیدا نمی‌کند. از این لحظه به بعد، افزون بر نیروی ربایشی بین کره و صفحه‌ی بالایی، صفحه‌ی پایینی خازن هم یک نیروی الکتروستاتیکی رانشی رو به بالا به کره وارد می‌کند. برآیند این دو نیروی روبه بالا، کره را به سوی صفحه‌ی بالایی می‌راند. برای این که کره در تماس با صفحه‌ی بالایی قرار نگیرد و تخلیه‌ی روی ندهد، سطح زیرین صفحه‌ی بالایی خازن را با یک لایه‌ی نازک عایق‌پوش می‌کنیم.

صفحه‌های خازن با بارهای مخالف یکدیگر را جذب خواهند کرد. یک نیروی مکانیکی لازم است که آنها را دور از هم نگه دارد. در مورد خازن با صفحه‌های تخت می‌توانیم به سادگی نیروی وارد به بارهای سطحی را حساب کنیم. همچنین، با استفاده از رابطه‌ی (۹۳-۶) می‌توانیم گزاره‌ای عمومی‌تر را بیان کنیم.فرض کنید C به طور خطی به مختصات x بستگی دارد. x کمیتی است که جابه‌جایی یکی از "صفحه‌ها" را (که می‌تواند رسانایی با هر شکل باشد) نسبت به دیگری اندازه می‌گیرد. نیرویی را که باید به هر صفحه اعمال بشود تا بر ربایش آنها چیره بشود و x را ثابت نگه دارد، F بنامید. حال تصور کنید که x به اندازه‌ی Δx افزایش می‌یابد، اما Q تغییر نمی‌کند و یکی از صفحه‌ها ثابت می‌ماند. نیروی خارجی F بر روی صفحه‌ای که جابه‌جا شده است، به اندازه‌ی $F\Delta x$ کار انجام می‌دهد و اگر قرار است که انرژی پایسته بماند، این مقدار کار باید به صورت افزایش انرژی انباشته شده در خازن، $Q^۲/۲C$، ظاهر بشود. چون بار Q ثابت است، افزایش انرژی برابر است با

$$\Delta U = \frac{dU}{dx}\Delta x = \frac{Q^۲}{۲}\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{C}\right)\Delta x \qquad (۶-۱۰۰)$$

از برابری این تغییر انرژی و کار $F\Delta x$ به‌دست می‌آید

$$F = \frac{Q^۲}{۲}\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{c}\right) \qquad (۶-۱۰۱)$$

مثال ۱۰-۶ خازن با صفحه‌های تخت موازی: نشان دهید که رابطه‌ی (۱۰۱-۶) به پاسخ درستی برای نیروی وارد به صفحه‌ی خازن تخت می‌انجامد.

* برگرفته از: http://web.mit.eud/8.02t/8.02TEAL3D/www/visualization

حل: اگر جدایی صفحه‌ها x باشد، بنابه رابطه‌ی (۶-۵۹) ظرفیت خازن $C=\varepsilon_\circ A/x$ می‌شود. در نتیجه، از معادله‌ی (۶-۱۰۱) خواهیم داشت

$$F=\frac{Q^{۲}}{۲}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\varepsilon_\circ A}\right)=\frac{Q^{۲}}{۲\varepsilon_\circ A} \qquad (۶-۱۰۲)$$

آیا این پاسخ درستی است؟ می‌دانیم نیرویی که بر واحد سطح صفحه‌ای با بار سطحی σ در میدان الکتریکی وارد می‌شود، برابر با حاصل‌ضرب میانگین میدان در دو طرف صفحه و بار σ است. بنابراین، نیروی کل وارد به هر یک از صفحه‌های خازن برابر بار کل $Q=\sigma A$ ضرب در میانگین میدان. میدان در بیرون خازن صفر است و در فضای بین صفحه‌ها برابر $\sigma/\varepsilon_\circ$ است. پس، میدان میانگین $\sigma/۲\varepsilon_\circ$ است. در نتیجه، نیروی وارد به صفحه عبارت است از

$$F=Q\frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ}=Q\frac{Q/A}{۲\varepsilon_\circ}=\frac{Q^{۲}}{۲\varepsilon_\circ A} \qquad (۶-۱۰۳)$$

که همان پاسخ رابطه‌ی (۶-۱۰۲) است.

مثال ۶-۱۱ انرژی کره‌ی فلزی: انرژی ذخیره شده در کره‌ی فلزی به شعاع a و بار Q را حساب کنید.

حل: میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}}\hat{\mathbf{r}} & , \quad r>a\\ \circ & , \quad r<a\end{cases} \qquad (۶-۱۰۴)$$

چگالی انرژی مربوط به این میدان در درون کره صفر و در ناحیه‌ی بیرون آن عبارت است از

$$u_E=\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ E^{۲}=\frac{Q^{۲}}{۳۲\pi^{۲}\varepsilon_\circ r^{۴}} \qquad (۶-۱۰۵)$$

برای یافتن انرژی کل باید در تمان فضای بیرون کره ، از $r=a$ تا $r=\infty$ از آن انتگرال بگیریم.

$$U_E=\int_a^\infty\left(\frac{Q^{۲}}{۳۲\pi^{۲}\varepsilon_\circ r^{۴}}\right)\left(۴\pi r^{۲}dr\right)=\frac{Q^{۲}}{۸\pi\varepsilon_\circ}\int_a^\infty\frac{dr}{r^{۲}}=\frac{Q^{۲}}{۸\pi\varepsilon_\circ a}=\frac{۱}{۲}QV \qquad (۶-۱۰۶)$$

که در آن $V=Q/۴\pi\varepsilon_\circ a$ پتانسیل الکتریکی در سطح کره نسبت به بینهایت ($V_\infty=\circ$) است.

به سادگی می‌توان نشان داد که انرژی سامانه با کار لازم برای باردار کردن کره برابر است. فرض کنید در یک لحظه بار روی کره q و پتانسیل آن $V=q/۴\pi\varepsilon_\circ a$ است. کار لازم برای افزودن بار به اندازه‌ی dq برابر $dW=Vdq$ است. پس کار کل لازم برای این که بار کره را از صفر به Q برسانیم، برابر است با

$$W=\int dW=\int Vdq=\int_\circ^Q da\left(\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ a}\right)=\frac{Q^{۲}}{۸\pi\varepsilon_\circ a} \qquad (۶-۱۰۷)$$

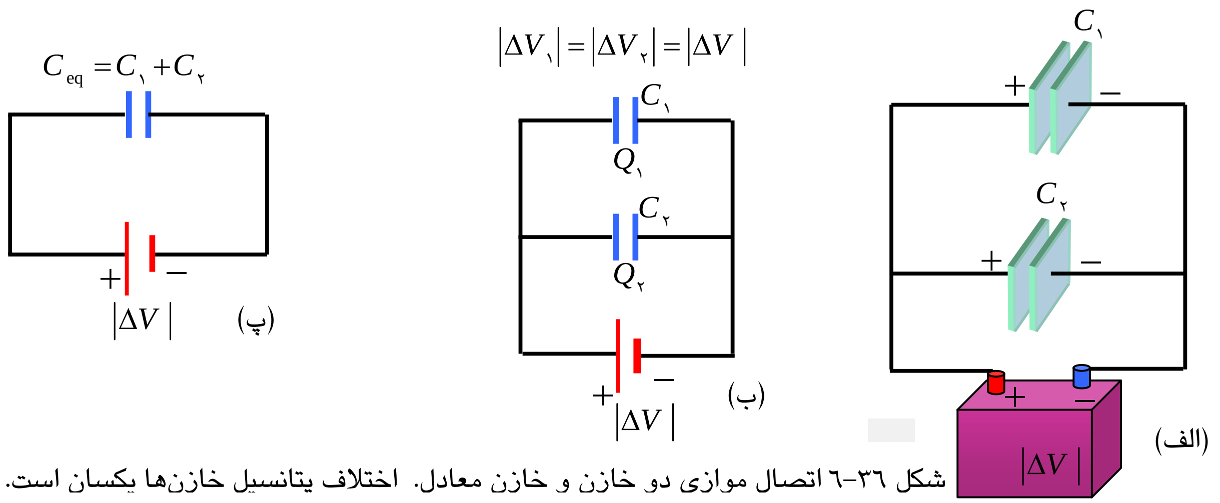
۶-۴ به هم بستن خازن‌ها

دو یا چند خازن را می‌توان به چندین روش به هم وصل کرد و در یک مدار الکتریکی قرار داد. ظرفیت معادل ترکیب‌های خاصی از خازن‌ها را می‌توان حساب کرد. در یک مدار الکتریکی، افزون بر خازن، باتری یا هر چشمه‌ی تولید جریان مستقیم هم وجود

دارد. ما آن را با نماد نشان خواهیم داد. پایانه‌ی مثبت باتری در پتانسیل بالاتر قرار دارد و خط عمودی بلند نماد یاد شده نشان دهنده‌ی آن است.

۱-۴-۶ ترکیب موازی خازن‌های

شکل (٦-٣٦) اتصال **موازی** دو خازن با ظرفیت‌های C_1 و C_2 را نشان می‌دهد. صفحه‌های سمت چپ آنها با یک سیم رسانا به پایانه‌ی مثبت باتری و صفحه‌های سمت چپ به پایانه‌ی منفی باتری وصل اند. وقتی خازن‌ها در مدار قرار می‌گیرند، الکترون‌ها



شکل ٦-٣٦ اتصال موازی دو خازن و خازن معادل. اختلاف پتانسیل خازن‌ها یکسان است.

از صفحه‌های سمت چپ به صفحه‌های سمت راست منتقل می‌شوند و صفحه‌ها سمت چپ بارمثبت و صفحه‌های سمت راست بار منفی پیدا می‌کنند. وقتی که اختلاف پتانسیل خازن‌ها با اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری برابر شد، انتقال بار هم تمام می‌شود. فرض کنید، پس از برقراری تعادل، بارهای نهایی خازن‌ها به ترتیب Q_1 و Q_2 است. پس، بارکلی که در خازن‌ها ذخیره شده است، برابر $Q=Q_1+Q_2$ است. چون اختلاف پتانسیل $|\Delta V|$ بین صفحه‌های خازن C_1 و C_2 برابرند، داریم

$$C_1=\frac{Q_1}{|\Delta V|} \qquad , \qquad C_2=\frac{Q_2}{|\Delta V|} \tag{٦-١٠٨}$$

این دو خازن را با یک خازن معادل C_{eq} که بار کل Q دارد می‌توان جایگزین کرد. چون بار Q بین دو خازن تقسیم شده است، باید داشته باشیم

$$Q=Q_1+Q_2=C_1|\Delta V|+C_2|\Delta V|=(C_1+C_2)|\Delta V| \tag{٦-١٠٩}$$

خازن معادل با ظرفیت C_{eq} عبارت است از

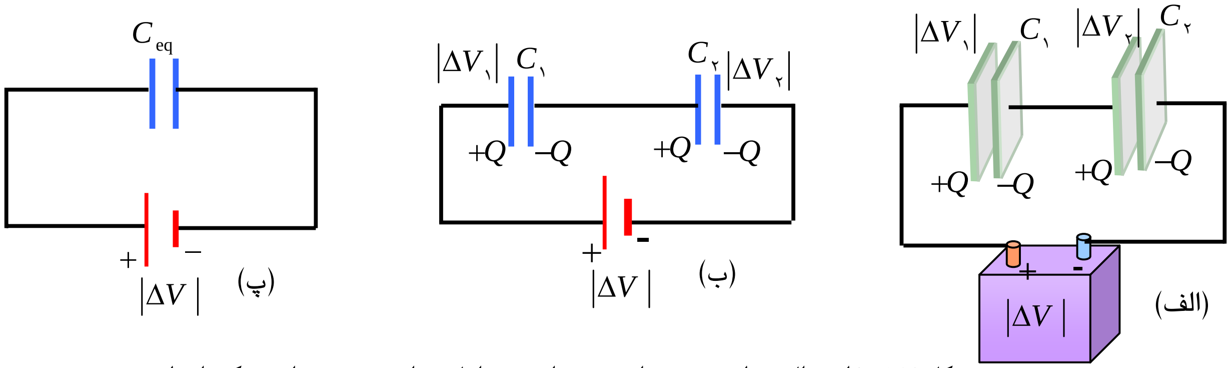
$$C_{eq}=\frac{Q}{|\Delta V|}=C_1+C_2 \tag{٦-١١٠}$$

بنابراین، در اتصال موازی خازن‌ها، ظرفیت‌ها باهم جمع می‌شوند. اگر بیش از دو خازن به طور موازی به هم وصل باشند، ظرفیت معادل آنها عبارت است از

$$C_{eq}=C_1+C_2+C_3+\cdots+C_N=\sum_{i=1}^{N}C_i \qquad \text{(اتصال موازی)} \tag{٦-١١١}$$

۲-۴-۶ ترکیب سری خازن‌ها

فرض کنید دو خازن بی بار $C_۱$ و $C_۲$ را برابر شکل (۳۷-۶) به طور سری به هم وصل کنیم. صفحه‌ی سمت چپ خازن $C_۱$ به پایانه‌ی مثبت باتری وصل است و در نتیجه بار مثبت $+Q$ بر روی آن می‌نشیند. صفحه‌ی سمت راست خازن $C_۲$ به پایانه‌ی منفی باتری مصل است و بنابراین، بار منفی $-Q$ دارد. بار صفحه‌های میانی چیست ؟ آنها در آغاز بی بار بودند.اما با باردار شدن صفحه‌هایی که مستقیم به پایانه‌های باتری وصل اند، هر یک از آنها به اندازه‌ی باری که دارند، بار با علامت مخالف به



شکل ۳۷-۶ اتصال موازی دو خازن و خازن معادل. بار هر دو خازن یکسان است.

سوی خود جذب می‌کند. بنابراین، صفحه‌ی سمت راست خازن $C_۱$ بار $-Q$ و صفحه‌ی سمت چپ خازن $C_۲$ بار مثبت $+Q$ به دست می‌آورد. اختلاف پتانسیل بین دوسر خازن‌ها با جمع اختلاف پتانسیل دو سر تک تک خازن‌ها برابر است. پس داریم

$$|\Delta V_1|=\frac{Q}{C_1} \qquad , \qquad |\Delta V_2|=\frac{Q}{C_2} \tag{۶-۱۱۲}$$

از شکل (۳۷-۶) دیده می‌شود که اختلاف پتانسیل کل با اختلاف پتانسیل دو سر باتری، $|\Delta V|$، برابر است.

$$|\Delta V|=|\Delta V_۱|+|\Delta V_۲| \tag{۶-۱۱۳}$$

در واقع، اگر چندین خازن به طور سری به هم وصل شوند، اختلاف پتانسیل دو سر باتری با جمع اختلاف پتانسیل‌های دو سر تک تک خازن‌ها برابر است. دو خازن بالا را می‌توان با یک ظرفیت معادل با ظرفیت $C_{eq}\equiv Q/|\Delta V|$ جایگزین کرد. با استفاده از رابطه‌های (۱۱۲-۶) و (۱۱۳-۶) داریم

$$\frac{Q}{C_{eq}}=\frac{Q}{C_۱}+\frac{Q}{C_۲} \quad\Rightarrow\quad C_{eq}=\frac{۱}{C_۱}+\frac{۱}{C_۲} \tag{۶-۱۱۴}$$

و برای مجموعه‌ای از خازن‌ها که به طور سری به هم وصل باشند، ظرفیت خازن معادل عبارت است از

$$\frac{۱}{C_{eq}}=\frac{۱}{C_۱}+\frac{۱}{C_۲}+\cdots+\frac{۱}{C_N}=\sum_{i=۱}^{N}\frac{۱}{C_i} \qquad \text{(اتصال سری)} \tag{۶-۱۱۵}$$

مثال ۱۲-۶ ظرفیت معادل: ظرفیت خازن معادل ترکیب خازن‌های شکل (۳۸-۶) را بیابید

حل: خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$موازی اند. ظفیت خازن معادل آنها، $C_{۱۲}$

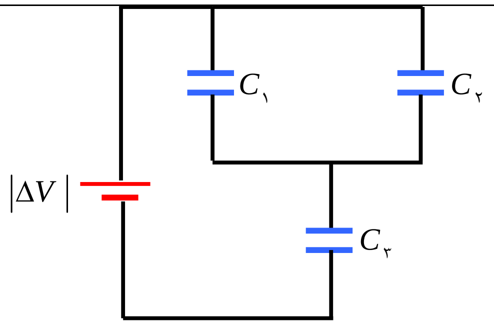
$$C_{۱۲}=C_۱+C_۲ \tag{۶-۱۱۶}$$

است. می‌توانیم به جای آنها، همانند شکل (۳۹-۶)، از یک خازن استفاده کنیم که در اتصال سری باخازن $C_۳$ قرار دارد. حال خازن $C_{۱۲}$ با خازن $C_۳$ به طور سری بسته شده است. ظرفیت خازن معادل این دو را $C_{۱۲۳}$ بنامید. $C_{۱۲۳}$ عبارت است از

$$\frac{۱}{C_{۱۲۳}}=\frac{۱}{C_{۱۲}}+\frac{۱}{C_{۳}}$$

$$\Rightarrow\quad C_{۱۲۳}=\frac{C_{۱۲}C_{۳}}{C_{۱۲}+C_{۳}}=\frac{(C_{۱}+C_{۲})C_{۳}}{C_{۱}+C_{۲}+C_{۳}} \qquad (۶-۱۱۷)$$

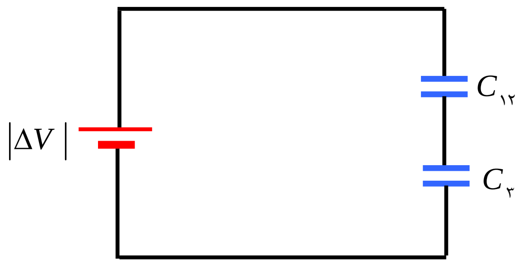
بنابراین، مدار معادل نهایی با یک خازن معادل $C_{۱۲۳}$ به صورت شکل (۴۰-۶) در می‌آید.



شکل ۳۸-۶ ترکیب موازی و سری خازن‌ها



شکل ۴۰-۶ مدار معادل نهایی



شکل ۳۹-۶ مدار معادل

مثال ۱۳-۶ ظرفیت معادل ۲: در چیدمان شکل (۴۱-۶) ظرفیت همه‌ی خازن‌ها C است. ظرفیت خازن معادل را حساب کنید.

حل: در شاخه‌ی میانی دو خازن به طور سری به هم وصل اند.

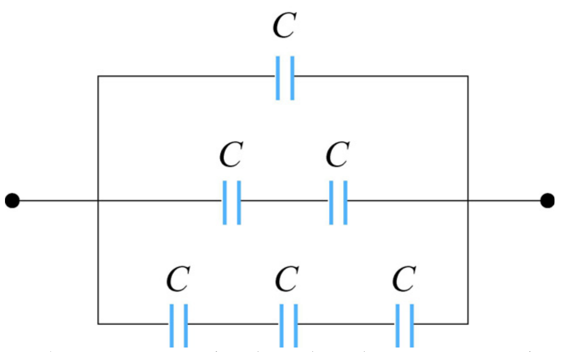
ظرفیت خازن معادل آن دو عبارت است از

$$\frac{۱}{C_{۲}}=\frac{۱}{C}+\frac{۱}{C}=\frac{۲}{C}\quad\Rightarrow\quad C_{۲}=\frac{C}{۲} \qquad (۶-۱۱۸)$$

هم چنین، سه خازن شاخه‌ی پایین با هم سری بسته شده اند. می‌توان آنها را با خازن معادل

$$\frac{۱}{C_{۳}}=\frac{۱}{C}+\frac{۱}{C}+\frac{۱}{C}=\frac{۳}{C}\quad\Rightarrow\quad C_{۳}=\frac{C}{۳} \qquad (۶-۱۱۹)$$

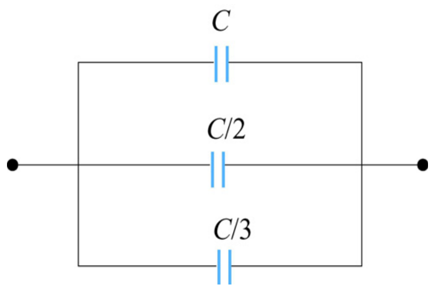
جایگزین کرد. بنابراین، مدار به صورت شکل (۴۲-۶) در می‌آید.



شکل ۴۱-۶ چیدمان خازن‌ها: ترکیب سری و موازی

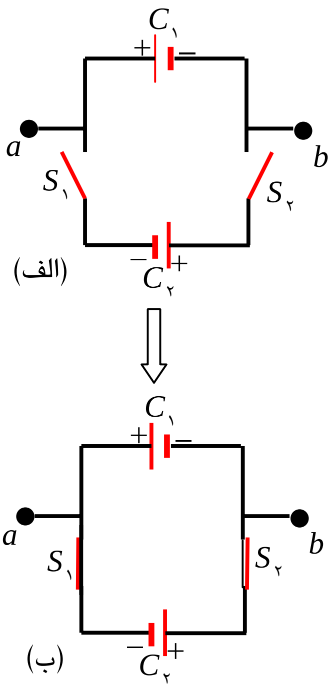
حالا سه خازن داریم که به طور موازی بسته شده اند. ظرفیت معادل آنه عبارت است از

$$C_{eq}=C+C_{۲}+C_{۳}=C\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱۱}{۶}C \qquad (۶-۱۲۰)$$



شکل ۴۲-۶ مدار معادل

مثال ۱۴-۶ انصال دو خازن باردار با قطبایی مخالف: دو خازن $C_{۱}$ و $C_{۲}$ $(C_{۱}>C_{۲})$ را باردار می‌کنیم و هر دو را به پتانسیل یکسان $V_{۰}$ می‌رسانیم. اما قطبایی خازن‌ها خلاف یکدیگر اند. خازن‌های باردار شده را از باتری جدا می‌کنیم و صفحه‌های آنها را برابر شکل (۴۳-۶ الف) به هم وصل می‌کنیم و سپس کلیدهای $S_{۱}$ و $S_{۲}$ را می‌بندیم. مدار به صورت شکل (۴۳-۶ ب) در می‌آید.



شکل ۶-۴۳ پیوند خازن‌ها با قطبایی مخالف

(الف): اختلاف پتانسیل نهایی بین نقطه‌های a و b را حساب کنید.

(ب): انرژی کل ذخیره شده در خازن‌ها را پیش از و پس از بستن کلیدها به‌دست آورید.

حل: **(الف)** بار روی خازن‌ها پیش از بسته شدن کلیدها Q_1 و Q_2 اند. پس:

$$Q_1 = C_1 V_0 \qquad , \qquad Q_2 = -C_2 V_0 \tag{۶-۱۲۱}$$

علامت منفی بار Q_2 به این خاطر است که قطبایی خازن C_2 **مخالف** قطبایی خازن C_1 است. پس از بستن کلیدها، بارها دوباره خود را روی صفحه‌های خازن‌ها توزیع می‌کنند تا این که بارکل Q بین خازن‌ها تقسیم شود:

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 - C_2)V_0 \tag{۶-۱۲۲}$$

توجه کنید که خازن‌ها حالا **موازی** اند و اختلاف پتانسیل بین آنها باهم **برابر** است. پس

$$V = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right) V_0 \tag{۶-۱۲۳}$$

(ب): پیش از بسته شدن کلیدها، انرژی کل ذخیره شده در خازن‌ها ، بنا به رابطه‌ی (۶-۹۴) برابر است با

$$U_i = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 + \frac{1}{2} C_2 V_0^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V_0^2 \tag{۶-۱۲۴}$$

(ب): پیش از بسته شدن کلیدها، انرژی کل ذخیره شده در خازن‌ها، بنا به رابطه‌ی(۶-۹۴) برابر است با

$$U_i = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 + \frac{1}{2} C_2 V_0^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V_0^2 \tag{۶-۱۲۵}$$

پس از بسته شدن بار و رسیدن بار خازن‌ها به خالت ترازمندی، انرژی کل برابر است با

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V^2 \\ &= \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 V_0^2 = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 U_i \end{aligned} \tag{۶-۱۲۶}$$

پس، نسبت انرژی نهایی به انرژی اولیه ذخیره شده عبارت است از

$$\frac{U_f}{U_i} = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 \tag{۶-۱۲۷}$$

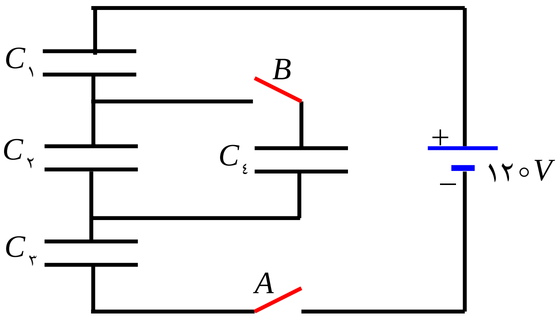
این رابطه نشان می‌دهد که انرژی نهایی **کم‌تر** از انرژی اولیه است. شاید به نظر برسد که پایستگی انرژی نقض شده است. اما این چنین نیست. ما فرض کردیم که مدار آرمانی است و مقاومت ندارد. بخشی از انرژی به‌صورت گرما در پیوندگاه‌ها از بین می‌رود و بخشی هم به‌صورت تابش موج الکترومغناطیسی (فصل آخر را ببینید) گسیل می‌شود.

مثال ۶-۱۵ مدار دو شاخه: ظرفیت هر چهار خازن در مدار شکل (۶-۴۴) یکسان است و پتانسیل دو سر باتری ۱۲۰ ولت است. با خازن‌های بی بار شروع کنید، دو حالت زیر را در نظر بگیرید و به پرسش‌ها پلسخ دهید.

حالت اول:

(الف): کلید B را باز نگه دارید، اما کلید A را ببندید. پس از آن که خازن‌های C_1، C_2 و C_3 کاملا باردار شدند، کلید A را باز کنید و سپس اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از خازن‌ها را حساب کنید.

(ب): پس از باز کردن کلید A، کلید B را ببندید. اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از خازن‌ها را حساب کنید.



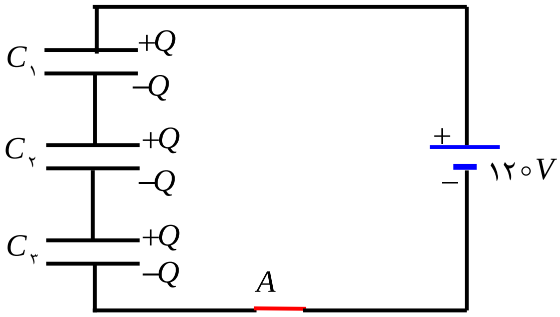
شکل ٤٤-٦ مداری با دو شاخه

حالت دوم:

(پ): کلید A را باز نگه دارید و نخست کلید B را ببندید. اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از خازن‌ها را حساب کنید.

(ت): حالا کلید A را هم ببندید و اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از خازن‌ها را حساب کنید.

حل حالت اول (الف): وقتی کلید B باز و کلید A بسته است، خازن C_4 عملا در مدار وجود ندارد. پس مداری داریم با سه خازن C_1، C_2 و C_3 که به طور سری به هم وصل اند، شکل (٤٥-٦). بارهر سه خازن در روی صفحه‌ها باید یکسان و برابر $\pm Q$ باشد. همچنین جمع اختلاف پتانسیل دوسر سه خازن باید برابر اختلاف پتانسیل دو سر باتری، $V = 120\,\text{V}$ باشد.



شکل ٤٥-٦ کلید A بسته و کلید B باز اند

$$V_1 + V_2 + V_3 = V \qquad (6\text{-}128)$$

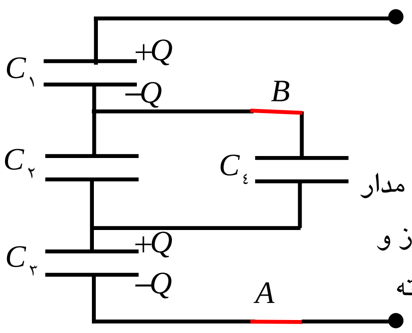
چون ظرفیت هر سه خازن برابر C است، پس داریم

$$Q = CV_1 = CV_2 = CV_3$$

$$\Rightarrow\ V_1 = V_2 = V_3 = \frac{V}{3} = 40\,\text{V} \qquad (6\text{-}129)$$

یک بار که خازن‌ها به این ترتیب باردار شدند، اختلاف پتانسیل دو سر هر خازن، حتی اگر کلید A را هم قطع کنیم، به همان صورت باقی خواهد ماند.

(ب): پس از باردار شدن خازن‌ها ، با قطع کلید A، باتری از مدار خارج می‌شود. بستن کلید B خازن C_4 را دوباره وارد مدار می‌کند. مدار به صورت شکل (٤٦-٦) در می‌آید. بار خازن‌های C_1 و C_3 هنوز هم همان بار Q است (باز کردن کلید A آنها را از شارش هر باری محفوظ نگه می‌دارد.) اما بار Q که در روی خازن C_2 بود، حالا بین خازن‌های C_2 و C_4 تقسیم می‌شود. چون $C_2 = C_4 = C$ است بنابراین ، بار خازن-های C_2 و C_4 برابر $Q/2$ می‌شود و در نتیجه، اختلاف پتانسیل دو سر هر دو خازن C_2 و C_4 هم نصف اختلاف پتانسیل اولیه‌ی C_2 می‌شود. پس:

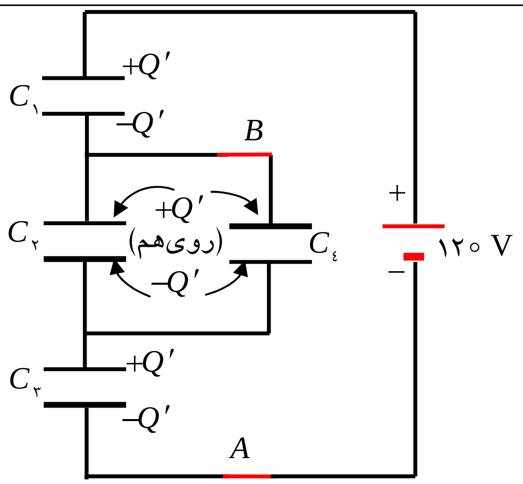


شکل ٤٦-٦ مدار باکلید A باز و کلید B بسته

$$V_1 = V_3 = 40\,\text{V} \quad , \quad V_2 = V_4 = 20\,\text{V} \qquad (6\text{-}130)$$

حالت دوم- (پ): در این حالت، چون خازن‌ها از ابتداء بدون بار اند و کلید A هم باز است، بستن کلید B بین دو سر هیچ یک از خازن‌ها اختلاف پتانسیل ایجاد نمی‌کند، زیرا باتری عملا از مدار خارج است.

(ت): حالا کلید A را می بندیم. کلید B هم که از پیش بسته بود. اینک مدار به صورت شکل (٦-٤٧) در می‌آید. دو خازن $C_۲$ و $C_٤$ موازی اند. آن‌ها را با خازن معادل $C_{۲٤}=C+C=۲C$ جایگزین کنید. خازن‌های $C_۱$ ، $C_{۲٤}$ و $C_۳$ به طور سری به هم وصل اند. می‌توان آن‌ها را با یک خازن معادل جایگزین کرد. ظرفیتاین خازن معادل عبارت است از



شکل ٦-٤٧ مدار در حالت (ت)

$$C_{eq}=\left(\frac{۱}{C_۱}+\frac{۱}{C_{۲٤}}+\frac{۱}{C_۳}\right)^{-۱}$$
$$=\left(\frac{۱}{C}+\frac{۱}{۲C}+\frac{۱}{C}\right)^{-۱}=\frac{۲}{۵}C \qquad (٦-۱۳۱)$$

از باتری بار Q' کشیده می‌شود و در روی هر یک از خازن‌های $C_۱$، $C_{۲٤}$ و $C_۳$ می‌نشینند:

$$Q'=C_{eq}V=\frac{۲}{۵}CV \qquad (٦-۱۳۲)$$

حالا می‌توان اختلاف پتانسیل دو سر خازن‌ها را حساب کرد

$$V_۱=V_۳=\frac{Q'}{C}=\frac{۲}{۵}V=٤٨\ \text{V} \qquad (٦-۱۳۳)$$

$$V_۲=V_٤=\frac{Q'}{۲C}=\frac{۱}{۵}V=۲٤\ \text{V} \qquad (٦-۱۳٤)$$

آزمون‌های کوتاه و چند گزینه‌ای

۱-۶ بار Q به فاصله‌ی h از یک رسانای تخت بینهایت گسترده قرار دارد. چه نیرویی به بار Q وارد می‌شود؟

(الف): $Q^۲/٤\pi\varepsilon_۰h^۲$ و به سوی بیرون از رسانا **(ب):** $Q^۲/۱٦\pi\varepsilon_۰h^۲$ و به سوی بیرون از رسانا

(پ): $Q^۲/٤\pi\varepsilon_۰h^۲$ و به سوی رسانا **(ت):** $Q^۲/۱٦\pi\varepsilon_۰h^۲$ و به سوی رسانا **(ج):** صفر

۲-۶ کدام تغییرات: (۱) افزایش بار، (۲) افزایش فاصله‌ی (۳) افزایش سطح (٤) افزایش همه‌ی ابعاد با یک ضریب در یک خازن تخت با صفحه‌های موازی ظرفیت آن را افزایش می‌دهد؟

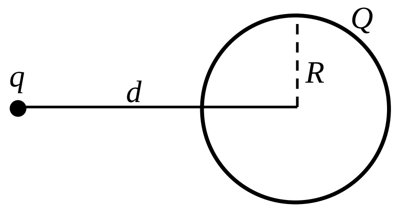
(الف): ۲ **(ب):** ۳ و ٤ **(پ):** ۱ و ۳ **(ت):** ۲ و ٤ **(ج):** ۱ و ۲

۳-۶ ظرفیت خازن تخت با صفحه‌های موازی $\varepsilon_۰A/s$ است. اگر فاصله‌ی s بین صفحه‌ها را افزایش دهیم (سطح صفحه‌ها تغییر نمی‌کنند) تا این که صفحه‌ها خیلی از هم دور بشوند (و سامانه دیگر شبیه خازن معمولی نباشد) کدام گزاره در باره‌ی ظرفیت سامانه‌ی با آرایش جدید درست است

(الف): ظرفیت بزرگ‌تر از حالت اولیه می‌شود. **(ب):** ظرفیت کم‌تر از حالت اولیه می‌شود.

(پ): ظرفیت سامانه تغییر نمی‌کند. **(ت):** ظرفیت دیگر بی معنی است.

٤-۶ بار q در فاصله‌ی d از مرکز یگ پوسته‌ی کروی رسانا به شعاع R و بار کل Q قرار دارد. میدان الکتریکی بار q و



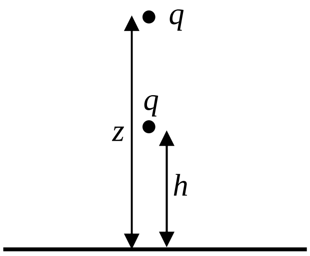
توزیع بار در روی پوسته، در مرکز پوسته به طور جداگانه عبارتند از (سوی راست را مثبت فرض کنید.)

(الف): $E_q=\circ\ ,\ E_{\text{shell}}=\circ$ **(ب)**: $E_q=q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ d^{\text{٢}},\ E_{\text{Sell}}=\circ$

(پ): $E_q=\circ\quad ,\quad E_{\text{Sell}}=-Q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ R^{\text{٢}}$

(ت): $E_q=q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ d^{\text{٢}},\quad E_{\text{Sell}}=-Q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ R^{\text{٢}}$

(ج): $E_q=q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ d^{\text{٢}},\quad E_{\text{Sell}}=-q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ R^{\text{٢}}$



۵-۶: بار q در فاصله‌ی h از یک صفحه‌ی رسانای بینهایت گسترده قرار دارد. بار نقطه‌ی q دیگری در ارتفاع z ($z>h$) بالای صفحه است. بسته با مقدار z (با $z>h$) نیروی وارد به بار بالایی :

(الف): همواره به سوی بالاست

(ب): همواره به سوی پایین است.

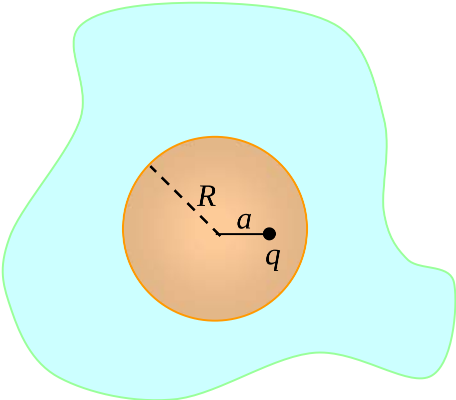
(پ): همیشه صفر است.

(ت): شاید رو به بالا، شاید رو به پایین و شاید صفر است.

مسئله‌ها

۶-۱ **خط میدان افقی**: میدان الکتریکی بار نقطه‌ای واقع در بالای صفحه‌ی تخت رسانا (شکل ۱۰-۶) را در نظر بگیرید. اگر یکی از خط‌های میدان را پی بگیرید که از بار نقطه‌ای آغاز می‌شود و افقی (موازی صفحه) ادامه می‌یابد، در کجا به سطح رسانا می‌رسد؟*

۶-۲ بار q در درون کاواکی کروی به شعاع R و در فاصله‌ی a از مرکز کاواک قرار دارد. مختصات مکان بار q را $(a,0,0)$ بنامید. برابر شکل (۴۸-۶)، کاواک در درون رسانای متصل به زمین و با شکل دلخواه قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را در درون کاواک کروی حساب کنید. آیا به بار q نیرویی وارد می‌شود؟ اگر پاسختان آری است، اندازه‌ی نیرو را حساب کنید. اگر گمان می‌کنید که به بار q نیرو وارد نمی‌شود، توضیح دهید که چرا. توزیع بار را بر روی سطح به‌دست آورید.



شکل ۴۸-۶ کاواک کروی در رسانا

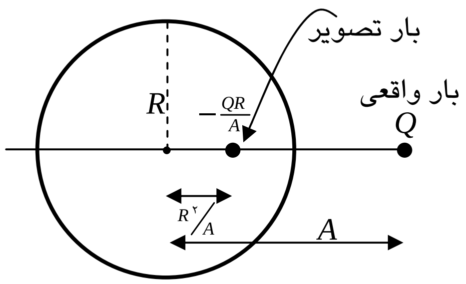
۶-۳ **بار تصویر** ۱: بار نقطه‌ای q بین دو صفحه‌ی موازی و تخت رسانا قرار دارد. فاصله‌ی بار از یک صفحه d و از دیگری $\ell-d$ است. بارهای تصویر در کجا باید قرار گیرند تا میدان الکتریکی در همه‌جا بر صفحه‌ها عمود باشد؟

۶-۴ **بار تصویر** ۲: **(الف)** یک بار نقطه‌ای $-q$ در $x=a$ و بار نقطه‌ای دیگر Q در $x=A$ قرار دارند. نشان دهید که مکان‌های نقاط با پتانسیل $V=0$ دایره‌ای در صفحه‌ی $x-y$ است (و در نتیجه، یک پوسته‌ی کروی در فضا است).

(ب): برای این که مرکز دایره در $x=0$ باشد، چه رابطه‌ای بین q، Q، a و A باید وجود داشته باشد؟

(پ): فرض کنید رابطه‌ای را که در بخش (ب) یافتید، برقرار است. شعاع دایره را برحسب a و A حساب کنید.

(ت): توضیح دهید که چرا نتایج شما در بخش‌های پیش به گزاره‌ی زیر می‌انجامد: اگر بار Q در فاصله‌ی $A>R$ از مرکز یک پوسته‌ی کروی رسانای متصل به زمین و با شعاع R باشد، میدان ناشی از پوسته در **بیرون** آن با میدان یک بار تصویر نقطه‌ای با اندازه‌ی $-q=-QR/A$ جایگزیده در فاصله‌ی $a=R^2/A$ از مرکز پوسته برابر است. میدان کل در بیرون پوسته از جمع این میدان و میدان بار Q به‌دست می‌آید (بنا به قضیه‌ی یگانگی، میدان در ناحیه‌ی درون پوسته صفر است.). شکل (۴۹-۶) را ببینید.



شکل ۴۹-۶ کره در $V=0$

(ج): همچنین درستی گزاره‌ی زیر را نتیجه بگیرید: اگر بار $-q$ در **درون** پوسته‌ی کروی رسانای متصل به زمین با شعاع R و در فاصله‌ی $a<R$ از مرکز کره باشد، میدان ناشی از پوسته در **درون** آن با میدان حاصل از بار تصویر $Q=qR/a$ جایگزیده در فاصله‌ی $A=R^2/a$ از مرکز پوسته برابر است. میدان کل در درون پوسته جمع این میدان و میدان ناشی از بار q است. (میدان در بیرون پوسته، ناشی از بار $-q$ در مرکز است.)

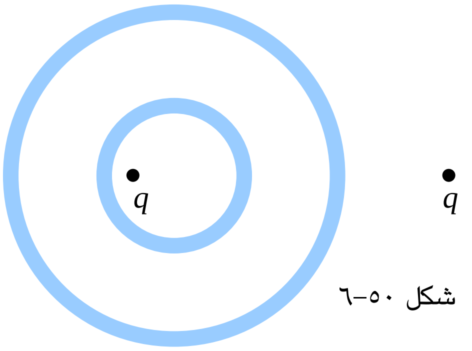
---

* بر گرفته از: Edward M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, McGraw-Hill, 1985

۶-۵ **بار تصویر ۳**: بار Q در فاصله‌ی $r>R$ از مرکز پوسته‌ی رسانای کروی به شعاع R قرار دارد. پوسته به زمین وصل **نیست** و بار روی آن مقدار معین q_s است. میدان در بیرون پوسته را می‌توان با استفاده از بارهای تصویر در مسئله‌ی ٤-٦ به همراه یک بار تصویر اضافی بازآفرینی کرد. بار تصویر اضافی چقدر است و در کجا قرار دارد؟

۶-۶ **بار تصویر** :۴ بار نقطه‌ای q در بیرون یک پوسته‌ی رسانای کروی قرار دارد. بار کل در روی پوسه هم q است. اگر بار نقطه‌ای خیلی به پوسته نزدیک باشد، چگالی بار سطحی در طرف نزدیک به بار پوسته منفی خواهد بود. اما اگر بار نقطه‌ای خیلی از پوسته دور باشد، توزیع بار سطحی در همه جای روی پوسته مثبت خواهد بود (و اساسا توزیع یکنواخت خواهد داشت). نشان دهید که جدایی بین این دو حالت جایی است که بار نقطه‌ای در فاصله‌ی $\frac{R}{۲}\left(۳+\sqrt{۵}\right)$ از مرکز پوسته یا در فاصله $\frac{R}{۲}\left(۱+\sqrt{۵}\right)$ از سطح پوسته قرار گیرد. این ضریب، کسر طلایی است.

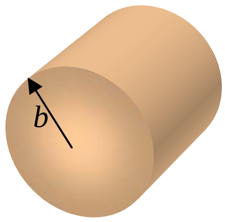
۶-۷ **دو کره و دو بار**: **(الف)** شکل (٥٠-٦) دو پوسته‌ی رسانای کروی کلفت و هم‌مرکز را نشان می‌دهد. ناحیه‌های سفید خلاء اند. دو بار نقطه‌ای q در مکان‌هایی قرار دارند که در شکل دیده می‌شوند (بار درونی در مرکز نیست.) نمودار به نسبت دقیقی برای خط‌های میدان در همه‌ی ناحیه‌ها رسم کنید و توزیع بارهای مختلف را نشان دهید. چه کمیت‌هایی تقارن کروی دارند؟



شکل ٥٠-٦

(ب): اگر دو پوسته با سیمی به هم وصل شده باشند و در نتیجه، در پتانسیل یکسان باشند، پرسش بالا را دوباره برای این وضعیت پاسخ دهید.

۶-۸ **خازن استوانه‌ای با شعاع متغیر**: چگالی خطی بار در روی یک پوسته‌ی رسانای استوانه‌ای بسیار نازک $\lambda\left[\mathrm{C/m}\right]$ است. شعاع قاعده‌ی این پوسته b است. پوسته‌ی رسانای نازک دیگری با چگالی بار خطی $-\lambda\left[\mathrm{C/m}\right]$ در درون آن پوسته‌ی اولی و هم‌محور با آن قرار دارد. شکل (٥١-٦) . شعاع پوسته‌ی درونی به کندی و به صورت $a(t)=\frac{a_\circ}{۲}\left[\cos(\omega t)+۲\right]$ با زمان تغییر می‌کند (یعنی می‌توانید از اثرهای القایی چشم‌پوشی کرد که به زودی در باره خواهیم آموخت).$b>a_\circ$ است.



شکل ٥١-٦ استوانه با شعاع متغیر

(الف): ظرفیت $C(t)$ در واحد طول این سامانه را به صورت تابعی از زمان حساب کنید.

(ب): از زمان $t=\circ$ تا زمان $t=T$ چه مقدار کار در واحد طول انجام گرفته است؟

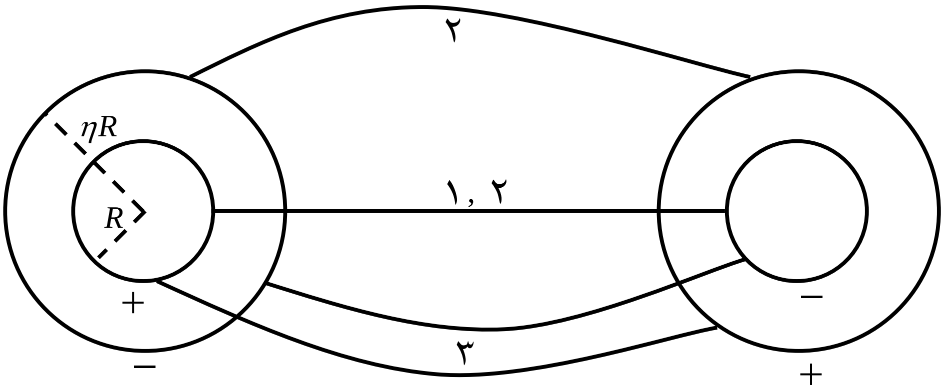
۶-۹ **دو جفت پوسته‌ی کروی**: دو جفت پوسته‌ی کروی هم‌مرکز رسانا داریم که بسیار از یکدیگر دورند. در جفت نخست شعاع پوسته‌ی درونی R و بار کل آن Q است. شعاع پوسته‌ی بیرونی ηR و بار کل آن $-Q$ است. η یک ضریب عددی بزرگ‌تر از یک است. در جفت دوم شعاع پوسته‌ی درونی R و بار کل آن $-Q$ است. شعاع پوسته‌ی بیرونی ηR و بار کل آن Q است. شکل (٥٢-٦). در هر یک از حالت‌های زیر بارهای جدید را بر روی هر پوسته حساب کنید.

۱. فقط پوسته‌های درونی را با سیم به هم وصل کنید.

۲. با یک سیم دو پوسته‌ی درونی را به هم وصل کنید و با سیم دیگری پوسته‌های بیرونی را به هم وصل کنید.

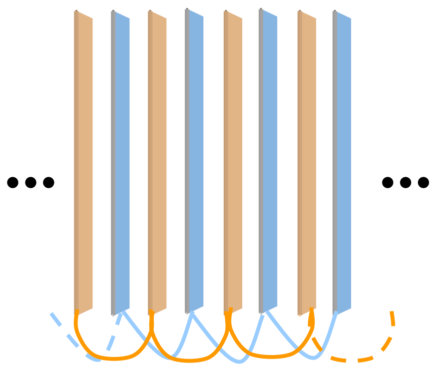
۳. دو پوسته‌ی با بار مثبت را با سیم به هم وصل کنید و دو پوسته‌ی با بار منفی را با سیم دیگری به یکدیگر وصل کنید. در

این حالت ظرفیت آرایه را بیابید.



شکل ٦-٥٢ دو جفت پوسته‌ی کروی

۶-۱۰ خازن با $۲N$ صفحه: ظرفیت خازن شامل $۲N$ صفحه‌ی موازی را حساب کنید. هر صفحه یک مربع با مساحت A است و فاصله‌ی آنها از یکدیگر s است. صفحه‌ها را از چپ به راست به ترتیب، با ۱، ۲، $\cdots$ شماره‌گذاری کنید، همه‌ی صفحه‌های فرد با سیم به یکدیگر وصل اند و صفحه‌های زوج هم با سیمهای دیگری به یکدیگر وصل شده اند. شکل (٦-٥٣) را ببینید. می‌توانید فرض کنید که $s \gg \sqrt{A}$ است.



شکل ٦-٥٣ خازن با $۲N$ صفحه

۶-۱۱ خازن با سه پوسته: خازنی از سه پوسته‌ی کروی هم مرکز به شعاع‌های R، $۲R$ و $۳R$ ساخته شده است. پوسته‌ی درونی و بیرونی با سیم به‌هم وصل اند و در پتانسیل یکسان قرار دارند. پوسته‌ها نخست بدون بار اند. اما یک باتری بارها را از پوسته‌ی میانی به پوسته‌های بیرونی و درونی منتقل می‌کند.

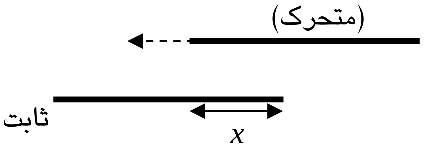
(الف): اگر بار نهایی روی پوسته‌ی میانی $-Q$ باشد، بارهای روی پوسته‌ی درونی و بیرونی را بیابید.

(ب): ظرفیت سامانه را حساب کنید

(پ): اگر باتری را ازپوسته‌ها جدا کنیم و بار q را به پوسته‌ی بیرونی بیفزاییم، بارهای پوسته‌ها را حساب کنید.

۶-۱۲ خازن با بارهای نابرابر: خازن تختی با صفحه‌های موازی را در نظر بگیرید. اندازه‌ی بارها در روی دو صفحه متفاوت اند. بار روی صفحه‌ها را $Q_۱$ و $Q_۲$ بنامید. مقدار بار موجود در رویه‌ی درونی و بیرونی هر صفحه را حساب کنید.

۶-۱۳ نیروی وارد به صفحه‌ی خازن: خازن تختی با صفحه‌های موازی شامل یک صفحه‌ی ثابت و یک صفحه‌ی قابل حرکت است و می‌تواند در امتداد خودش بلغزد شکل (٦-٥٤). طول هم‌پوشانی دو صفحه را x بنامید.



شکل ٦-٥٤ خازن باصفحه‌ی متحرک

(الف): فرض کنید صفحه‌ها از نظر الکتریکی منزوی اند و در نتیجه بار روی آنها مقدار ثابتی است. نیرویی که می‌خواهد دو صفحه را به سوی یکدیگر بکشد.

رابطه‌ای برای این نیرو برحسب بار Q و ظرفیت C خازن بیابید. (*راهنمایی:* به تغییر انرژی برحسب x بیندیشید. بخش ٦-٨ را ببینید).

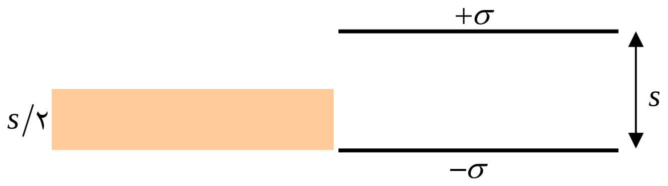
(ب): حالا فرض کنید صفحه‌ها به یک باتری وصل اند و بنابراین، در اختلاف پتانسیل ثابتی قرار دارند. رابطه‌ای برای‌نیرویی که صفحه‌ها یکدیگر را جذب می‌کنند، برحسب اختلاف پتانسیل V و ظرفیت C بیابید.

(پ): اگر با نیرویی بازدارنده، صفحه‌ها را در جایشان ثابت نگه داریمف هر یک از چیدمان‌های (الف) و (ب) معنی‌دار خواهند بود، چون چیزی جابه‌جا نمی‌شود و در نتیجه، نیروهایی که در بخش (الف)و (ب) به‌دست آوردید باید برابر باشند. نشان دهید که این گزاره درست است.

۶-۱۴ **بازهم نیروی وارد به صفحه‌ی خازن**: هر سه بخش مسئله‌ی ۱۳-۶ را دوباره حل کنید، اما این بار از واژه‌ی "خازن" در حل خود استفاده نکنید. به جای آن انرژی خازن را با استفاده از تعریف چگالی انرژی میدان الکتریکی به‌دست آورید. نیرو را برحسب فاصله‌ی هم‌پوشانی x، فاصله‌ی جدایی s دو صفحه، پهنای ℓ صفحه (در جهتی که بر صفحه‌ی کاعد عمود است) و بار Q (برای قسمت (الف)) یا برحسب σ (در قسمت (ب)) بیابید.

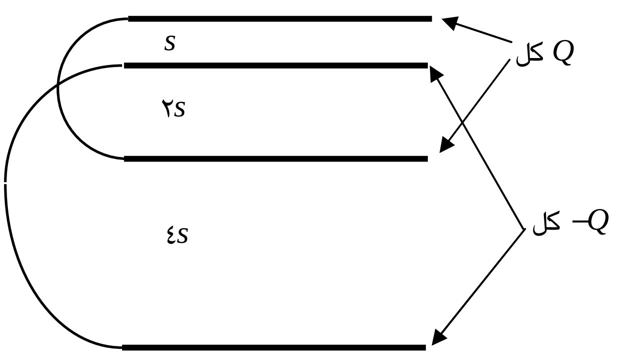
۶-۱۵ **بیشینه انرژی در خازن استوانه‌ای**: می‌خواهیم با دو پوسته‌ی استوانه، یک خازن استوانه‌ای طراحی کنیم که فضای بین استوانه‌ها خلاء باشد و بیش‌ترین مقدار انرژی را در خود ذخیره کند. محدودیت‌های خازن عبارتند از این که شعاع استوانه بیرونی مقدار معین a است وشدت میدان در روی استوانه‌ی درونی نباید از $E_\circ$ بیش‌تر باشد. برای استوانه‌ی داخلی چه شعاع b باید انتخاب بشود. در واحد طول این خازن چه مقدار انرژی می‌توان ذخیره کرد؟

۶-۱۶ **خازن نیمه‌پُر**: در شکل (۵۵-۶) مساحت صفحه‌های خازن A و فاصله‌ی آنها s است. صفحه‌ها به یک باتری وصل اند تا در اختلاف پتانسیل ثابتی باقی بمانند. تیغه‌ی رسانای بدون باری به ضخامت $s/۲$ در بیرون خازن با دست نگه داشته شده است. چگالی بار اولیه‌ی صفحه‌ها $\pm\sigma$ است. تیغه را رها می‌کنیم. تیغه به درون استوانه رانده می‌شود. در لحظه‌ای که تیغه کاملا در درون خازن قرار می‌گیرد، انرژی جنبشی آن چقدر است؟ (تیغه به راستی به درون خازن رانده می‌شود. این را از واقعیت می‌توان دید که انرژی جنبشی که حساب می‌کنید مثبت خواهد بود.) فراموش نکنید که باتری کار انجام می‌دهد.



شکل ۵۵-۶ تیغه و خازن

۶-۱۷ **خازن با چهار صفحه۱**: خازنی از چهار صفحه‌ی تخت موازی تشکیل شده است. صفحه‌ها بزرگ اند و مساحت هر یک A است. فاصله‌ی بین صفحه‌ها برابر شکل (۵۶-۶) به ترتیب، s، ۲s و ۴s اند. (فرض کنید s در مقایسه باطول و پهنای صفحه‌ها کوچک است. صفحه‌ی اول و سوم با سیمی به یکدیگر وصل شده اند و بار کل Q بر روی این صفحه‌ها قرار دارد. صفحه‌های دوم و چهارم هم با سیم به یکدیگر وصل اند و بار کل $-Q$ بر روی این صفحه‌ها نشسته است.



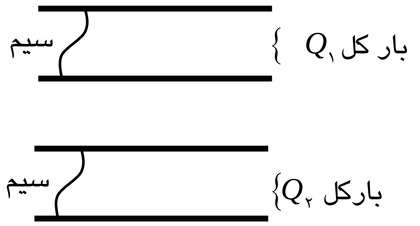
شکل ۵۶-۶ خازن با چهار صفحه

(الف): چگالی بار هر هشت رویه‌ی چهار صفحه را بیابید.

(ب): ظرفیت سامانه را حساب کنید.

۶-۱۸ **خازن با چهار صفحه۲**: چهار صفحه‌ی بینهایت گسترده برابر شکل (۵۷-۶) موازی هم قرار دارند. دو صفحه‌ی بالایی با

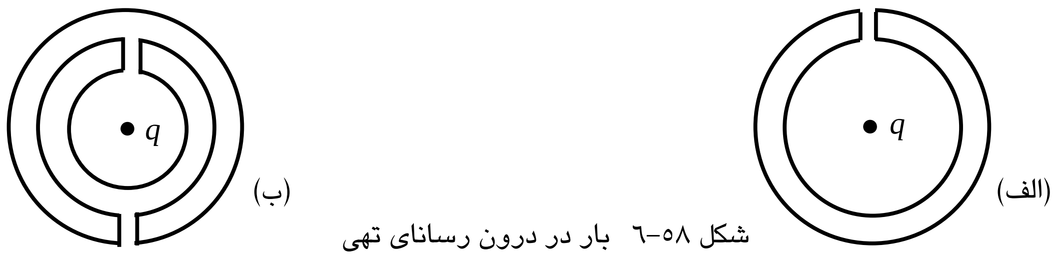
سیمی به یکدیگر وصل اند و در نتیجه، در پتانسیل یکسان اند. دو صفحه‌ی پایینی هم با سیم به یکدیگر وصل اند و در پتانسیل یکسان قرار دارند. بار کل Q_1 بر روی دو صفحه‌ی بالایی و بار کل Q_2 بر روی دو صفحه‌ی پایینی نشسته اند. بار موجود در هر یک از چهار صفحه را بیابید. بگویید که چرا این چیدمان با خازن تخت معمولی دو صفحه‌ای (بدون اتصال) با بارهای Q_1 در روی یک صفحه و Q_2 در روی صفحه‌ی دوم هم‌ارز است.



شکل ۵۷-۶ خازن با ٤ صفحه

۱۹-۶ پایستگی انرژی و فشردن کره: پوسته‌ی رسانای کروی با شعاع R در پتانسیل V قرار دارد (اگر دوست دارید آن را بخشی از یک خازن کروی در نظر بگیرید که پوسته‌ی دیگرش در بینهایت است). با یک باتری پتانسیل V را ثابت نگه می‌داریم، اما پوسته را کوچک می‌کنیم تا اساسا شعاع آن صفر بشود (در طول کوچک کردن پوسته، همواره آن را کروی نگه می‌داریم). با محاسبه‌ی انرژی اولیه و نهایی که در این سامانه ذخیره شده است و کاری که برای کوچک کردن پوسته انجام می‌گیرد، نشان دهید که انرژی پایسته می‌ماند. به روشنی بگوییید که منظورتان از گزاره‌ی پایسته بودن انرژی یعنی چه. به علامت کمیت‌های مختلف دقت کنید.

۲۰-۶ درون یا بیرون: بار نقطه‌ای q در مرکز یک پوسته‌ی رسانای استوانه‌مانند تهی قرار دارد. سطح مقطع رسانا در شکل (۵۸-۶) در دو حالت نشان داده شده است. در هر دو حالت، توزیع بارهای القایی روی رسانا را با تقریب خوبی نشان دهید. بگویید که بارها در کدام طرف سطح قرار دارند. آیا توزیع شما با این واقعیت که اگر در درون رسانا بار وجود نداشته باشد، میدان الکتریکی در درون رسانا صفر است، سازگار است؟



شکل ۵۸-۶ بار در درون رسانای تهی

۷- میدان‌های الکتروستاتیک در ماده

۷-۱ دی‌الکتریک‌ها

بررسی ما تاکنون از مسئله‌های الکتروستاتیک مانند میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی، انرژی و ··· به محیط‌هایی محدود بود که در آن ماده وجود نداشت (به جز استفاده از رساناها برای تثبیت سطوح هم‌پتانسیل). ثابت گذردهی فضای تهی، $\varepsilon_\circ$، با حضور خود در همه‌ی رابطه‌ها، همیشه یادآور سرشت محیط بود. در این فصل می‌خواهیم اثر میدان‌های الکتروستاتیکی را بر ماده و واکنش ماده در برابر میدان‌ها را بررسی کنیم.

ماده گونه‌های مختلف دارد: به صورت مایع، گاز، جامد یا پلاسما در طبیعت وجود دارد. هر یک از این حالت ها هم انواع متفاوت دارد. شیشه، پلاستیک، چوب ... انواع مختلف ماده‌ی جامد نارسانا با ویژگی‌های مخصوص به خود است. آب و انواع روغن‌ها گونه‌هایی از مایع اند.

وقتی مواد مختلف در میدان الکتروستاتیکی قرار می‌گیرند، نسبت به میدان واکنش نشان می‌دهند. رفتار مواد مختلف در میدان الکتریکی متفاوت است. با وجود این، بیشتر موادی که روزانه با آن‌ها سروکار داریم به یکی از دو گروه **رسانا** و **نارسانا** (یا **دی‌الکتریک**) تعلق دارند. دی‌الکتریک واژه‌ی یونانی است و به موادی گفته می‌شود که می‌توان در درون آنها، بدون ایجاد جریان چشمگیری، میدان الکتریکی تولید کرد.

در فصل ٤، وقتی که در باره‌ی رساناها سخن گفتیم، تعریفی از این دو گروه آوردیم و دیدیم که چگونه آنها را دسته‌بندی می‌کنیم. رساناها آن دسته از مواد اند که هر اتم یا مولکول آن یک یا دو الکترون آزاد به محیط می‌دهد. در نتیجه، بارهای "بسیار زیادی" در این مواد وجود دارند که در درون ماده‌ی رسانا آزادانه حرکت می‌کنند. به بیان دیگر این الکترون ها به هیچ اتم یا مولکول خاصی در رسانا وابسته نیستند.

برعکس، در مواد دی‌الکتریک هر بار الکتریکی به یک اتم یا مولکول خاصی وابسته است. انگار که در دام اتم یا مولکول افتاده است و آزادی چندانی برای جابه‌جایی ندارد. حداکثر جابه‌جایی بار در مواد دی‌الکتریک، حرکتی اندک در فضای اتم یا مولکول خودش است. در مقایسه با آزادی حرکت بارها در رسانا، این جابه‌جایی جزیی به تنهایی چندان مهم نیست؛ اما اثرهای دسته جمعی آن‌ها رفتار سرشتی دی‌الکتریک را تعیین می‌کند.

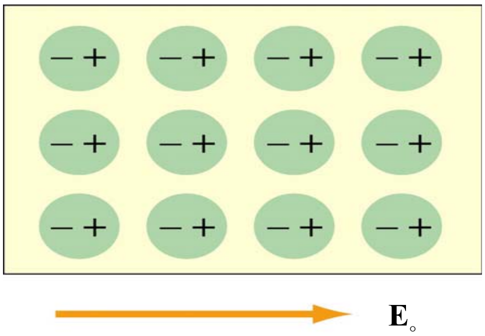
در حدود سال ۱۷۷۰ کاوندیش در آزمایشی دریافت که اگر فضای بین صفحه‌های خازن تخت کاملا با ماده‌ی نا رسانا، مانند شیشه یامقوا، انباشته شود ظرفیت C خازن با ضریب $k > ۱$ افزایش می‌یابد. ضریب k مستقل از شکل و ابعاد خازن است و **ثابت دی‌الکتریک** نامیده می‌شود. فاراده این آزمایش را مستقل از کاوندیش در سال ۱۸۳۷ تکرار کرد و به همان نتیجه رسید. برای این که رفتار دی‌الکتریک را بفهمیم، باید ساختار اتمی ماده را بیاموزیم. اگرچه ماده‌ی کپه‌ای از نظر بارالکتریکی بی بار است، اما با بررسی جزییات آن دیده می‌شود که از اتم‌های با بارهای مثبت و منفی مساوی ساخته شده است.

اگر یک اتم یا مولکولی در میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، آرایش بار آن تغییر می‌کند. میدان الکتریکی خارجی، بارهای مثبت و منفی یک اتم را نسبت به هم اندکی جابه‌جا می‌کند. این جابه‌جایی بارها، ماده را **قطبیده*** می‌کند. ثابت دی‌الکتریک معیاری برای قطبش ماده‌ی دی‌الکتریک است. کمیتی که قطبش ماده را مستقیم به میدان الکتریکی خارجی مربوط می‌کند، **پذیرفتاری الکتریکی**†، χ_e ، ماده است.

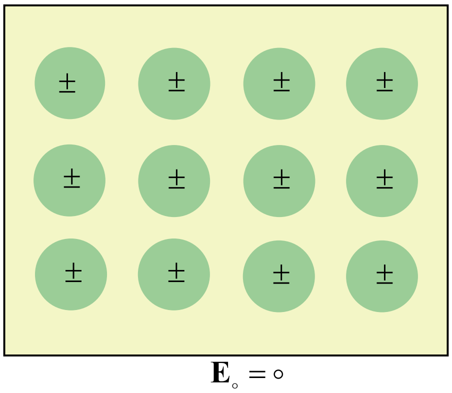
---

* polarized
† electric susceptibility

برای این که قطبش ماده را بفهمید، مدل ساده‌ای برای اتم تصور کنید که در آن، مرکز بارهای مثبت و مرکز بارهای منفی، در نبود میدان الکتریکی خارجی، برهم منطبق اند (شکل ۷-۱). اگر این اتم یا مولکول در میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{E}_0$ قرار گیرد، مرکز بارهای مثبت در جهت میدان و مرکز بارهای منفی در خلاف جهت میدان $\mathbf{E}_0$ اندکی جابه‌جا می‌شوند و به‌صورتی در می‌آیند که درشکل (۷-۲) می‌بینید. جدایی مرکز بارهای مثبت و منفی یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}$ به اتم القاء



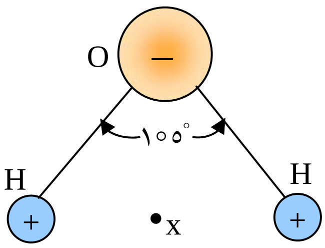
شکل ۷-۲ اتمهای دی‌الکتریک در میدان الکتریکی $\mathbf{E}_0$



شکل ۷-۱ اتمهای دی‌الکتریک ناقطبیده در نبود میدان الکتریکی خارجی

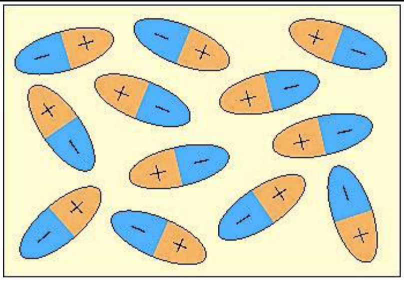
می‌کند.

در برخی مواد، مرکز بارهای مثبت و منفی برهم منطبق نیستند و در نتیجه، مولکول‌های این مواد به طور سرشتی گشتاور دوقطبی دایمی دارند. یک نمونه‌ی آشنا مولکول آب است. هندسه‌ی مولکول آب در شکل (۷-۳) نشان داده شده است، با مراجعه به این شکل می‌بینیم که پیوند بین اتم اکسیژن و اتمهای هیدروژن زاویه‌ی ۱۰۵ درجه می‌سازد. مرکز بارهای منفی، در اتم اکسیژن است و مرکز بارهای مثبت در نقطه‌ی x، وسط خطی که اتمهای هیدروژن را به هم می‌پیوندد، قرار دارد. این ساختار به آب گشتاور دوقطبی بزرگی ($۶,۱\times ۱۰^{-۳۰}\ C\cdot m$) می‌دهد و آب را حلال بسیار خوبی می‌کند. مولکول‌هایی که گشتاور دوقطبی ذاتی دارند ، **مولکول قطبیده** نامیده می‌شود. در حالت معمولی جهت گیری این مولکول‌ها، همانند شکل (۷-۴) کاتوره‌ای است و میدان الکتریکی آنها یکدیگر را حذف می‌کنند. اما اگر در میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{E}_0$ قرار گیرند، میدان خارجی به هر دوقطبی گشتاوری برابر با $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}_0$ وارد می‌کند و می‌کوشد آن را در راستای میدان خارجی قرار دهد (نگاه کنید به بخش ۲-۳). جهت‌گیری مولکول‌ها در میدان الکتریکی خارجی در شکل (۷-۵) نشان داده شده است. به خاطر حرکت گرمایی، جهت‌گیری در راستای میدان کامل نیست. با وجود این، جهت‌گیری مولکول‌ها در راستای میدان خارجی، سبب می‌شود که میدان‌های دوقطبی‌ها یکدیگر را تقویت کنند و یک میدان الکتریکی به وجود آورند که در خلاف جهت میدان خارجی است. اندازه‌ی این میدان کوچک‌تر از اندازه‌ی میدان خارجی است.

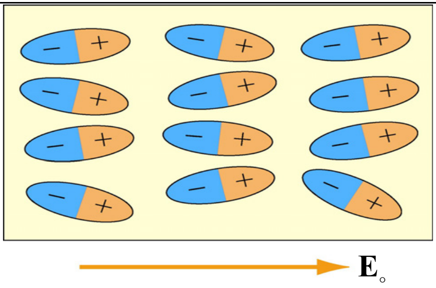


شکل ۷-۳ مولکول آب H_2O

بنابراین، دو نوع ماده‌ی دی‌الکتریک وجود دارد: موادی که مولکول‌هایش دوقطبی ذاتی ندارند و موادی که هر مولکول آن قطبیده است. اما اثر میدان الکتریکی خارجی بر روی هر دو نوع ماده یکی است: آن را قطبیده می‌کند. وقتی ماده‌ی ناقطبیده در میدان خارجی قرار می‌گیرد، میدان خارجی به مولکول‌های ماده دوقطبی القاء می‌کند وگشتاور دوقطبی آنها در راستای میدان خارجی قرار می‌گیرد. اگر ماده قطبیده باشد، میدان خارجی گشتاور دوقطبی مولکول‌های آن را می‌چرخاند ودر جهت میدان قرار می‌دهد. در هر دو حالت، نتیجه یکی است: گشتاوردوقطبی‌های الکتریکی در راستای میدان خارجی قرار می‌گیرند و ماده‌ی



شکل ٤–٧ توزیع کاتوره‌ای گشتاورهای دوقطبی مولکول‌ها



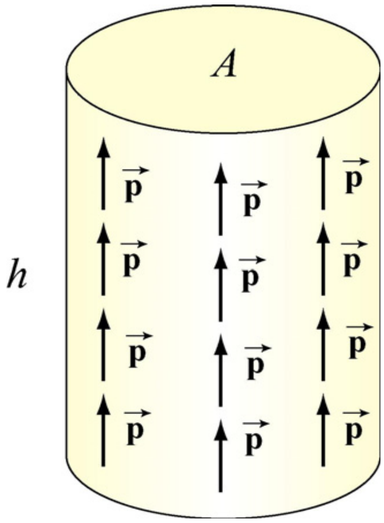
شکل ٥–٧ جهت‌گیری دوقطبی مولکول‌ها در راستای میدان $\mathbf{E}_\circ$ خارجی

دی‌الکتریک **قطبیده** می‌شود. دوقطبی‌هایی که به این ترتیب آراسته می‌شوند، میدان الکتریکی خود را، $\mathbf{E}_p$، تولید می‌کنند. مفهوم کلیدی برای فهمیدن مواد دی‌الکتریک، محاسبه‌ی میدان میانگین تعداد زیادی دوقطبی‌های الکتریکی ریزی است که در اثر اعمال میدان خارجی همسو شده اند.

فرض کنید یک قطعه ماده‌ی دی‌الکتریک به شکل استوانه‌ای با سطح قاعده‌ی A و ارتفاع h داریم. فرض کنید این قطعه N تا دوقطبی الکتریکی دارد و گشتاور دوقطبی الکتریکی هر یک $\mathbf{p}$ است که به طور یکنواخت در حجم استوانه و در راستای محور آن توزیع شده‌اند؛ شکل (٦–٧) را ببینید. هر دوقطبی الکتریکی میدان الکتریکی مخصوص به خود را دارد. می‌خواهیم در نبود میدان الکتریکی خارجی، میانگین فضایی میدان‌های ناشی از این دوقطبی‌های الکتریکی همسو را حساب کنیم. برای این کار نخست **بردار قطبش** $\mathbf{P}$ را تعریف کنید که گشتاور دوقطبی الکتریکی در واحد حجم ماده است. به بیان دیگر، $\mathbf{P}$ چگالی حجمی گشتاور دوقطبی ماده است.

$$\mathbf{P} \equiv \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i \qquad (۷–۱)$$

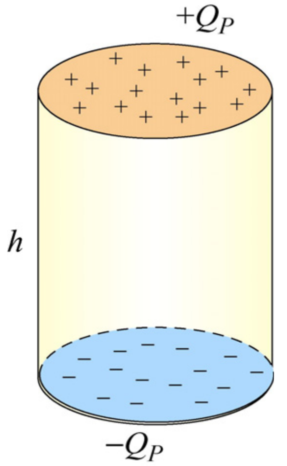
که در آن V حجم ماده‌ی دی‌الکتریک است. بنابراین، در ماده‌ی استوانه‌ای مثال ما که همه‌ی دوقطبی‌ها کاملا همسو و گشتاور دوقطبی‌شان $\mathbf{p}$ است، داریم:



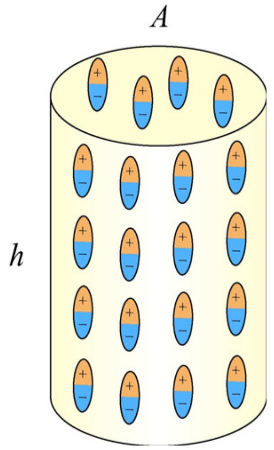
شکل ٦–٧ استوانه با توزیع یکنواخت دوقطبی‌ها

$$P = N_p / Ah \qquad (۷–۲)$$

و جهت $\mathbf{P}$ همسو با گشتاور دوقطبی‌های هم‌راستاست. حالا می‌توان میدان میانگین دوقطبی‌های الکتریکی را حساب کرد. نکته‌ی مهم این است که به هم‌ارزی شکل‌های (۷–۷) و (۸–۷) توجه کنیم. در شکل (۸–۷) همه‌ی بارهای کوچک ± دوقطبی‌های درون دی‌الکتریک با دو بار $\pm Q_P$ در دو سطح بالا و پایین استوانه جایگزین شده اند. فهمیدن هم‌ارزی این دو شکل ساده است. در فضای درون دی‌الکتریک، بارمثبت یک دوقطبی با بار منفی دو قطبی دیگری که در بالای آن قرار دارد، یکدیگر را حذف می‌کنند. تنها جایی که این حذف شدن اتفاق نمی‌افتد، درسطح بالایی و پایینی استوانه است. چون در سطح بالایی استوانه، دوقطبی دیگری وجود ندارد که قطب منفی‌اش بار مثبت دوقطبی زیرین را حذف کند و در سطح پایینی آن هم دوقطبی که قطب مثبت آن بتواند بار منفی دوقطبی بالا سرش را حذف کند، وجود ندارد. در نتیجه، در سطح بالایی استوانه فقط بارهای مثبت و در سطح



شکل ۸–۷ توزیع بار هم‌ارز



شکل ۷–۷ استوانه با توزیع یکنواخت دوقطبی‌ها

زیرین آن بارهای منفی باقی می‌مانند. بنابراین، به طور میانگین، حجم استوانه بی بار به نظر می‌آید. پرسش بعدی این است که چگونه بار Q_P را برحسب کمیت‌های داده شده به‌دست آوریم. اگر به شکل (۸–۷) خوب نگاه کنیم، می‌بینیم که خود این استوانه همانند یک دوقطبی است: بارهای $+Q_P$ و $-Q_P$ به فاصله‌ی h از یکدیگر اند (دستکم، برای h و A کوچک این فرض پذیرفتنی است). پس، ساده‌ترین روش برای یافتن Q_P این است که شرط کنیم که گشتاور دوقطبی این استوانه با جمع گشتاورهای دوقطبی‌های شکل (۷–۷) برابر است:

$$Q_P h = Np \quad \Rightarrow \quad Q_P = \frac{Np}{h} \tag{۷–۳}$$

توجه کنید که در یکاهای SI ، یکای P عبارت است از $(\mathrm{C\cdot m})/\mathrm{m}^2 = \mathrm{C}/\mathrm{m}^2$ که در واقع، یکای چگالی بار سطحی است. در مثال بالا، بردار قطبش $\mathbf{P}$ در راستای محور استوانه و در نتیجه بر سطح قاعده عمود بود. در حالت عمومی‌تر، بردار قطبش $\mathbf{P}$ ممکن است با بردار یکه‌ی عمود برسطح $\hat{\mathbf{n}}$ هم‌راستا نباشد و با آن زاویه‌ی θ بسازد. در این صورت، چگالی بار سطحی σ_P عبارت است از

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = P\cos\theta \tag{۷–۵}$$

بنابراین، یافتن میدان میانگین دوقطبی‌ها ، یا به طور هم‌ارز، یافتن میدان حاصل از بارهای Q_P به یافتن میدان الکتریکی خازن تخت با چگالی بار سطحی σ_P کاهش پیدا می‌کند. این میدان را در بخش ٦–٦ و در رابطه‌ی (٥٧–٦) حساب کردیم و اندازه‌ی آن برابر $E_P = \sigma_P/\varepsilon_\circ = P/\varepsilon_\circ$ است. جهت این میدان از سطح با بار مثبت به سوی سطح با بار منفی است و در نتیجه در خلاف جهت بردار قطبش $\mathbf{P}$ است. پس، شکل برداری آن، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}_P = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \tag{۷–٦}$$

بنابراین، جهت میدان الکتریکی میانگین همه‌ی دوقطبی‌های ریز دی‌الکتریک در خلاف جهت دوقطبی‌هاست. توجه به این نکته مهم است که میدان الکتریکی که در بالا حساب کردیم، میدان میانگین همه‌ی دوقطبی‌هاست. اگر به یک دوقطبی تنها نزدیک شویم، میدان الکتریکی آن متفاوت از آنچه که در بالا به‌دست آوردیم، خواهد بود.

ما فرض کردیم که همه‌ی گشتاورهای دوقطبی‌ها همسو اند. اگر جهت گیری دوقطبی‌ها کاتوره‌ای باشند، قطبش $\mathbf{P}$ در رابطه‌ی (۱–۷) صفر می‌شود و میدان میانگین هم صفر خواهد شد. اگر دوقطبی‌ها به راستای خاصی برتری بدهند و در آن راستا جهت

گیری کنند، آنگاه $\mathbf{P}\neq ۰$ و در نتیجه، میدان میانگین هم غیر صفر می‌شود؛ $\mathbf{E}_P\neq ۰$.

اگر جسم دی‌الکتریک به گونه‌ای باشد که بارمنفی یک دوقطبی آن با بار مثبت دوقطبی قبلی‌اش برابر نباشد، یا بردار قطبش یکنواخت نباشد و در نقاط مختلف، متفاوت باشد، آنگاه حذف شدن بارها در درون ماده‌ی دی‌الکتریک کامل نخواهد بود و مقداری بار القایی حجمی هم، افزون بر بارهای القایی سطحی وجود خواهد داشت. چکالی این بارهای حجمی القایی برابر

$$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P} \qquad (۷-۷)$$

است. این رابطه از اسمان نیامده است، بخش ۲-۷ به توصیف آن می‌پردازد.

**۲-۷ میدان جسم قطبیده، نمایش پتانسیل و بارهای القایی

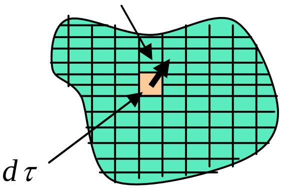
در بخش پیش، یک قطعه دی‌الکتریک قطبیده را در نظر گرفتیم که گشتاورهای دوقطبی آن یکنواخت بود و در جهت خاصی (در راستای محور استوانه و موازی بردار یکه‌ی عمود بر سطح $\hat{\mathbf{n}}$) بودند. در حالت عمومی‌تر، قطعه‌ای دی‌الکتریک را در نظر بگیرید که چگالی گشتاور دوقطبی، $\mathbf{P}$، آن داده شده است. این جسم چه میدان الکتریکی را تولید می‌کند؟ (منظور ما میدانی است که خود قطبش ایجاد می‌کند و نه میدانی که ممکن است قطبش را به‌وجود آورده باشد.) در فصل ۳ پتانسیل یک دوقطبی الکتریکی را حساب کردیم (نگاه کنید به فصل۳، بخش ٤-۳، مثال۹-۳ و رابطه‌ی (۷۲-۳)):

$$V=\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_۰}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^۲} \qquad (۷-۸)$$

که در آن، $\mathbf{r}$ برداری از دوقطبی تا نقطه‌ای است که پتانسیل در آن نقطه حساب می‌شود.

اگر قطعه‌ی دی‌الکتریک شکل (۹-۷) را به اجزاء بسیار کوچک تقسیم کنیم، به هر جزء حجم $d\tau$ می‌توان یک دوقطبی الکتریکی $\mathbf{p}=\mathbf{P}d\tau$ نسبت داد. بنابراین، پتانسیل الکتریکی کل ناشی از دی‌الکتریک عبارت می‌شود از

$$V=\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_۰}\int_{\text{Vol.}}\frac{(\mathbf{P}d\tau)\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^۲}=\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_۰}\int_{\text{Vol.}}\frac{\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^۲}d\tau \qquad (۷-۹)$$



شکل ۹-۷ گشتاور دوقطبی جزء حجم $d\tau$

از طرفی می‌دانیم که

$$\nabla_{r'}\left(\frac{۱}{r}\right)=\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^۲} \qquad (۷-۱۰)$$

است (توجه کنید که مشتق نسبت به مختصات چشمه (r') گرفته شده است و از این رو، علامت منفی در سمت راست ظاهر نشده است. نگاه کنید به رابطه‌ی (۳٦-۱)).

رابطه‌ی (۹-۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V=\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_۰}\int_{\text{Vol.}}\mathbf{P}\cdot\nabla\left(\frac{۱}{r}\right)d\tau \qquad (۷-۱۱)$$

اگر از اتحاد برداری زیر استفاده کنیم

$$\nabla\cdot(f\,\mathbf{A})=f\,(\nabla\cdot\mathbf{A})+\mathbf{A}\cdot(\nabla f) \qquad (۷-۱۲)$$

و قرار دهیم $f\to 1/r$ و $\mathbf{A}\to\mathbf{P}$ خواهیم داشت

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{r}\mathbf{P}\right)=\frac{1}{r}(\nabla\cdot\mathbf{P})+\mathbf{P}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\quad\Rightarrow\quad\mathbf{P}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{1}{r}\mathbf{P}\right)-\frac{1}{r}(\nabla\cdot\mathbf{P}) \qquad (۷-۱۳)$$

پس، رابطه‌ی (۱۱–۷) به صورت انتگرال دو جمله درمی‌آید:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{Vol.}} \mathbf{P}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)d\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{\text{Vol.}} \nabla\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\mathbf{P}\right)d\tau - \int_{\text{Vol.}} \frac{1}{\mathrm{r}}(\nabla\cdot\mathbf{P})d\tau\right] \tag{۷–۱۴}$$

هر دو انتگرال سمت راست بر روی حجمی گرفته شده اند که گشتاورهای دوقطبی را دربر دارد، یعنی بر روی حجم قطعه‌ی دی‌الکتریک. اما، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانش (نگاه کنید به قضیه‌ی ۲–٤ ، رابطه‌ی (١٥٤–٤) در پیوست فصل ٤) می‌توان انتگرال اول سمت راست را به انتگرال روی سطح تبدیل کرد (سطحی که مرزهای دی‌الکتریک است). رابطه‌ی (١٤–٧) به‌صورت زیر در می‌آید

$$V = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\oint_S \frac{۱}{r}\mathbf{P}\cdot d\mathbf{a} - \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\int_{\text{Vol.}} \frac{1}{\mathrm{r}}(\nabla\cdot\mathbf{P})d\tau \tag{۷–۱۵}$$

جمله‌ی اول سمت راست همانند پتانسیل توزیع بار سطحی است (نگاه کنید به رابطه‌ی (٤٢–٣)) که به جای چگالی بار سطحی اینک $\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ قرار دارد. جمله‌ی دوم هم مانند پتانسیل یک توزیع بار حجمی است که به جای چگالی بار حجمی $\rho(r')$ اینک داریم $\rho(r') \to -\nabla\cdot\mathbf{P}$. پس اگر تعریف کنیم

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} \tag{۷–۱٦}$$

$$\rho_P \equiv -\nabla\cdot\mathbf{P} \tag{۷–۱۷}$$

(که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح است) آنگاه رابطه‌ی (١٥–٧) به صورت جمع دو جمله درمی‌آید که یکی پتانسیل ناشی از توزیع بار سطحی و دیگری ناشی از یک توزیع بار حجمی است

$$V = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\oint_S \frac{۱}{r}\sigma_P\, da + \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\int_{\text{Vol.}} \frac{1}{\mathrm{r}}\rho_P\, d\tau \tag{۷–۱۸}$$

این بدان معنی است که پتانسیل الکتریکی یک جسم قطبیده و نیز میدان الکتریکی آن همانند پتانسیل و میدانی است که چگالی بار سطحی $\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ و چگالی بار حجمی $\rho = -\nabla\cdot\mathbf{P}$ تولید می‌کنند. به جای این که از رابطه‌ی پیچیده‌ی (۹–۷) بخواهیم انتگرال بگیریم، می‌توانیم چگالی بارهای σ_P و ρ_P را حساب کنیم ومانند همیشه، میدان آنها را به‌دست آوریم. چگالی بارهای σ_P و ρ_P را چگالی **بارهای القائی** (یا **بارهای پیوندی**)[◊] می‌نامند. روشن است که اگر قطبش $\mathbf{P}$ یکنواخت باشد، چگالی بارهای القایی حجمی، ρ_P، صفر است، اما اگر $\mathbf{P}$ یکنواخت نباشد و در نقاط مختلف دی‌الکتریک متفاوت باشد، $\rho_P \neq ۰$ است.

مثال ۱–۷ کره‌ی دی‌الکتریک با قطبش متغیر: بردار قطبش کره‌ی دی‌الکتریک به شعاع R با $\mathbf{P} = k\,\mathbf{r}$ داده شده است که در آن k مقدار ثابت و $\mathbf{r}$ برداری از مرکز کره است.

(الف): چگالی بارهای القایی σ_P و ρ_P را حساب کنید.

(ب): میدان الکتریکی را در درون و بیرون کره به دست آورید.

حل: **(الف)** ار رابطه‌های (١٥–٧) و (١٦–٧) داریم

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = kR \quad , \quad \rho_P = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}kr\right) = -\frac{۱}{r^{۲}}\left(۳kr^{۲}\right) = -۳k \tag{۷–۱۹}$$

◊ induced (or bound) charges

(**ب**): در ناحیه‌ی درون کره ($r < R$) توزیع بار یکنواخت و برابر $\rho = -3k$ است. با استفاده از قانون گوس می‌توان میدان را به‌دست آورد. این همان مسئله‌ای است که در فصل ٤ و در مثال ٣-٤ حل شده است. بنابراین، با توجه به رابطه‌ی (٢٨-٤) داریم

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho r\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{-3k}{3\varepsilon_0} r\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{k}{\varepsilon_0}\mathbf{r} \tag{7-20}$$

و میدان در بیرون کره همانند میدانی است که انگار همه‌ی بار در مرکز کره قرار دارد. در اینجا دو نوع توزیع بار الکتریکی وجود دارد: حجمی و سطحی. بنابراین، بارهای القایی حجمی Q_1 و بارهای القایی سطحی Q_2 به ترتیب عبارتند از $Q_1 = (-3k)\left(4\pi R^3/3\right)$ و $Q_2 = (kR)(4\pi R^2)$. پس بار کل القایی و میدان حاصل از آنها برابر است با

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 = (-3k)\left(4\pi R^3/3\right) + (kR)(4\pi R^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = 0 \tag{7-21}$$

نکته: جمع کل بارهای القایی همیشه صفر است.♣

پس، اگر بردار قطبش $\mathbf{P}$ در یک ماده‌ی دی‌الکتریک داده شود، می‌توان با استفاده از رابطه‌های (١٦-٧) و (١٧-٧) چگالی بارهای القایی σ_P و ρ_P را حساب کرد و خود ماده را فراموش کرد. با دانستن σ_P و ρ_P میدان با روش همیشگی به‌دست می‌آید.

٣-٧ ماده‌ی دی‌الکتریک در میدان الکتریکی: دی‌الکتریک خطی

در این بخش می‌خواهیم اثر میدان الکتریکی خارجی را روی ماده‌ی دی‌الکتریک بررسی کنیم. نخست فرض کنید، ماده‌ی دی‌الکتریک از اتم یا مولکول‌های با گشتاور دوقطبی الکتریکی دایمی تشکیل شده است. اگر این ماده را به حال خود رها کنیم، گشتاورهای دوقطبی الکتریکی آن هرگز در ماده‌ی دی‌الکتریک به خودی خود هم‌سو نمی‌شوند و در نبود میدان خارجی به خاطر حرکت کاتوره‌ای آنها $\mathbf{P} = 0$ است. بنابراین، میدان الکتریکی میانگین‌شان، $\mathbf{E}_P$، هم صفر است. اما اگر ماده‌ی دی‌الکتریک را در میدان خارجی $\mathbf{E}_0$ قرار دهیم، به هردوقطبی گشتاور $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}_0$ وارد می‌شود. این گشتاور می‌کوشد، دوقطبی را بچرخاند و در راستای میدان $\mathbf{E}_0$ قرار دهد. اثر نهایی، ایجاد قطبش خالص $\mathbf{P}$ موازی با میدان $\mathbf{E}_0$ و در نتیجه، تولید میدان میانگین $\mathbf{E}_P$ است که با $\mathbf{E}_0$ **پادموازی** است. یعنی، میدان میانگین سبب کاهش اندازه‌ی میدان کل $|\mathbf{E}| < |\mathbf{E}_0|$ می‌شود. میدان کل در دی‌الکتریک

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_P = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \tag{7-22}$$

است. بیشتر وقت‌ها قطبش $\mathbf{P}$ نه تنها با میدان $\mathbf{E}_0$ هم جهت اند، بلکه به طور خطی با $\mathbf{E}_0$ (و بنابراین با $\mathbf{E}$) متناسب است. این گزاره پذیرفتنی است، چون بدون $\mathbf{E}_0$، قطبش صفر است. پس می‌توان نوشت

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E} \tag{7-23}$$

$\varepsilon_0\chi_e$ ضریب تناسب بین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{P}$ است. ثابت χ_e **پذیرفتاری الکتریکی** ماده نام دارد و موادی که از رابطه‌ی (٢٢-٧) پیروی کنند، **دی‌الکتریک خطی** نامیده می‌شوند. از رابطه‌های (٢٢-٧) و (٢٣-٧) داریم

$$\mathbf{E}_0 = (1+\chi_e)\mathbf{E} = \kappa_e\mathbf{E} \tag{7-24}$$

که در آن

$$\kappa_e \equiv (1+\chi_e) \tag{7-25}$$

ثابت دی‌الکتریک است. چون $\chi_e > 0$ است، ثابت دی‌الکتریک κ_e همیشه بزرگ‌تر از یک است و در نتیجه

$$E=\frac{E_\circ}{\kappa_e}<E_\circ \qquad (۷-۲۶)$$

است. بنابراین، اثر ماده‌ی دی‌الکتریک کاستن از شدت میدان الکتریکی است.

رفتار اجسام دی‌الکتریک که مولکول‌های آن قطبیده نیستند نیز به همین صورت است، چون میدان $\mathbf{E}_\circ$ به این مولکول‌ها دوقطبی القاء می‌کند. دوقطبی‌های القایی موازی میدان $\mathbf{E}_\circ$ اند و به قطبش $\mathbf{P}$ می‌انجامند که موازی $\mathbf{E}_\circ$است و میدان کل را کاهش می‌دهند.

نکته: میدان $\mathbf{E}$ در رابطه‌ی (۲۳-۷) میدان *کل* است. ممکن است بخشی از آن ناشی از بارهای الکتریکی باشد که در دی‌الکتریک قرار می‌دهیم و بخش دیگرش مربوط به قطبش (یا بارهای القایی) باشد. اگر یک قطعه ماده‌ی دی‌الکتریک را در میدان خارجی $\mathbf{E}_\circ$ قرار دهیم، قطبش $\mathbf{P}$ را به طور مستقیم نمی‌توان از رابطه‌ی (۲۳-۷) محاسبه کرد. میدان خارجی ماده را تا حدودی قطبیده می‌کند. این قطبش میدان خودش را تولید می‌کند که به میدان کل افزوده می‌شود و به قطبیدگی بیشتر ماده کمک می‌کند. تغییر قطبش دوباره میدان ایجاد می‌کند که بازهم به میدان کل افزوده می‌شود و به قطبش بیشتر می‌انجامد.... ♣

۴-۷ قانون گوس در محیط دی‌الکتریک

دیدیم که اثر قطبش، تولید بارهای القایی حجمی با چگالی $\rho_P=-\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P}$ در گوشت دی‌الکتریک و بارهای سطحی با چگالی $\sigma_P=\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ در روی سطح آن است. میدان ناشی از قطبش ماده، میدان همین بارهاست. افزون بر میدان قطبش، یا میدان بارهای القایی، میدان‌های دیگری هم در ماده وجود دارند. هر میدانی را که نتیجه‌ی قطبش نباشد، میدان **بارهای آزاد** خواهیم نامید. بارهای آزاد ممکن است الکترون‌هایی باشند که در سطح رسانا قرار دارد و رسانا با دی‌الکتریک پوشانده شود. یا ممکن است در دی‌الکتریک مقداری بار الکتریکی به‌صورت یون بکاریم که باز هم میدان الکتریکی تولید می‌کند. به بیان دیگر هر باری که ناشی از قطبش نباشد، بار آزاد است. با این پیش گفتار به قانون گوس در محیط دی‌الکتریک می‌پردازیم.

قانون گوس در شکل انتگرالی آن به‌صورت زیر است

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}q_{\text{enc}}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho\, d\tau \qquad (۷-۲۷)$$

q_{enc} بار کل است که در درون سطح گوس قرار دارد. قانون گوس در باره‌ی ماهیت بارها حرفی نمی‌زند و این که این بارها القایی اند یا آزاد، سخنی نمی‌گوید. بنابراین، در حالت کلی ρ شامل هر دو نوع بار القایی ρ_P و بارهای آزاد ρ_f است.

$$\rho=\rho_P+\rho_f \qquad (۷-۲۸)$$

پس، قانون گوس رابطه‌ی (۲۷-۷) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}q_{\text{enc}}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho\, d\tau=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_P\, d\tau+\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_f\, d\tau \qquad (۷-۲۹)$$

توجه کنید که در این رابطه، $\mathbf{E}$ میدان **کل** است که بارهای آزاد و قطبش به‌وجود آورده‌اند. اگر به جای ρ_P مقدارش را بر حسب $-\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P}$ قرار دهیم و از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_P\, d\tau+\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_f\, d\tau=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V\left(-\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P}\right)d\tau+\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_f\, d\tau=-\frac{1}{\varepsilon_\circ}\oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{a}+\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_f\, d\tau \qquad (۷-۳۰)$$

چون سطح انتگرال‌گیری برای هر دو انتگرال یکی است، رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\oint_S\left(\varepsilon_\circ\mathbf{E}+\mathbf{P}\right)\cdot d\mathbf{a}=\int_V \rho_f\, d\tau=q_{f_{\text{enc}}} \qquad (۷-۳۱)$$

توجه کنید که سمت راست فقط شامل کل بارهای آزاد در درون سطح گوس است و از بارهای القایی در آن خبری نیست. کمیت درون پرانتز در انتگرال سمت چپ را با بردار $\mathbf{D}$ نشان می‌دهند و به آن بردار **جابه‌جایی الکتریکی** می‌گویند:

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_\circ \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (۷-۳۲)$$

بنابراین، قانون گوس را می‌توان برحسب $\mathbf{D}$ به‌صورت زیر نوشت

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = q_{f_{\text{enc}}} \quad (۷-۳۳)$$

این رابطه بیان انتگرالی قانون گوس در محیط دی‌الکتریک است. $q_{f_{\text{enc}}}$ بار کل آزاد در حجم V است که سطح گوس مرزهای آن است. رابطه‌ی (۷-۳۳) رابطه‌ی بسیار سودمندی است، چون سمت راست آن فقط بارهای آزاد را دربر دارد و بارهای آزاد بارهایی اند که می‌شناسیم. در مسئله‌ها معمولا چگالی بارهای آزاد ρ_f شناخته شده است، اما بارهای القایی ρ_P را نمی‌دانیم.

برای محیط‌های دی‌الکتریک، رابطه‌ی (۷-۳۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{D} = \varepsilon_\circ \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_\circ \mathbf{E} + \varepsilon_\circ \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_\circ \left(۱ + \chi_e \right) \mathbf{E} \quad (۷-۳۴)$$

پس، می‌بینیم که بردار جابه‌جایی الکتریکی و میدان کل متناسب اند. ضریب تناسب بین آنها

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_\circ \left(1 + \chi_e \right) \quad (۷-۳۵)$$

است. ε **گذردهی**[*] محیط دی‌الکتریک نامیده می‌شود. رابطه‌ی (۷-۳۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (۷-۳۶)$$

بنابراین، به تنها $\mathbf{P}$ با میدان کل $\mathbf{E}$ متناسب است، بلکه $\mathbf{D}$ هم با $\mathbf{E}$ متناسب است. در خلاء چون ماده وجود ندارد که قطبیده شود، پذیرفتاری χ_e صفر و گذردهی همان $\varepsilon_\circ$ است. ثابت دی‌الکتریک را اینک می‌توان برحسب گذردهی تعریف کرد

$$\kappa_e = ۱ + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\circ} \quad (۷-۳۷)$$

شکل دیفرانسیلی قانون گوس در دی‌الکتریک‌ها را هم می‌توان نوشت. از شکل دیفرانسیلی قانون گوس داریم

$$\varepsilon_\circ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_P + \rho_f = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \rho_f \quad (۷-۳۸)$$

بار هم توجه کنید که در این‌جا $\mathbf{E}$ میدان **کل** است. رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_\circ \mathbf{E} + \mathbf{P} \right) = \rho_f \quad (۷-۳۹)$$

عبارت درون پرانتز بردار جابه‌جایی الکتریکی $\mathbf{D}$ است که در رابطه‌ی (۷-۳۲) تعریف شد. پس، شکل دیفرانسیلی قانون گوس به صورت زیر در می‌آید

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (۷-۴۰)$$

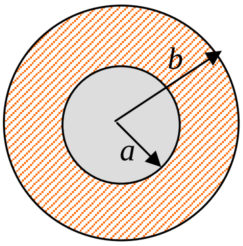
سرانجام، در محیط دی‌الکتریک خطی همگن، می‌توان چکالی بارهای القایی حجمی را هم برحسب بارهای آزاد نوشت

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \right) = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \chi_e \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} \right) = -\frac{\varepsilon_0 \chi_e}{\varepsilon} \left(\nabla \cdot \mathbf{D} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \rho_P = -\left(\frac{\varepsilon_0 \chi_e}{\varepsilon_0 \left(1 + \chi_e \right)} \right) \rho_f = -\left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_f \quad (۷-۴۱)$$

[*] permittivity

مثال ۲-۷ کره‌ی فلزی با پوشش دی‌الکتریک: در روی یک کره‌ی فلزی به شعاع a بار Q قرار دارد. کره را برابر شکل (۱۰-۷) تا شعاع b با یک دی‌الکتریک با گذردهی ε می‌پوشانیم. پتانسیل را در مرکز کره نسبت به بینهایت به‌دست آورید. بردار قطبش و مکان و اندازه‌ی بارهای القایی را حساب کنید.



شکل ۱۰-۷ کره‌ی باردار پوشیده با دی‌الکتریک

حل: برای این که پتانسیل را به‌دست آوریم باید میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در همه جا بدانیم. برای این که میدان $\mathbf{E}$ را حساب کنیم، لازم است مکان و اندازه‌ی بارهای القایی را بشناسیم. بارهای القایی را می‌توان از قطبش $\mathbf{P}$ به‌دست آورد. اما در این مسئله $\mathbf{P}$ داده نشده است. چون دی‌الکتریک خطی است، برای این که بتوانیم $\mathbf{P}$ را با استفاده از رابطه‌ی (۲۳-۷) حساب کنیم، به میدان $\mathbf{E}$ نیاز داریم. اگر $\mathbf{E}$ را می‌دانستیم، می‌دانستیم توانستیم پتانسیل را حساب کنیم و نیازی به این همه دردسر نداشتیم. به نظر می‌رسد که در دایره‌ای دور خود می‌گردیم. اما یک تکه آگاهی دیگر در مسئله وجود دارد که هنوز از آن استفاده نکرده‌ایم. آنچه را که می‌دانیم بارهای آزاد Q است و این آگاهی برای یافتن پتانسیل و نیر بارهای القایی و میدان و قطبش کافی است.

از شکل انتگرالی قانون گوس در دی‌الکتریک، رابطه‌ی (۳۳-۷) استفاده کنید. سطح گوسی به شعاع $r > a$ در نظر بگیرید. برای این سطح گوس داریم

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_{f_{enc}} = Q \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{Q}{۴\pi r^۲}\hat{\mathbf{r}} \qquad ; \qquad r > a \tag{۷-۴۲}$$

توجه کنید که در درون کره‌ی فلزی $\mathbf{E} = \mathbf{P} = \mathbf{D} = ۰$ اند. حال که بردار جابه‌جایی الکتریکی $\mathbf{D}$ را حساب کردیم، میدان الکتریکی را با استفاده از رابطه‌ی (۳۶-۷) می‌توان در همه جا به‌دست آورد

$$\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{D} = \begin{cases} \dfrac{Q}{۴\pi\varepsilon r^۲}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad a < r < b \\ \dfrac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r > b \end{cases} \tag{۷-۴۳}$$

بنابراین، پتانسیل در مرکز کره عبارت است از

$$V = -\int_\infty^۰ \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_\infty^b \left(\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\right)dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{۴\pi\varepsilon r^۲}\right)dr - \int_a^۰ (\cdot)dr = \frac{Q}{۴\pi}\left(\frac{۱}{\varepsilon_۰ b} + \frac{۱}{\varepsilon a} - \frac{۱}{\varepsilon b}\right) \tag{۷-۴۴}$$

حالا که میدان کل را در دی‌الکتریک به‌دست آوردیم، می‌توانیم بردار قطبش $\mathbf{P}$ را در دی‌الکتریک حساب کنیم. داریم

$$\mathbf{P} = \varepsilon_۰\chi_e\mathbf{E} = \frac{\varepsilon_۰\chi_e Q}{۴\pi\varepsilon r^۲}\hat{\mathbf{r}} \tag{۷-۴۵}$$

و بنابراین، با توجه به این که $\vec{\nabla}\cdot\left(\hat{\mathbf{r}}/r^2\right) = ۰$ است (مثال ۵-۱ و رابطه‌ی (۳۸-۱) را ببینید)، به‌دست می‌آید

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\frac{\varepsilon_۰\chi_e Q}{۴\pi\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^۲}\right) = ۰ \tag{۷-۴۶}$$

از رابطه‌ی (۴۱-۷) هم این نتیجه،آشکار است؛ چون در دی‌الکتریک بار آزاد وجود ندارد و ρ_f در آنجا صفراست (باهای آزاد به سطح کره‌ی رسانا محدود اند). پوسته‌ی دی‌الکتریک دو سطح دارد؛ یکی سطح داخلی آن با شعاع a و دیگری سطح بیرونی آن با شعاع b . در روی هر دو سطح آن بار سطحی القایی وجود دارند. در روی سطح داخلی، بردار یکه‌ی عمود براین سطح به سوی مرکز کره است، در حالیکه در سطح بیرونی به سوی بیرون از کره است. پس

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_\circ \chi_e Q}{۴\pi\varepsilon b^۲} & \text{(در روی سطح بیرونی)} \quad (۷-۴۷) \\ -\dfrac{\varepsilon_\circ \chi_e Q}{۴\pi\varepsilon a^۲} & \text{(در روی سطح درونی)} \quad (۷-۴۸) \end{cases}$$

این که بارهای القایی در سطح داخلی دی‌الکتریک منفی باشد طبیعی است؛ چون بارهای روی کره‌ی رسانا، بارهای ناهمنام مولکول‌های دی‌الکتریک را به سوی خود می‌کشد. توجه کنید که جمع کل بارهای القایی صفر است:

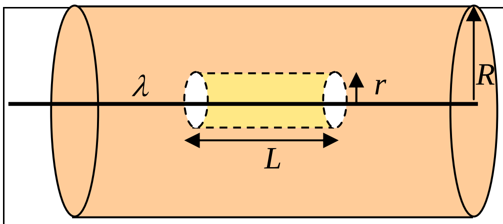
$$Q_{P_{tot}} = \left(\frac{\varepsilon_\circ \chi_e Q}{۴\pi\varepsilon b^۲}\right)\left(۴\pi b^۲\right) + \left(-\frac{\varepsilon_\circ \chi_e Q}{۴\pi\varepsilon a^۲}\right)\left(۴\pi a^۲\right) = \circ \qquad (۷-۴۹)$$

مثال ۳-۷ سیم باردار در درون استوانه: سیم درازی با چگالی بارخطی λ تا شعاع R با ماده‌ی دی‌الکتریک خطی با پذیرفتاری χ_e برابر شکل (۱۱-۷) پوشانده شده است. بردار جابه‌جایی $\mathbf{D}$، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و بردار قطبش $\mathbf{P}$ را به دست آورید.

حل: قانون گوس در دی‌الکتریک را برای سطح گوسی به شکل استوانه‌ی به طول L وشعاع r به کار ببرید

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = D\left(۲\pi rL\right) = \lambda L \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{\lambda}{۲\pi r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۷-۵۰)$$

توجه کنید که این رابطه هم در درون دی‌الکتریک و هم در بیرون آن درست است. در ناحیه‌ی بیرونی، یعنی $(r > R)$، قطبش صفر است؛



شکل ۱۱-۷ سیم باردار در دی‌الکتریک

چون در آنجا دی‌الکتریک وجود ندارد. پس برای $r > R$ داریم

$$\mathbf{P} = \circ, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_\circ} = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ r}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r > R \qquad (۷-۵۱)$$

و برای درون دی‌الکتریک

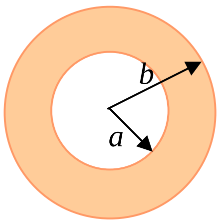
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon r}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r < R \qquad (۷-۵۲)$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_\circ \chi_e \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_\circ \chi_e \lambda}{۲\pi\varepsilon r}\hat{\mathbf{r}} = \frac{\chi_e \lambda}{۲\pi(۱+\chi_e)r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۷-۵۳)$$

مثال ۴-۷ پوسته‌ی دی‌الکتریک کروی ضخیم: بردار قطبش پوسته‌ی کروی دی‌الکتریک شکل (۱۲-۷) با شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b با $\mathbf{P} = k\left(\hat{\mathbf{r}}/r\right)$ داده شده استکه در آن k مقدار ثابتی است و r فاصله از مرکز کره است. میدان الکتریکی را در هر سه ناحیه‌ی $r < a$ ، $a < r < b$ و $r > b$ به دو روش زیر حساب کنید

(الف): مکان و اندازه‌ی بارهای القایی را به‌دست آورید. میدانی که این بارها را ایجاد می‌کنند حساب کنید.

(ب): از قانون گوس برای دی‌الکتریک، رابطه‌ی (۳۳-۷) نخست بردار $\mathbf{D}$ را به‌دست آورید و سپس $\mathbf{E}$ را حساب کنید. توجه کنید که روش دوم کوتاه‌تر است و کاری با بارهای القایی ندارد.



شکل ۱۲-۷ پوسته‌ی دی‌الکتریک

حل: (**الف**) توجه کنید که در مسئله بار آزاد وجود ندارد. چگالی بارهای القایی عبارت اند از

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{k}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}(k) = -\frac{k}{r^2} \tag{7-54}$$

$$\sigma_b = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \begin{cases}\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = k/b & \forall r = b\\ -\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = -k/a & \forall r = a\end{cases} \tag{7-55}$$

حال که چگالی بارهای القایی را یافتیم، می‌توانیم وجود دی‌الکتریک را فراموش کنیم. با استفاده از قانون گوس داریم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}q_{\text{enc}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{\text{enc}}}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{7-56}$$

در ناحیه‌ی $r < a$ بار وجود ندارد: $q_{\text{enc}} = 0$ و در نتیجه، $\mathbf{E} = 0$ است.در ناحیه‌ی $a < r < b$ داریم

$$q_{\text{enc}} = \left(-\frac{k}{a}\right)\left(4\pi a^2\right) + \int_a^r\left(-\frac{k}{r'^2}\right)\left(4\pi r'^2\right)dr' = -4\pi ka - 4\pi k\,(r-a) = -4\pi kr \tag{7-57}$$

بنابراین، میدان الکتریکی در این ناحیه عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{\text{enc}}}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-4\pi kr)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{k}{\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad a < r < b \tag{7-58}$$

و سر انجام در ناحیه‌ی $r > b$ میدان الکتریکی $\mathbf{E} = 0$ است؛ چون سطح گوسی به شعاع $r > b$ همه‌ی بارهای القایی را در بردارد (بارهای القایی حجمی، سطحی در روی سطح داخلی و بیرونی دی‌الکتریک) و جمع کل بارهای القایی همواره صفر است.

بگذارید یک بار دیگر این را نشان دهیم: بار القایی در سطح داخلی و سطح بیرونی دی‌الکتریک عبارت اند از

$$Q_a = (-k/a)\left(4\pi a^2\right) = -4\pi ka \tag{7-59}$$

$$Q_b = (k/b)\left(4\pi b^2\right) = 4\pi kb \tag{7-60}$$

و بار القایی حجمی برابر است با

$$Q_V = \int_a^b\left(-\frac{k}{r'^2}\right)\left(4\pi r'^2\right)dr' = -4\pi k\,(b-a) \tag{7-61}$$

بنابراین،

$$Q_{\text{tot}} = Q_a + Q_b + Q_V = \left(-4k\,\pi a\right) + \left(4k\,\pi b\right) - 4k\,\pi(b-a) = 0 \tag{7-62}$$

(**ب**): چون در مسئله بار آزاد وجود ندارد، از رابطه‌ی (۷-۳۳) برای هر سه ناحیه داریم

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_{f_{\text{enc}}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{D} = 0 \qquad \forall r \tag{7-63}$$

از طرفی، می‌دانیم که

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \tag{7-64}$$

است. در ناحیه‌های $r < a$ و $r > b$ قطبش $\mathbf{P} = 0$ است؛ چون در این دو ناحیه دی‌الکتریک وجود ندارد. در ناحیه‌ی $a < r < b$ بنابه رابطه‌ی (۷-۶۴) میدان عبارت است از

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} = -\frac{k}{\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad a < r < b \tag{7-65}$$

※ **مثال ۵–۷ کره‌ی دی‌الکتریک با بار q در مرکز**: در مرکز یک کره‌ی دی‌الکتریک به شعاع R و پذیرفتاری χ_e بار نقطه‌ای q قرار دارد. میدان الکتریکی، بردار قطبش و بارهای القایی را در نقطه‌ی $r < R$ به‌دست آورید. بار القایی سطحی کل را به‌دست آورید. بارهای منفی القایی جبران کننده‌ی این بار سطحی در کجا قرار دارند؟

حل: از رابطه‌ی (۳۳–۷) داریم

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_{f_{enc}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{q}{\text{٤}\pi r^{\text{٢}}}\hat{\mathbf{r}} \tag{۷–٦٦}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{q}{\text{٤}\pi\varepsilon r^{\text{٢}}}\hat{\mathbf{r}} = \frac{q}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ(\text{١}+\chi_e)}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^{\text{٢}}} \tag{۷–٦٧}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_\circ \chi_e \mathbf{E} = \frac{q\,\chi_e}{\text{٤}\pi(\text{١}+\chi_e)}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^{\text{٢}}} \tag{۷–٦٨}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\frac{q\,\chi_e}{\text{٤}\pi(\text{١}+\chi_e)}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^{\text{٢}}}\right) = -q\,\frac{\chi_e}{(\text{١}+\chi_e)}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}) \tag{۷–٦٩}$$

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \frac{q\,\chi_e}{\text{٤}\pi(\text{١}+\chi_e)R^{\text{٢}}} \quad \Rightarrow \quad Q_R = \sigma_P\left(\text{٤}\pi R^{\text{٢}}\right) = \frac{q\,\chi_e}{(\text{١}+\chi_e)} \tag{۷–۷۰}$$

(در مورد تابع دلتای دیراک نگاه کنید به رابطه‌ی (۹۱–٤)). بارهای منفی باید در مرکز کره باشند تا بار کل القایی سطحی را جبران کنند و جمع کل بارهای القایی صفر شود. می‌توان آن را حساب کرد

$$\int \rho_P d\tau = -\frac{q\,\chi_e}{(\text{١}+\chi_e)}\int \boldsymbol{\delta}(\mathbf{r})dr = -\frac{q\,\chi_e}{(\text{١}+\chi_e)} \tag{۷–۷۱}$$

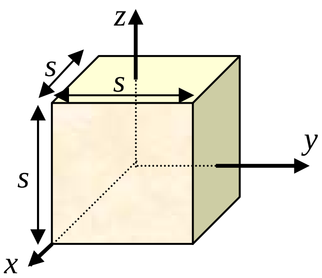
مثال ۶–۷ دی‌الکتریک قطبیده‌ی مکعبی: مرکز مکعبی از جنس دی‌الکتریک و به ضلع s در مبداء مختصات قرار دارد. بردار قطبش آن به‌صورت $\mathbf{P} = k\,\mathbf{r}$ است (k مقدار ثابتی است). بارهای القایی را بیابید و نشان دهید که جمع آنها صفر است.

حل:

$$\mathbf{P} = k\,\mathbf{r} = k\,(x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}) \quad \Rightarrow \quad \rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -k\,(\text{١}+\text{١}+\text{١}) = -\text{٣}k \tag{۷–۷۲}$$

بنابراین، بارالقایی حجمی عبارت است از

$$Q_V = \rho_P\left(s^{\text{٣}}\right) = -\text{٣}ks^{\text{٣}} \tag{۷–۷۳}$$



شکل ۱۳–۷ مکعب دی‌الکتریک

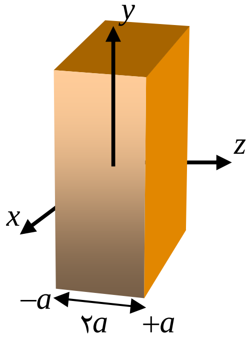
بارهای القایی سطحی از $\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ به‌دست می‌آیند. از شکل (۱۳–۷) پیداست که سطح بالایی مکعب در $z = s/\text{٢}$ است. در آنجا $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$ است. پس، در روی این سطح داریم: $\sigma_P = k\,(s/\text{٢})$. در سطح زیرین $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{k}}$ است و این سطح در $z = -s/\text{٢}$ است. پس، در روی این سطح هم چگالی بار سطحی القایی $\sigma_P = -k\,(-s/2) = k\,(s/2)$ است. به همین ترتیب، دیده می‌شود که در روی هر شش سطح چگالی بار $\sigma_P = k\,(s/\text{٢})$ اند.

درنتیجه، بار کل القایی سطحی برابر است با

$$Q_S = 6\left(k\,\frac{s}{2}\right)s^2 = 3k\,s^3 \tag{۷–۷٤}$$

پس: $Q_V + Q_S = \circ$ است.

مثال ۷–۷ صفحه‌ی دی‌الکتریک گسترده: برش دی‌الکتریک به ضخامت $۲a$ در صفحه‌ی zy را در نظر بگیرید. این برش در صفحه‌های xy و xz تا بینهایت ادامه دارد ، شکل (۷–۱٤) . قطبش دی‌الکتریک $\mathbf{P} = \alpha\,\hat{\mathbf{k}}$ است (α مقدار ثابتی است).



شکل ۷–۱٤ صفحه‌ی دی‌الکتریک ضخیم

(الف): چگالی بارهای قطبشی حجمی ρ_P و سطحی σ_P را بیابید.

(ب): میدان‌های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ را در همه جا به دست آورید.

(پ): پتانسیل الکتروستاتیکی را در همه جا حساب کنید.

حل: **(الف)** چون بردار قطبش یکنواخت و ثابت است، بنابراین در حجم دی الکتریک

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = \circ \qquad (۷–۷۵)$$

است. البته در بیرون آن $\rho_P = \circ$ است. چگالی بار سطحی در $z = -a$ و $z = -a$ برابر

$$\sigma_P\big|_{z=-a} = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \left(\alpha\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(-\hat{\mathbf{k}}\right) = -\alpha \qquad (۷–۷٦)$$

$$\sigma_P\big|_{z=+a} = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \left(\alpha\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}\right) = +\alpha \qquad (۷–۷۷)$$

اند.

(ب): چون $\rho_f = \circ$ است، از قانون گوس نتیجه می‌شود که

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = \rho_f = \circ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \circ \qquad (۷–۷۸)$$

از رابطه‌ی (۷–۳۲) داریم

$$\mathbf{D} = \varepsilon_\circ \mathbf{E} + \mathbf{P} = \circ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{P}/\varepsilon_\circ \qquad (۷–۷۹)$$

در نتیجه:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \circ & ; \quad |z| > a \\ -\dfrac{\alpha}{\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{k}} & ; \quad |z| < a \end{cases} \qquad (۷–۸۰)$$

(پ): فرض کنید در $z = \circ$ پتانسیل $V = \circ$ است. چون $E_z = -\partial V/\partial z$ ، پس:

$$V = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\varepsilon_\circ}a & ; \quad z > a \\ \dfrac{\alpha}{\varepsilon_\circ}z & ; \quad |z| \le a \\ -\dfrac{\alpha}{\varepsilon_\circ}a & ; \quad z < -a \end{cases} \qquad (۷–۸۱)$$

مثال ۷–۸ استوانه‌ی رسانا در درون دی‌الکتریک: استوانه‌ی بسیار دراز رسانا به شعاع قاعده‌ی a و چگالی بار در واحد طول λ برابر شکل (۷–۱۵) در درون محیط دی‌الکتریک خطی با گذردهی ε قرار دارد. میدان الکتریکی را در فاصله‌ی $r > a$ از محور استوانه به‌دست آورید.

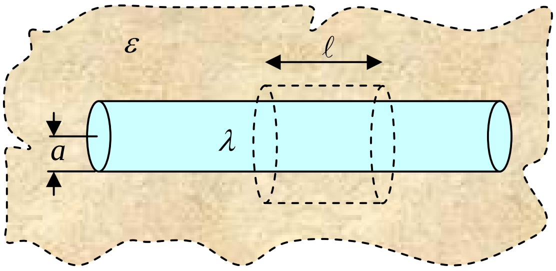
حل: سطح گوسی به شکل استوانه هم‌محور با رسانا به طول ℓ در نظر بگیرید. داریم

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_{f_{enc}} \Rightarrow D\left(۲\pi r\ell = \lambda\ell\right) \qquad (۷-۸۲)$$

بنابراین، به‌دست می‌آید

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r}\hat{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r > a \qquad (۷-۸۳)$$

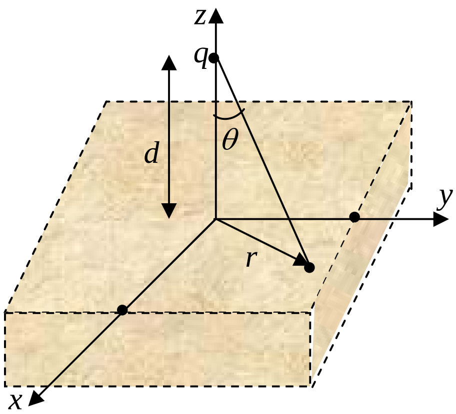
روشن است که در درون استوانه‌ی رسانا $\mathbf{D} = \mathbf{E} = \mathbf{P} = 0$ اند.



شکل ۷-۱۵ استوانه‌ی رسانا در محیط دی‌الکتریک

مثال ۹-۷ بار نقطه‌ای و دی‌الکتریک [۱] : فرض کنید تمام ناحیه‌ی $z < ۰$ همانند شکل (۷-۱٦) با ماده‌ی دی‌الکتریک یکنواخت خطی با پذیرفتاری χ_e پُر شده است. بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی $z = d$ از مبداء مختصات و در بالای سطح دی‌الکتریک قرار دارد. چگالی بار سطحی القایی را در روی دی‌الکتریک در $z = ۰$ به‌دست آورید. بار القایی کل را حساب کنید.

حل: بار q در پیرامون خود میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. بنابراین، دی‌الکتریک در این میدان خارجی قرار دارد. میدان الکتریکی می‌کوشد دی‌الکتریک را قطبیده کند. پس، علامت بارهای القایی سطحی در روی سطح دی‌الکتریک، در $z = ۰$، مخالف علامت بار q است. در نتیجه، نیروی وارد به بار q ربایشی است.(توجه کنید که با توجه به رابطه‌ی (۷-٤۱) در درون دی‌الکتریک بار القایی حجمی وجود ندارد؛ چون در دی‌الکترک بار آزاد وجود ندارد.) چگالی بار القایی سطحی در صفحه‌ی $z = ۰$ چیست؟ با استفاده از رابطه‌های (۷-۱٦) و (۷-۲۳) داریم:



شکل ۷-۱٦ بار در بالای ناحیه‌ی دی‌الکتریک

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{k} = (\varepsilon_\circ\chi_e\mathbf{E})\cdot\mathbf{k} = \varepsilon_\circ\chi_e E_z \qquad (۷-۸٤)$$

E_z مولفه‌ی z میدان **کل** درست در زیر سطح بالایی دی‌الکتریک (یعنی در زیر سطح $z = ۰$) است. بخشی از این میدان را بارهای القایی سطحی در $z = ۰$ و بخش دیگرش را بار q به وجود آورده است. هر دو بخش را می‌توان به سادگی حساب کرد. میدان بارهای القایی سطحی، میدان یک سطح باردار گسترده است. بنابراین،برابر $-\sigma_P/2\varepsilon_\circ$ و در راستای محور z است. مولفه‌ی z میدانی را که بار q در روی سطح $z = ۰$ تولید می‌کند، از قانون کولمب به‌دست می‌آید:

$$-\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{\left(r^۲+d^۲\right)}\cos\theta = -\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{\left(r^۲+d^۲\right)}\frac{d}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۱/۲}} = -\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}} \qquad (۷-۸۵)$$

در اینجا، $r = \sqrt{x^۲+y^۲}$ است. بنابراین، بار القایی سطحی عبارت است از

$$\sigma_P = \varepsilon_\circ\chi_e E_z = \varepsilon_\circ\chi_e\left[-\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}} - \frac{\sigma_P}{۲\varepsilon_\circ}\right] \qquad (۷-۸٦)$$

برگرفته از [۱] David J.Griffiths, "Introduction To Electrodynamics" ,2nd ed. ,Printice Hall,1989.

از حل این معادله σ_P به‌دست می‌آید:

$$\sigma_P = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)\frac{qd}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}} \tag{۷-۸۷}$$

با انتگرال‌گیری از σ_P در صفحه‌ی xy در مختصات کارتزی $da = dx\,dy$ می‌توان بار القایی کل را به‌دست آورد. اما اگر از مختصات قطبی استفاده کنیم، انتگرال‌گیری اندکی آسان‌تر می‌شود. در مختصات قطبی داریم $da = r\,dr\,d\theta$ است. بنابراین

$$q_P = \int \sigma_P\, da = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)qd\int\frac{r\,dr\,d\theta}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}}$$

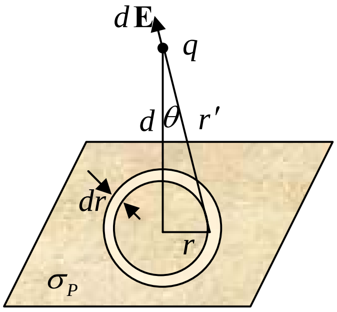
$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)qd\,(2\pi)\int\frac{r\,dr}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}} \tag{۷-۸۸}$$

با تغییر متغیر $r^2+d^2=u$ و $2r\,dr=du$ و حدود انتگرال گیری $r=0 :\to u=d^2$ و $r=\infty :\to u=\infty$ داریم

$$q_P = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)qd\,(2\pi)\int_0^\infty\frac{r\,dr}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}} = -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)qd\left(\frac{1}{2}\right)\int_{d^2}^\infty u^{-3/2}du$$

$$= -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)qd\left(\frac{1}{2}\right)\left[-2u^{-1/2}\right]_{d^2}^\infty = \left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)qd\left[0-\frac{1}{d}\right] \quad\Rightarrow\quad q_P = -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)q \tag{۷-۸۹}$$

برای این که نیروی وارد به بار q را حساب کنیم، نخست باید میدان الکتریکی σ_P را در مکان بار q به‌دست آوریم. این کار با استفاده از قانون کولمب شدنی است. برابر شکل (۷-۱۷) حلقه‌ی دایره‌ای به شعاع r و به ضخامت dr را بعنوان جزء بار در نظر بگیرید. رو.شن است که میدان حلقه به خاطر تقارن، فقط مولفه‌ی z دارد. بنابراین،



شکل ۷-۱۷ جزء بار

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_P\left(2\pi r\,dr\right)}{r'^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_P\left(2\pi r\,dr\right)}{r'^2}\frac{d}{r'} \tag{۷-۹۰}$$

که در آن $r'^2 = r^2+d^2$. اگر از این رابطه انتگرال بگیریم، میدان کل در مکان بار q به دست می‌آید

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_P\left(2\pi r\,dr\right)}{r'^2}\frac{d}{r'} = \frac{2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)\frac{qd}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}}\right]\frac{d\ \ r\,dr}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)qd^2\frac{r\,dr}{\left(r^2+d^2\right)^3} \tag{۷-۹۱}$$

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)qd^2\int_0^\infty\frac{r\,dr}{\left(r^2+d^2\right)^3} \tag{۷-۹۲}$$

دوباره از تغییر متغیر $r^2+d^2=u$ و $2r\,dr=du$ استفاده کنید. خواهیم داشت

$$E_z=-\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd^{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)\int_{d^۲}^{\infty}\frac{du}{u^{۳}}=-\frac{۱}{۸\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd^{۲}\left(-\frac{۱}{۲u^{۲}}\right)\Bigg|_{d^۲}^{\infty}$$

$$=-\frac{۱}{۸\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd^{۲}\left[\circ+\frac{۱}{۲d^{٤}}\right]=-\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)\frac{q}{٤d^{۲}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{E}=-\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)\frac{q}{٤d^{۲}}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۷-۹۳)$$

و سرانجام، نیروی وارد بر بار q عبارت است از

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}=-\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)\frac{q^{۲}}{٤d^{۲}}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۷-۹٤)$$

مثال ۱۰-۷ دنیای انباشته با نوع دی‌الکتریک: فرض کنید که در مثال ۹-۷ ناحیه‌ی $z>\circ$ هم با ماده‌ی دی‌الکتریک دیگری به پذیرفتاری χ_e' پر شده باشد و بار q به فاصله‌ی d از سطح تماس دو دی‌الکتریک در درون آن قرار داشته باشد. بارهای القایی سطحی را در روی هر دو دی‌الکتریک به‌دست آورید.

حل: در این مثال چهار گونه بار وجود دارد: (۱) بار q ، (۲) بارهای القایی که پیرامون بار q به‌وجود آمده اند، ρ_P. این‌ها بارهای القایی حجمی در دی‌الکتریک بالایی است. (۳) بار القایی سطحی σ_P در رویه‌ی بالایی دی‌الکتریک زیرین و (٤) بار القایی سطحی σ_P' در سطح پایینی دی‌الکتریک بالایی.

با توجه به رابطه‌ی (٤۱-۷) چگالی بارهای القایی حجمی، بارهای (۲) ، در دی‌الکتریک بالایی عبارت است از

$$\rho_P=-\left(\frac{\chi_e'}{1+\chi_e'}\right)\rho_f\quad\Rightarrow\quad q_P=-\left(\frac{\chi_e'}{1+\chi_e'}\right)q \qquad (۷-۹۵)$$

توجه کنید که چون بار آزاد در دی الکتریک بالایی فقط بار q است که در مکان $(\circ,\circ,d)$ است، بار القایی کل هم در این نقطه قرار دارد. پس، بار کل (نقطه‌ای) در $(\circ,\circ,d)$ عبارت است از

$$q_{\text{tot}}=q+q_P=q-\left(\frac{\chi_e'}{۱+\chi_e'}\right)q=\frac{q}{۱+\chi_e'}=\frac{q}{\kappa_e'} \qquad (۷-۹٦)$$

همانند مثال ۹-۷ ، چگالی بارهای القایی سطحی در روی سطح بالایی دی الکتریک پایینی از $\sigma_P=\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}=+P_z=\varepsilon_\circ\chi_e E_z$ به‌دست می‌آید

$$\sigma_P=\varepsilon_\circ\chi_e\left[-\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{qd/\kappa_e'}{\left(r^{۲}+d^{۲}\right)^{۳/۲}}-\frac{\sigma_P}{۲\varepsilon_\circ}-\frac{\sigma_P'}{۲\varepsilon_\circ}\right] \qquad (۷-۹۷)$$

جمله‌ی سوم در داخل قلاب میدان بارهای القایی سطحی دی‌الکتریک بالایی است. هم چنین برای چگالی بارهای القایی سطحی در روی سطح زیرین دی‌الکتریک بالایی با توجه به $\sigma_P'=\mathbf{P}'\cdot\hat{\mathbf{n}}=-P_z'=-\varepsilon_\circ\chi_e'E_z$ داریم

$$\sigma_P'=\varepsilon_\circ\chi_e'\left[\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{qd/\kappa_e'}{\left(r^{۲}+d^{۲}\right)^{۳/۲}}-\frac{\sigma_P}{۲\varepsilon_\circ}-\frac{\sigma_P'}{۲\varepsilon_\circ}\right] \qquad (۷-۹۸)$$

رابطه‌های (۹۷-۷) و (۹۸-۷) را به ترتیب به χ_e و χ_e' تقسیم کنید و سپس از یکدیگر کم کنید

$$\frac{\sigma'_P}{\chi'_e}-\frac{\sigma_P}{\chi_e}=\frac{۱}{۲\pi}\frac{qd/\kappa'_e}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}} \quad \Rightarrow \quad \sigma'_P=\chi'_e\left[\frac{\sigma_P}{\chi_e}+\frac{۱}{۲\pi}\frac{qd/\kappa'_e}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\right] \tag{۷-۹۹}$$

که اگر در رابطه‌ی (۹۷-۷) قرار دهیم و برحسب σ_P حل کنیم، خواهیم داشت

$$\sigma_P=-\frac{۱}{٤\pi}\frac{qd/\kappa'}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\chi_e\left(۱+\chi'_e\right)-\frac{\sigma_P}{۲}\left(\chi_e+\chi'_e\right) \tag{۷-۱۰۰}$$

چون $\kappa'_e=۱+\chi'_e$ ، بنابراین داریم

$$\sigma_P=-\frac{۱}{٤\pi}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\frac{\chi_e}{\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\chi_e+\chi'_e\right)\right]} \tag{۷-۱۰۱}$$

که اگر در (۹۹-۷) قرار دهیم، σ'_P به صورت زیر به دست می‌آید

$$\sigma'_P=\chi'_e\left\{-\frac{۱}{٤\pi}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\frac{۱}{\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\chi_e+\chi'_e\right)\right]}+\frac{۱}{۲\pi}\frac{qd/\kappa'}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma'_P=\frac{۱}{٤\pi}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\frac{\left(\kappa\chi'_e/\kappa'\right)}{\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\chi_e+\chi'_e\right)\right]} \tag{۷-۱۰۲}$$

چگالی بار کل القایی در سطح تماس دو دی‌الکتریک برابر است با

$$\sigma_P^{\text{total}}=\sigma_P+\sigma'_P=\frac{۱}{٤\pi}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\frac{\left(\chi'_e-\chi_e\right)}{\kappa'_e\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\chi'_e+\chi_e\right)\right]} \tag{۷-۱۰۳}$$

که اگر $\chi'_e=\chi_e$ باشد، صفر می‌شود و باید هم این چنین باشد. با توجه به رابطه‌ی (۸۹-۷) بار کل القایی عبارت است از

$$q_P^{\text{total}}=\frac{\left(\chi'_e-\chi_e\right)}{۲\kappa'_e\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\chi'_e+\chi_e\right)\right]}=\frac{\kappa'_e-\kappa_e}{\kappa'_e+\kappa_e}\frac{q}{\kappa'_e} \tag{۷-۱۰٤}$$

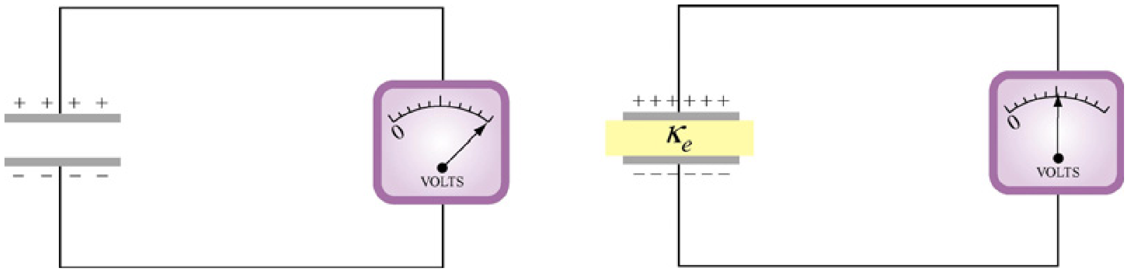
۵-۷ خازن با دی‌الکتریک

اگر در ناحیه‌ای از فضا میدان الکتریکی $\mathbf{E}_۰$ وجود داشته باشد و در این ناحیه ماده‌ی دی‌الکتریک قرار گیرد، بنا به رابطه‌ی (۲٦-۷) میدان در دی‌الکتریک و در نتیجه، در فضا کاهش پیدا می‌کند. در این بخش این پدیده را در رابطه با خازن بررسی می‌کنیم.

۱-۵-۷ خازن گسسته از باتری

خازنی با ظرفیت $C_۰$ را برابر شکل (۱۸-۷) به دو سر باتری با اختلاف پتانسیل $|\Delta V_۰|$ وصل کنید. با این کار خازن باردار می‌شود. مقدار بار خازن برابر $Q_۰=C_۰|\Delta V_۰|$ است . حال باتری را از خازن جدا کنید. خازن هنوز هم بار ثابت $Q_۰$ خواهد

داشت. اینک اگر یک قطعه دی‌الکتریک با ثابت κ_e به فضای بین صفحه‌های خازن وارد کنیم، به تجربه دیده می‌شود که اختلاف



شکل ۱۸-۷ قرار دادن دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن در حالی که بار خازن ثابت است.

پتانسیل صفحه‌های خازن با ضریب κ_e کاهش پیدا می‌کند و به مقدار

$$|\Delta V| = |\Delta V_\circ|/\kappa_e \tag{۷-۱۰۵}$$

می‌رسد. این بدان معنی است که ظرفیت خازن هم تغییر می‌کند و به مقدار زیر تبدیل می‌شود

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q_\circ}{|\Delta V_\circ|/\kappa_e} = \kappa_e C_\circ \tag{۷-۱۰۶}$$

پس، ظرفیت خازن κ_e برابر می‌شود. میدان الکتریکی حالا در فضای بین صفحه‌های خازن برابر است با

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{|\Delta V_\circ|/\kappa_e}{d} = \frac{1}{\kappa_e}\left(\frac{|\Delta V_\circ|}{d}\right) = \frac{E_\circ}{\kappa_e} \tag{۷-۱۰۷}$$

که در آن d فاصله‌ی بین صفحه‌های خازن و $E_\circ$ میدان الکتریکی خازن در نبود دی‌الکتریک اند. پس، در حضور دی‌الکتریک، میدان با ضریب κ_e کاهش پیدا می‌کند.

۲-۵-۷ خازن متصل به باتری

آزمایش بالا را تکرار کنید، اما این بار، باتری را متصل به خازن نگه دارید و قطعه‌ی دی‌الکتریک را در فضای بین صفحه‌های خازن قرار دهید. بنابراین، در حالی که دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن قرار می‌گیرد، اختلاف پتانسیل صفحه‌های خازن، $|\Delta V_\circ|$، ثابت می‌ماند؛ شکل (۱۹-۷). به طور تجربی (و نخستین بار توسط فاراده) دیده می‌شود که بار روی صفحه‌های خازن κ_e برابر می‌شود. خواهیم داشت

$$Q = \kappa_e Q_\circ \tag{۷-۱۰۸}$$



شکل ۱۹-۷ قرار دادن دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن در پتانسیل ثابت

ظرفیت خازن تغییر می‌کند و برابر

$$C = \frac{Q}{|\Delta V_\circ|} = \frac{\kappa_e Q_\circ}{|\Delta V_\circ|} = \kappa_e C_\circ \tag{۷-۱۰۹}$$

می‌شود. این همان نتیجه‌ای است که در حالت اول، رابطه‌ی (۷-۱۰۶)، به‌دست آوردیم. علت این که در این حالت بار خازن افزایش می‌یابد، این است که دی‌الکتریک قطبیده می‌شود و در نتیجه، مقداری بار منفی در سطح بالایی و به همان مقدار بار مثبت در سطح پایین دی‌الکتریک القاء می‌شود. این بارهای القایی، مقداری از بارهای $Q_\circ$ خازن را خنثی می‌کنند. چون اختلاف پتانسیل ثابت است، باتری ناگزیر است مقداربیشتری بار به صفحه‌های خازن بفرستد.

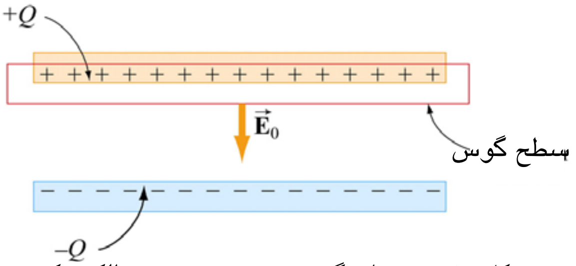
این آموزه را به گونه‌ی دیگری هم می‌توان دید. به یاد بیاورید که در حالت عمومی $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ است. این را در رابطه‌ی (۷-۳۶) به‌دست آوردیم. اگر در فضای بین صفحه‌های خازن دی‌الکتریک وجود نداشته باشد، میدان برابر $\mathbf{E}_\circ$ و $\varepsilon=\varepsilon_\circ$ و $\mathbf{D}=\varepsilon_\circ\mathbf{E}_\circ$ اند. اما اگر فضای بین صفحه‌های خازن با دی‌الکتریک انباشته شود، آنگاه خواهیم داشت

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}=\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_\circ\kappa_e}=\frac{1}{\kappa_e}\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_\circ}=\frac{1}{\kappa_e}\mathbf{E}_\circ \qquad (۷-۱۱۰)$$

یعنی، میدان الکتریکی در حضور دی‌الکتریک κ_e برابر کاهش پیدا می‌کند و در نتیجه، اختلاف پتانسیل هم با همین نسبت کاهش پیدا می‌کند. رابطه‌ی زیر این را نشان می‌دهد.

$$|\Delta V|=Ed=\frac{1}{\kappa_e}E_0 d=\frac{1}{\kappa_e}|\Delta V_0| \qquad (۷-۱۱۱)$$

برای این که بارهای القایی در دی‌الکتریک داخل خازن را حساب کنیم، خازن تخت شکل (۷-۲۰) را بدون دی‌الکتریک در نظر بگیرید. در این حالت میدان الکتریکی در فضای بین صفحه‌ها $\mathbf{E}_\circ$ است و با استفاده از قانون گوس می‌توان آن را حساب کرد



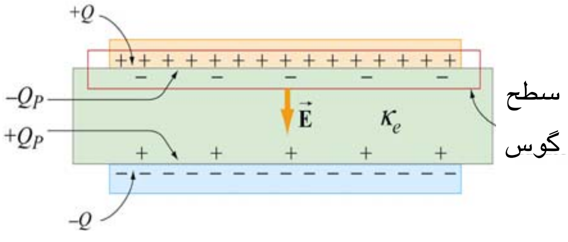
شکل ۷-۲۰ سطح گوس بدون وجود دی‌الکتریک

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\mathbf{E}_\circ A=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}\ \Rightarrow\ E_\circ=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \qquad (۷-۱۱۲)$$

وقتی همانند شکل (۷-۲۱) دی‌الکتریک در فضای بین صفحه‌ها قرار می‌گیرد، بار القایی Q_P با علامت مخالف در روی سطوح آن به وجود می‌آید و بار خالص در درون سطح گوس $Q-Q_P$ می‌شود. حال، قانون گوس به صورت زیر درمی‌آید:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=EA=\frac{Q-Q_P}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E=\frac{Q-Q_P}{\varepsilon_\circ A} \qquad (۷-۱۱۳)$$

اما ، در بالا دیدیم که اثر دی‌الکتریک این است که اندازه‌ی میدان الکتریکی اولیه‌ی $\mathbf{E}_\circ$ را با ضریب κ_e کاهش می‌دهد. پس، می‌توان نوشت



شکل ۷-۲۱ سطح گوس در حظور دی‌الکتریک

$$E=\frac{E_\circ}{\kappa_e}=\frac{Q}{\kappa_e\varepsilon_\circ A}=\frac{Q-Q_P}{\varepsilon_\circ A} \qquad (۷-۱۱٤)$$

از این رابطه می‌توان بار القایی Q_P را به دست آورد

$$Q_P=Q\left(1-\frac{1}{\kappa_e}\right) \qquad (۷-۱۱٥)$$

حال اگر در رابطه‌ی (۷-۱۱۳) به جای Q_P از رابطه‌ی (۷-۱۱٥) قرار دهیم، قانون گوس به‌صورت زیر درمی‌آید.

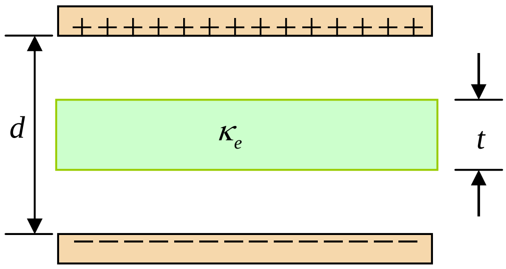
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\frac{Q}{\kappa_e\varepsilon_\circ}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ(1+\chi_e)}=\frac{Q}{\varepsilon} \qquad (۷-۱۱۷)$$

یا ، می توان نوشت

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a}=Q \qquad (۷-۱۱۸)$$

که در آن، $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=\varepsilon_\circ\kappa_e\mathbf{E}=\varepsilon_\circ(1+\chi_e)\mathbf{E}$ است. در اینجا، البته، Q بارهای آزاد اند که از باتری به خازن منتقل شده‌اند. ما دوباره رابطه‌ی (۷-۳۳) را به‌دست آوردیم.

مثال ۷-۱۱ خازن نیمه‌پر: همانند شکل (۷-۲۲) یک قطعه دی‌الکتریک به ضخامت t ، مساحت A و ثابت دی‌الکتریک κ_e را در فضای بین صفحه‌های خازن تختی به مساحت A، بار Q و فاصله‌ی بین صفحه های d قرار می‌دهیم. دی‌الکتریک لزوما در وسط صفحه‌ها قرار ندارد. ظرفیت سامانه را حساب کنید.



شکل ۷-۲۲ خازن تخت و دی‌الکتریک

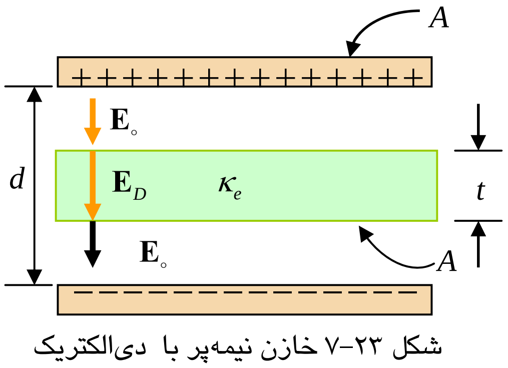
حل: برای این که ظرفیت C را حساب کنیم، نخست اختلاف پتانسیل ΔV را به‌دست می‌آوریم. دیدیم که اگر دی‌الکتریک وجود نداشته باشد، میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن $E_\circ=Q/\varepsilon_\circ A$ است. هم‌چنین دیدیم که با وجود دی‌الکتریک میدان الکتریکی برابر $E_D=E_0/\kappa_e$ می‌شود که در شکل (۷-۲۳)می‌توان دید. اختلاف پتانسیل را می‌توان با انتگرال‌گیری از میدان الکتریکی در راستای خط راستی از صفحه‌ی بالا تا صفحه‌ی پایین حساب کرد:

$$\Delta V=-\int_+^- E\,d\ell=-\Delta V_\circ-\Delta V_D=E_0(d-t)-E_Dt=-\frac{Q}{A\varepsilon_\circ}(d-t)-\frac{Q}{A\varepsilon_\circ\kappa_e}t$$

$$=-\frac{Q}{A\varepsilon_\circ}\left[d-t\left(1-\frac{1}{\kappa_e}\right)\right] \qquad (۷-۱۱۹)$$

که در آن $\Delta V_D=E_Dt$ اختلاف پتانسیل بین دو سطح دی‌الکتریک است و E_D میدان الکتریکی در درون آن است. از این جا نتیجه می‌شود که

$$C=\frac{Q}{|\Delta V|}=\frac{\varepsilon_0 A}{d-(1-1/\kappa_e)t} \qquad (۷-۱۲۰)$$



شکل ۷-۲۳ خازن نیمه‌پر با دی‌الکتریک

بررسی چند حالت حدی سودمند است.

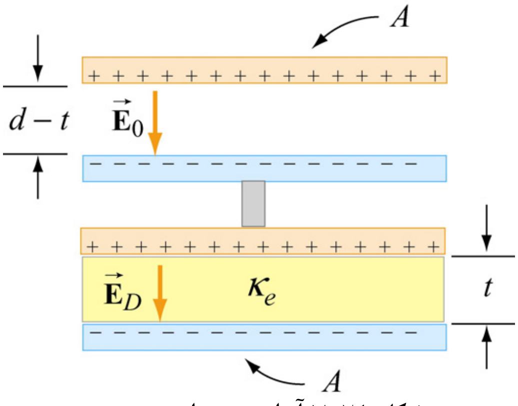
(الف): وقتی که ضخامت دی‌الکتریک به صفر میل کند: $t\to\circ$. در این صورت به‌دست می‌آید $C=\varepsilon_\circ A/d=C_\circ$ که مقدار مورد انتظار برای خازن بدون دی‌الکتریک است.

(ب): $\kappa_e\to ۱$: در این حالت هم بازهم داریم $C=\varepsilon_\circ A/d=C_\circ$ این حالت هم متناظر با وضعیتی است که دی‌الکتریک وجود ندارد.

(پ): سرانجام این که $t\to d$ باشد، یعنی تمام فضای بین صفحه‌های خازن با دی‌الکتریک پر شده باشد. در این صورت از رابطه‌ی (۷-۱۲۰) خواهیم داشت $C\to\kappa_e\varepsilon_\circ A/d=\kappa_e C_\circ$. همچنین توجه کنید که این آرایه با دو خازنی که همانند شکل

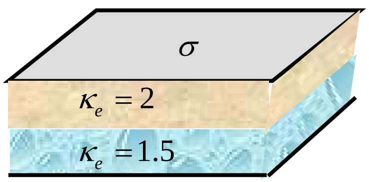
(۷–۲۴) به طور سری به هم وصل اند، هم‌ارز است.
با استفاده از رابطه‌ی (۶–۵۳) می‌توان ظرفیت معادل را به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\frac{1}{C}=\frac{d-t}{\varepsilon_{\circ}A}+\frac{t}{\kappa_e\varepsilon_{\circ}A} \qquad (۷–۱۲۱)$$



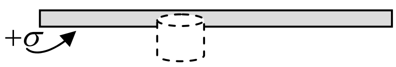
شکل ۷–۲۴ آرایه‌ی هم‌ارز

مثال ۷–۱۲ دو دی‌الکتریک در یک خازن تخت: فضای بین صفحه‌های خازن تخت برابر شکل (۷–۲۵) با دو نوع ماده‌ی دی‌الکتریک، هر یک به ضخامت s پرشده است. پس، فاصله‌ی بین صفحه‌های خازن ۲s است. ثابت دی‌الکتریک اول $\kappa_{e_1}=۲$ و ثابت دی‌الکتریک دوم $\kappa_{e_2}=۱,۵$ است. چگالی بار آزاد در روی صفحه‌ی بالایی خازن σ و در روی صفحه‌ی زیرین $-\sigma$ است.



شکل ۷–۲۵ دو دیالکتریک در خازن تخت

(الف): در هر یک از دی‌الکتریک‌ها بردار جابه‌جایی الکتریک **D** را بیابید.
(ب): در هر یک از دی‌الکتریک‌ها میدان الکتریک **E** را بیابید.
(پ): در هر یک از دی‌الکتریک‌ها بردار قطبش **P** را حساب کنید
(ت): اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن را به دست آورید.
(ج): مکان و اندازه‌ی همه‌ی بارهای القایی را به دست آورید.
(چ): حال که همه‌ی بارها (آزاد و القایی) را می‌شناسید، دی‌الکتریک‌ها را فراموش کنید و با استفاده از بارها دوباره میدان را در هر دی‌الکتریک به دست آورید و با پاسخ بخش (ب) مقایسه کنید.



شکل ۷–۲۶ سطح گوس

حل: (الف) قانون گوس را برای سطح استوانه‌ای شکل (۷–۲۷) به کار ببرید. داریم

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a}=q_{f_{\text{enc}}}\ \Rightarrow DA=\sigma A\ \Rightarrow\ D=\sigma \qquad (۷–۱۲۲)$$

A سطح قاعده‌ی استوانه است. جهت D رو به پایین است. توجه کنید که در صفحه‌ی رسانا $D=0$ است. در دی‌الکتریک دوم هم وضعیت به همین صورت و $D=\sigma$ است.

(ب):

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\ \Rightarrow \begin{cases} E_1=\dfrac{1}{\varepsilon_1}\sigma=\dfrac{1}{\varepsilon_{\circ}\kappa_{e1}}\sigma=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}} & (۷–۱۲۳)\\[2ex] E_2=\dfrac{1}{\varepsilon_2}\sigma=\dfrac{1}{\varepsilon_{\circ}\kappa_{e2}}\sigma=\dfrac{2\sigma}{3\varepsilon_{\circ}} & (۷–۱۲۴)\end{cases}$$

(پ):

$$\mathbf{P}=\varepsilon_{\circ}\chi_e\mathbf{E}=\varepsilon_{\circ}(\kappa_e-1)\mathbf{E}\ \Rightarrow \begin{cases} P_1=\varepsilon_{\circ}(2-1)\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}}=\dfrac{\sigma}{2} & (۷–۱۲۵)\\[2ex] P_2=\varepsilon_{\circ}(1.5-1)\dfrac{2\sigma}{3\varepsilon_{\circ}}=\dfrac{\sigma}{3} & (۷–۱۲۶)\end{cases}$$

(ت):

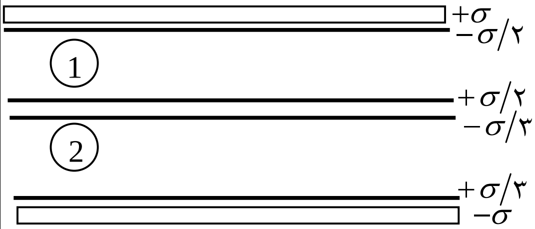
$$\Delta V = E_۱ s + E_۲ s = \left(E_۱ + E_۲\right)s = \frac{\sigma s}{۶\varepsilon_۰}\left(۳+۴\right) = \frac{۷\sigma s}{۶\varepsilon_۰} \qquad (۷-۱۲۷)$$

(ج): چون قطبش P در هر دو دی‌الکتریک مقادیر ثابت اند، $\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = ۰$

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_P = P_۱ = \dfrac{\sigma}{۲} & \text{در سطح زیرین دیالکتریک ۱} \quad (۷-۱۲۸) \\ \sigma_P = -P_۱ = -\dfrac{\sigma}{۲} & \text{در سطح بالایی دیالکتریک ۱} \quad (۷-۱۲۹) \\ \sigma_P = P_۲ = \dfrac{\sigma}{۳} & \text{در سطح زیرین دیالکتریک ۲} \quad (۷-۱۳۰) \\ \sigma_P = -P_۲ = -\dfrac{\sigma}{۳} & \text{در سطح بالایی دیالکتریک ۲} \quad (۷-۱۳۱) \end{cases}$$

بنابراین ، توزیع بارها همانند شکل (۲۷-۷) خواهد شد. بار سطحی کل در **بالای** دی‌الکتریک ۱ عبارت است از

$$\sigma + \left(-\sigma/۲\right) = \sigma/۲ \qquad (۷-۱۳۲)$$



شکل ۲۷-۷ مکان بارها

در ناحیه‌ی زیر دی‌الکتریک ۱ بار سطحی کل برابر است با

$$\left(\sigma/۲\right) + \left(-\sigma/۳\right) + \left(+\sigma/۳\right) - \sigma = -\sigma/۲ \qquad (۷-۱۳۳)$$

بنابراین، در بالای ناحیه‌ی ۱ در شکل (۲۷-۷) چگالی بار $+\sigma/2$ و در پایین آن $-\sigma/2$ است. در نتیجه $E_۱ = \sigma/۲\varepsilon_۰$ که همان نتیجه‌ی قسمت (ب) است.

به همین ترتیب، چگالی بار سطحی کل در بالای ناحیه‌ی ۲ عبارت است از

$$\left(+\sigma\right) + \left(-\sigma/۲\right) + \left(+\sigma/۲\right) + \left(-\sigma/۳\right) = ۲\sigma/۳ \qquad (۷-۱۳۴)$$

و در زیر آن، چگالی بار سطحی کل برابر است با

$$\left(+\sigma/۳\right) + \left(-\sigma\right) = -۲\sigma/۳ \qquad (۷-۱۳۵)$$

و در نتیجه، میدان در این ناحیه برابر است با $E_۲ = ۲\sigma/۳$ که بارهم همان پاسخ بخش (ب) است.

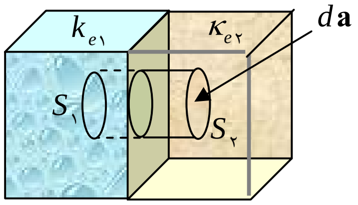
۶-۷ شرایط مرزی در سطح دی‌الکتریک

شاید به نظر برسد که چون $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ است، پس میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و بردار جابه‌جایی الکتریکی $\mathbf{D}$ تنها در یک ضریب ε با هم تفاوت دارند. این برداشت نادرست و گمراه کننده است: در حالت عمومی، انتگرال $\mathbf{D}$ روی مسیر بسته صفر نیست، در حالیکه انتگرال میدان الکتروستاتیکی $\mathbf{E}$ روی هر مسیر بسته‌ای صفر است. برای این که تفاوت‌های اساسی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ را بررسی کنیم، نخست به شرایط مرزی می‌پردازیم.

در فصل ۵ دیدیم که مولفه‌ی عمودی میدان الکتریکی در گذار از یک سطح باردار گسسته است اما مولفه‌ی مماسی آن پیوسته است. در شکل (۲۸-۷) سطح بین دو دی‌الکتریک با ثابت‌های $\kappa_{e۱}$ و $\kappa_{e۲}$ نشان داده شده است. نخست حالتی را در نظر بگیرید که **هیچ گونه بار آزاد** در سطح تماس دو دی‌الکتریک وجود **ندارد**.

سطح گوس شکل (۲۸-۷) را در نظر بگیرید و قانون گوس را برای بردار $\mathbf{D}$ بنویسید. شار کل بردار $\mathbf{D}$ که از این سطح می‌گذرد

صفر است، چون این سطح گوس هیچ بار آزادی را احاطه نکرده است.



شکل ۲۸-۷ سطح گوس برای تعیین شرایط مرزی **D**

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_f = 0 \qquad (۷-۱۳۶)$$

شار گذرنده از سطح جانبی استوانه‌ی سطح گوس را می‌توانیم صفر فرض کنیم؛ چون فقط به رفتار **D** در سطح دو دی‌الکتریک علاقمندیم و می‌توانیم ارتفاع استوانه را به صفر میل دهیم. سطح قاعده‌ی سمت چپ استوانه را S_1 و سطح قاعده‌ی سمت راست آن را S_2 بنامید، می‌توان نوشت

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1} \mathbf{D}_1\cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{D}_2\cdot d\mathbf{a}_2 = -\int_{S_1} D_{n1}da_1 + \int_{S_2} D_{n2}da_2 = 0 \qquad (۷-۱۳۷)$$

علامت منفی در مقابل انتگرال سمت چپ مرز دو دی‌الکتریک به این خاطر است که بردار یکه‌ی عمود بر سطح S_1 به سوی چپ و بردار $\mathbf{D}_1$ به سوی راست است. پس، از این رابطه نتیجه می‌شود که

$$D_{n1} = D_{n2} \qquad (۷-۱۳۸)$$

یعنی اگر در مرز دو دی‌الکتریک بار **آزاد وجود نداشته باشد** (اما بار القایی معمولا وجود دارد) *مولفه‌ی عمودی بردار* **D** *در مرز بین دو دی‌الکتریک یکسان و پیوسته است*. توجه کنید که در حالت کلی دلیلی وجود ندار که، $E_{\mathbf{n}}$ پیوسته باشد؛ زیرا در مرز دو دی‌الکتریک ممکن است چگالی خالص بار سطحی القایی صفر نباشد.

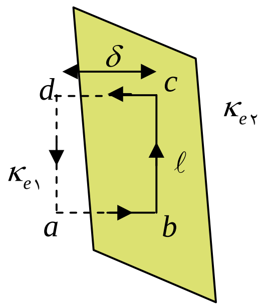
اگر در مرز بین دو دی‌الکتریک بار آزاد وجود داشته باشد، آنگاه داشتیم

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_f \quad \Rightarrow \int_{S_1} \mathbf{D}_1\cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{D}_2\cdot d\mathbf{a}_2 = \int_S \sigma_f\, d\mathbf{a}$$

$$= -\int_{S_1} D_{n1}da_1 + \int_{S_2} D_{n2}da_2 = \int_S \sigma_f\, d\mathbf{a} \Rightarrow \quad D_{n2} - D_{n1} = \sigma_f$$

$$\therefore \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} = \sigma_f \qquad (۷-۱۳۹)$$

حال به بررسی مولفه‌ی افقی می‌پردازیم. در شکل (۲۹-۷) مرز دو دی‌الکتریک نشان داده شده است. مسیر بسته‌ی abcda را چنان انتخاب کنید که نیمی از آن در یک دی‌الکتریک و نیم دیگرش در دی‌الکتریک دوم قرار داشته باشد. انتگرال $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0$ را برای این مسیر حساب کنید.



شکل ۲۹-۷ انتگرال خط برای مولفه‌ی افقی **E** و **D**

$$\int_b^c \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{s}_1 + \int_d^a \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{s}_2 = \int_b^c E_{t2}d\ell - \int_d^a E_{t1}d\ell = 0 \qquad (۷-۱۴۰)$$

چون bc=da است. توجه کنید که ضلعهای ab و cd سهمی در انتگرال ندارند؛ چون ما فقط به رفتار **E** در مرز دو دی‌الکتریک علاقمندیم و می‌توانیم δ را به صفر میل دهیم. از رابطه‌ی بالا روشن است که

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad (۷-۱۴۱)$$

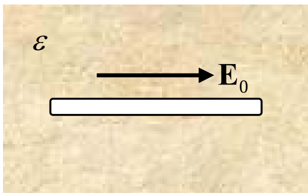
است. اما این به معنی آن نیست که در حالت عمومی $D_{t1} = D_{t2}$ است، زیرا برای بردار **D** داریم

$$\int_b^c \mathbf{D}_1\cdot d\mathbf{s}_1 + \int_d^a \mathbf{D}_2\cdot d\mathbf{s}_2 = \int_b^c D_{t2}d\ell - \int_d^a D_{t1}d\ell = \int_b^c (\varepsilon_2 E_{t2})d\ell - \int_d^a (\varepsilon_1 E_{t1})d\ell \neq 0 \qquad (۷-۱۴۲)$$

چون، اگرچه $E_{t1} = E_{t2}$ اند اما در حالت کلی $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ است. به بیان دیگر، در حالت عمومی، انتگرال روی مسیر بسته، بردار

قطبش **P** صفر نیست. پس ، در حالت عمومی $D_{t۱} \neq D_{t۲}$.

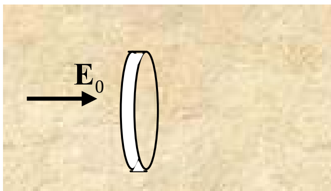
برای این که کاربرد ساده‌ای از این شرایط مرزی را ببینیم، دی‌الکتریکی با گذردهی ε را در نظر بگیرید که میدان الکتریکی در درون آن $\mathbf{E}_{\circ}$ است. کاواک نازک و درازی (مانند یک سوزن) موازی $\mathbf{E}_{\circ}$ همانند شکل (۷-۳۰) در دی‌الکتریک ایجاد کنید. میدان الکتریکی در این کاواک خالی چگونه است؟ پاسخ را مستقیم می‌توان از رابطه‌ی (۷-۱۴۱) به‌دست آورد. چون سطح دو انتهای کاواک بسیار کوچک اند، می‌توان از آنها چشم‌پوشی کرد. بنابراین همه‌ی سطح کاواک در راستای طول آن است. در این راستا، اما میدان **E** مماسی و بنابراین، پیوسته است. در نتیجه، میدان در درون کاواک $E_t = E_{\circ t} = E_{\circ}$ است. در درون کاواک میدان مولفه‌ی عمودی ندارد؛ چون $E_{\text{n}} = \varepsilon E_{\circ\text{n}} = \circ$ است. پس، میدان در درون این کاواک با میدان در درون دی‌الکتریک یکسان است (در نزدیکی‌های دو انتهای سوزن این سخن درست نیست و ما از این ناحیه‌ها پرهیز می‌کنیم.)



شکل ۷-۳۰ کاواک سوزنی در دی‌الکتریک

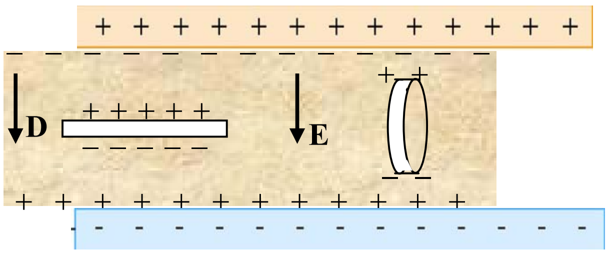
حال فرض کنید که شکل کاواک به جای سوزنی بودن به شکل یک قرص یا یک سکه باشد که سطوح آن همانند شکل (۷-۳۱) بر میدان $\mathbf{E}_{\circ}$ عمود اند. در این حالت، میدان در درون کاواک چگونه است؟

حالا به تقریب همه‌ی سطح کاواک در دو روی آن قرار دارد (دو روی سکه) و ضخامت سکه سطح ناچیزی است. در سطح رویه‌ها مولفه‌ی عمودی بردار جابه‌جایی D_{n}، پیوسته است. بنابراین، مولفه‌ی عمودی میدان الکتریکی در درون کاواک $E_{\text{n}} = \varepsilon E_{\circ\text{n}} = \varepsilon E_{\circ}$ است. مولفه‌ی افقی میدان در درون کاواک صفر است؛ چون $E_{\text{t}} = E_{\circ\text{t}} = \circ$ است. پس، در کاواک سکه‌ای میدان **E** با میدان در دی‌الکتریک برابر است.



شکل ۷-۳۱ کاواک سکه مانند در درون دی‌الکتریک

مثال۱۳ -۷ کاواک در دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن تخت: خازن تخت شکل (۷-۳۲) با دی‌الکتریک انباشته شده است. در این دی‌الکتریک دو کاواک، یکی به صورت یک سوزن دراز که طولش بر میدان درون دی‌الکتریک عمود است. دیگری کاواک سکه مانند است که بردار یکه‌ی عمود بر رویه‌های آن بر میدان الکتریکی درون دی‌الکتریک عمود است (رویه‌ها با میدان **E** موازی اند). میدان الکتریکی را در درون هریک از این دو کاواک به‌دست آورید.



شکل ۷-۳۲ دو کاواک در دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن تخت

حل: در کاواک سمت چپ، مولفه‌ی عمودی بردار **D** پیوسته است. بنابراین، $D_{\text{n}} = D_{\text{cn}}$ که در D_{cn} مولفه‌ی عمودی بردار **D** در کاواک است. از مثال ۱۲-۷ ، رابطه‌ی (۷-۱۲۲) می‌دانیم که در دی‌الکتریک $D = \sigma_f$ است (σ_f چگالی بار سطحی خازن است و البته این بار آزاد است) و فقط مولفه‌ی عمودی دارد. پس، در کاواک سمت چپ داریم

$$D_{\text{cn}} = D_{\text{n}} = \sigma_f \;\Rightarrow\; \varepsilon_{\circ} E_{\text{cn}} = \sigma_f \qquad \therefore \qquad E_{\text{cn}} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_{\circ}} \tag{۷-۱۴۳}$$

چون **D** مولفه‌ی افقی ندارد، $D_{ct} = D_t = \circ$ است. پس، در کاواک سمت چپ شکل (۷-۳۲) بردار $\mathbf{D}_{\text{c}}$ با بردار **D** در دی‌الکتریک

برابر است. روشن است که میدان الکتریکی در این کاواک باید با ضریب $\kappa_e = \varepsilon/\varepsilon_\circ$ از میدان در دی‌الکتریک بزرگ‌تر باشد. به سادگی می‌توان این را دید: در دی‌الکتریک، میدان الکتریکی $E = D/\varepsilon = \sigma_f/\varepsilon = (\sigma_f + \sigma_P)/\varepsilon_\circ$ است. بنابراین، داریم

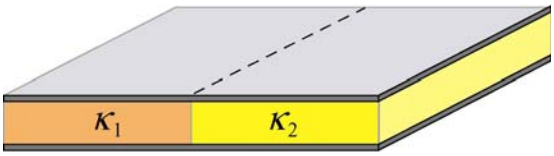
$$\frac{E_c}{E} = \frac{\sigma_f/\varepsilon_\circ}{\sigma_f/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\circ} = \kappa_e \quad \Rightarrow E_c = \kappa_e E \tag{۷-۱۴۴}$$

در کاواک سکه مانند سمت راست شکل (۷-۳۲) بارهای القایی کل در لبه‌های سکه قرار دارند و چون سطح لبه‌ها کوچک اند، این مقدار بار بسیار اندک است و می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. در نتیجه، میدان در درون این کاواک عبارت است از

$$\mathbf{E}_n = \frac{\sigma_f + \sigma_P}{\varepsilon_\circ} \tag{۷-۱۴۵}$$

که همان میدان در دی‌الکتریک است.

مثال ۷-۱۴ خازن با دو دی‌الکتریک: نیمی از فضای بین صفحه‌های خازن تخت را دی‌الکتریکی با ثابت κ_1 و نیم دیگرش را دی‌الکتریکی با ثابت κ_2 برابر شکل (۷-۳۳) پر شده است. مساحت صفحه‌ی خازن A و جدایی بین صفحه‌ها d است. ظرفیت آرایه را بیابید.



شکل۷-۳۳ خازن تخت با دو نوع دی‌الکتریک

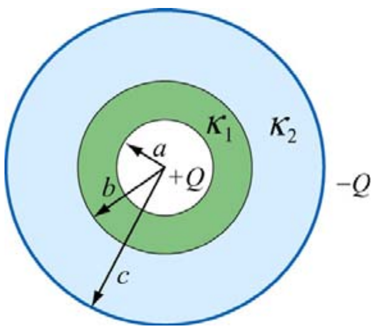
حل : چون اختلاف پتانسیل در هر دو نیمه‌های خازن یکسان است، می‌توان مجموعه را دو خازن با ظرفیت‌های $C_۱$ و $C_۲$ درنظر گرفت که موازی بسته شده‌اند. ظرفیت هر یک از این خازن‌ها برابر است با

$$C_i = \frac{\kappa_i \varepsilon_\circ (A/۲)}{d} \quad , \quad i = ۱,۲ \tag{۷-۱۴۶}$$

بنابراین، ظرفیت معادل آنها عبارت است از

$$C = C_۱ + C_۲ = \frac{\kappa_۱\varepsilon_\circ(A/۲)}{d} + \frac{\kappa_۲\varepsilon_\circ(A/۲)}{d} = \frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}(\kappa_۱ + \kappa_۲) \tag{۷-۱۴۷}$$

مثال ۱۵ خازن کروی با دو دی‌الکتریک: فضای بین دو کره‌ی رسانا به شعاع‌های a و c برابر شکل (۷-۳٤) از a تا b با دی‌الکتریکی با ثابت‌های $\kappa_۱$ و از b تا c با دی‌الکتریکی با ثابت $\kappa_۲$ انباشته شده است. ظرفیت این سامانه را حساب کنید.



شکل ۷-۳٤ خازن کروی با دو دی‌الکتریک

حل: این سامانه همانند دو خازن است که به طور سری به هم بسته شده‌اند؛ چون اختلاف پتانسیل، جمع اختلاف پتانسیل‌های دو خازن است. ظرفیت یک خازن کروی با شعاع داخلی $r_۱$ و شعاع بیرونی $r_۲$ که با دی‌الکتریکی با ثابت κ_e پر شده باشد، برابر

$$C = ٤\pi\varepsilon_\circ\kappa_e\left(\frac{r_۱ r_۲}{r_۲ - r_۱}\right) \tag{۷-۱٤۸}$$

است. بنابراین، ظرفیت معادل برابر است با

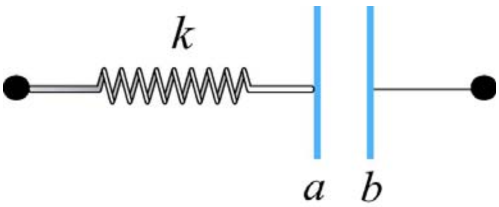
$$\frac{۱}{C}=\frac{۱}{\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}\kappa_{۱}ab}{(b-a)}}+\frac{۱}{\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}\kappa_{۲}bc}{(c-b)}}=\frac{\kappa_{۲}c(b-a)+\kappa_{۱}a(c-b)}{۴\pi\varepsilon_{\circ}\kappa_{۱}\kappa_{۲}abc}\quad\Rightarrow\quad C=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}\kappa_{۱}\kappa_{۲}abc}{\kappa_{۲}c(b-a)+\kappa_{۱}a(c-b)}\qquad(۷-۱۴۹)$$

خوب است که حد $\kappa_{۱}\to ۱$ و $\kappa_{۲}\to ۱$ را بیازماییم. در این حالت، رابطه‌ی بالا به رابطی زیر کاهش می‌یابد.

$$C=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}abc}{c(b-a)+a(c-a)}=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}abc}{b(c-a)}=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}ac}{(c-a)}\qquad(۷-۱۵۰)$$

که با پاسخی که در رابطه‌ی (۶-۶۵) برای خازن کروی به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b به‌دست آوردیم، سازگار است.

مثال ۷-۱۶ خازن و فنر: خازنی را در نظر بگیرید که برابر شکل (۷-۳۵) به یک صفحه‌ی آن فنری با ثابت نیروی k وصل است و صفحه‌ی دیگرش ثابت است. این سامانه در روی میزی قرار دارد. اگر بار $+Q$ را روی صفحه‌ی a و بار $-Q$ را روی صفحه‌ی b خازن قرار دهیم، فنر چه مقدار کشیده می‌شود؟



شکل ۷-۳۵ خازن و فنر

حل: نیرویی که فنر به صفحه‌ی a وارد می‌کند، برابر است با

$$\mathbf{F}_s=-kx\,\hat{\mathbf{i}}\qquad(۷-۱۵۱)$$

همچنین، میدان حاصل از بارهای صفحه‌ی b به بارهای صفحه‌ی a نیروی الکتروستاتیکی $\mathbf{F}_e$ وارد می‌کنند. این نیرو عبارت است از

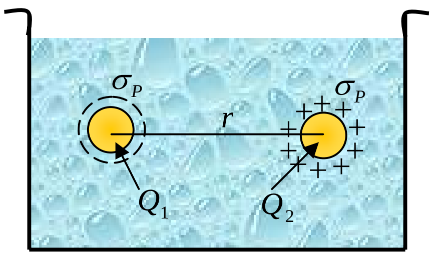
$$\mathbf{F}_e=QE\,\hat{\mathbf{i}}=Q\left(\sigma/۲\varepsilon_{\circ}\right)\hat{\mathbf{i}}=\frac{Q^{۲}}{۲A\varepsilon_{\circ}}\hat{\mathbf{i}}\qquad(۷-۱۵۲)$$

که در آن A مساحت صفحه‌ی خازن است. توجه کنید که بارهای روی صفحه‌ی a ، بنا به قانون سوم نیوتون، نمی‌توانند به خودشان نیرو وارد کنند؛ به این خاطر فقط نیروی بارهای صفحه‌ی b در نظر گرفته شد. در حالت ترازمندی، $\mathbf{F}_e$ و $\mathbf{F}_s$ باید باهم برابر و در خلاف جهت یکدیگر باشتد تا همدیگر را حذف کنند. پس:

$$kx=Q\left(\frac{Q}{۲A\varepsilon_{\circ}}\right)\quad\Rightarrow\quad x=\frac{Q^{۲}}{۲kA\varepsilon_{\circ}}\qquad(۷-۱۵۳)$$

۷-۷ نیروی بین بارها در محیط دی‌الکتریک

یکی از اثرهای مهم دی‌الکتریک، ایجاد تغییر در نیروی بین بارهای الکتریکی است. حالت ساده‌ای را در نظر بگیرید که دو کره‌ی رسانای کوچک با بارهای $Q_{۱}$ و $Q_{۲}$ برابر شکل (۷-۳۶) در یک مایع دی‌الکتریک با ثابت κ_e قرار دارند. فرض کنید فاصله‌ی کره‌ها r است. می‌خواهیم میدان الکتریکی را در فاصله‌ی r از بار $Q_{۱}$، با در نظر گرفتن بارهای القایی پیرامون $Q_{۱}$ ، حساب کنیم. پس از یافتن این میدان، نیروی وارد به بار $Q_{۲}$ را می‌توان به‌دست آورد.



شکل ۷-۳۶ دو کره‌ی کوچک باردار در مایع دی‌الکتریک

ساده‌ترین راه، محاسبه‌ی D در فاصله‌ی r است. سطح گوسی به شکل کره‌ی به شعاع r و به مرکز بار $Q_{۱}$ انتخاب کنید. از قانون گوس برای دی‌الکتریک داریم

$$\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{a}=Q_{۱}\quad\Rightarrow\quad D\left(۴\pi r^{۲}\right)=Q_{۱}$$

$$D=\frac{Q_{۱}}{۴\pi r^{۲}}=\varepsilon E=\varepsilon_{\circ}\kappa_e E\qquad(۷-۱۵۴)$$

بنابراین، میدان الکتریکی E (در نبود بار $Q_{۲}$) در فاصله‌ی r برابر است با

$$E = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{Q_{۱}}{\kappa_e r^{۲}} \qquad (۷-۱۵۵)$$

بار دوم $Q_{۲}$ وقتی در دی‌الکتریک قرار می‌گیرد، همانند بار $Q_{۱}$، مایع را در پیرامون خودش قطبیده می‌کند. اما، اثر این قطبش تولید بارهای قطبشی با تقارن کروی در پیرامون بار $Q_{۲}$ است و تاثیری در نیروی وارد بر $Q_{۲}$ ندارد. بنابراین، نیروی کل وارد به بار $Q_{۲}$ عبارت است از

$$F = Q_{۲}E = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{Q_{۱}Q_{۲}}{\kappa_e r^{۲}} \qquad (۷-۱۵٦)$$

در این مثال فرض کردیم که هر دو بار $Q_{۱}$ و $Q_{۲}$ به حجمی محدود شده اند که در مقایسه با r بسیار کوچک اند. در غیر این صورت نباید انتظار داشته باشیم که قانون عکس مجذور فاصله (حتی در خلاء) برقرار باشد. نتیجه‌ی بالا در این حالت حدی این گونه است که نیروی بین بارهای نقطه‌ای در محیط دی‌الکتریک با ضریب $1/\kappa_e$ نسبت به خلاء کاهش می‌یابد. اگر چه رابطه‌ی (۷-۱۵٦) فقط برای بارهای نقطه‌ای درست است، اما کاهش پیدا کردن نیروی بین بارها مستقل از اندازه‌ی و شکل بار است.

۷-۷ انرژی در سامانه‌های دی‌الکتریک

در فصل ۵ دیدیم که در خلاء چگالی انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی به صورت زیر است

$$u_E = \frac{\varepsilon_{\circ}}{۲} E^{۲} \qquad (۷-۱۵۷)$$

این رابطه در محیط دی‌الکتریک به چه صورت درمی‌آید؟ پاسخ این پرسش را می‌توان از مقایسه‌ی انرژی ذخیره شده در یک خازن با دی‌الکتریک و بدون دی‌الکتریک به‌دست آورد. می‌دانیم که برای باردار کردن یک خازن باید کار انجام داد. فرض کنید، خازنی با ظرفیت C را به یک باتری با اختلاف پتانسیل V وصل کرده‌ایم. انرژی ذخیره شده در این خازن برابر است با

$$W = \frac{۱}{۲} C V^{۲} \qquad (۷-۱۵۸)$$

حال اگر اختلاف پتانسیل را ثابت نگه داریم (بنابراین، میدان $\mathbf{E}$ ثابت باشد) و یک قطعه دی‌الکتریک با ثابت κ_e را بین صفحه‌های خازن قرار دهیم، ظرفیت خازن تغییر و به مقدار $C' = \kappa_e C$ افزایش پیدا خواهد کرد. انرژی ذخیره شده در خازن با رابطه‌ی (۷-۱۵۸) داده شده است، بنابراین، انتظار داریم که انرژی خازن دارای دی‌الکتریک برابر

$$W' = \frac{۱}{۲} C' V^{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\kappa_e C\right) V^{۲} = \kappa_e W \qquad (۷-۱۵۹)$$

باشد. بنابراین، در پتانسیل ثابت، با افزودن دی‌الکتریک به خازن، انرژی ذخیره شده در آن از W به $W' = \kappa_e W$ افزایش می‌یابد. به بیان دیگر، برای باردار کردن خازن دارای دی‌الکتریک در اختلاف پتانسیل ثابت، باید کار بیشتری انجام داد . این کار را باتری با فرستادن بارهای بیشتر به صفحه‌های خازن انجام می‌دهد. چون، اثر بخشی از بارهای آزاد با بارهای القایی در سطح دی‌الکتریک خنثی می‌شود و برای این که اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن ثابت بماند، باتری کار بیشتری هزینه می‌کند. این کار در خازن ذخیره می‌شود. κ_e برابر شدن انرژی در خازن انباشته از دی‌الکتریک به این معنی است که چگالی انرژی هم نسبت به حالت خلاء κ_e برابر افزایش پیدا می‌کند. پس می‌توان نوشت

$$u'_E = \kappa_e u_E = \kappa_e \left(\frac{\varepsilon_{\circ}}{۲}\right) E^{۲} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{\varepsilon_{\circ}}{۲}\right) E^{۲} = \frac{۱}{۲}\varepsilon E^{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\varepsilon E\right) E = \frac{۱}{۲} D E \qquad (۷-۱٦۰)$$

انرژی کل ذخیره شده در خازن دارای دی‌الکتریک عبارت است از

$$W' = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \kappa_e E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \kappa_e \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, d\tau = \frac{1}{2}\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, d\tau \qquad (٧-١٦١)$$

البته، انتگرال روی تمام فضا گرفته می‌شود. این مقایسه بر پایه‌ی میدان‌های یکسان در خلاء ودر دی‌الکتریک بود. اگر خازن را با بار Q باردار کنیم و آن از باتری جدا کنیم و سپس قطعه‌ی دی‌الکتریک را در درون آن قرار دهیم، انرژی ذخیره شده در خازن کاهش می‌یابد. در این حالت، بار Q را ثابت نگه می‌داریم، اما با افزودن دی‌الکتریک، اختلاف پتانسیل خازن تغییر می‌کند. بنابراین، در این حالت می‌توان نوشت

(٧-١٦٢) انرژی خازن بدون دی‌الکتریک
$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

(٧-١٦٣) انرژی خازن با دی‌الکتریک
$$W' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\kappa_e C}$$

(٧-١٦٤) برای ثابت= Q
$$\Rightarrow \quad W' = \frac{1}{\kappa_e}W$$

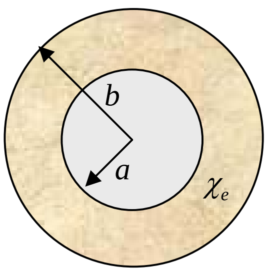
مثال ١٧-٧ انرژی کره‌ی پوشیده در دی‌الکتریک: کره‌ی رسانایی به شعاع a برابر شکل (٣٧-٧) تا شعاع b با ماده‌ی دی‌الکتریک خطی با پذیرفتاری χ_e پوشانده شده است. انرژی این آرایه را حساب کنید.

حل: از مثال ٢-٧ ، رابطه‌های (٤٢-٧) و (٤٣-٧) داریم

$$\mathbf{D} = \begin{cases} 0 & ; \quad r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r \ge a \end{cases} \qquad (٧-١٦٥)$$

بنابراین، میدان الکتریکی در ناحیه‌های $r < a$ ، $a < r < b$ و $r > b$ عبارتند از

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & ; \quad r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad a < r < b \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r > b \end{cases} \qquad (٧-١٦٦)$$



شکل ٣٧-٧ کره‌ی رسانا با پوشش دی‌الکتریک

حال می‌توان انرژی را حساب کرد. از رابطه‌ی (١٦١-٧) داریم

$$W = \frac{1}{2}\int_\infty \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, d\tau = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(4\pi)^2}(4\pi)\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \frac{1}{r^2}\frac{1}{r^2}r^2 dr + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_b^\infty \frac{1}{r^2}\frac{1}{r^2}r^2 dr\right\}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^b + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_b^\infty\right\} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(1+\chi_e)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b}\right\} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(1+\chi_e)}\left[\frac{1}{a}+\frac{\chi_e}{b}\right] \qquad (٧-١٦٧)$$

۷-۸ نیروی وارد به دی‌الکتریک

اگر یک قطعه دی‌الکتریک در میدان الکتریکی قرار گیرد، به آن نیروی الکتریکی ربایشی وارد می‌شود؛ چون بارهای القایی در نزدیکی بارهای آزاد با علامت مخالف جمع می‌شوند و بارهای ناهم‌نام یکدیگر را می‌ربایند.

محاسبه‌ی این نیرو در بسیاری موارد دشوار و پیچیده است. در این بخش خواهیم دید که اگر تغییر انرژی سامانه را بتوان حساب کرد، بدون نیاز به محاسبات پیچیده، می‌توان نیروی وارد به دی‌الکتریک را هم یافت.

انرژی سامانه به این دلیل تغییر می‌کند که با قرار گرفتن دی‌الکتریک در میدان الکتریکی، بارهای القایی تولید می‌شود. بگذارید نخست، این تغییر انرژی را برای حالت خاصی بررسی کنیم و سپس حالت عمومی را در نظر بگیریم.

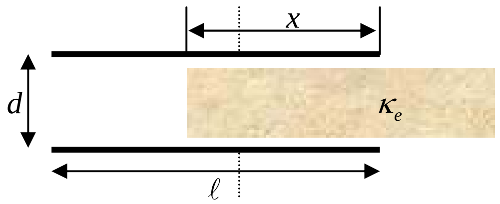
وقتی دی‌الکتریک در بین صفحه‌های خازن قرار می‌گیرد، انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی تغییر می‌کند. اگر اختلاف پتانسیل صفحه‌های خازن ثابت نگه داشته شود ، میدان الکتریکی هم در فضای بین صفحه‌های خازن ثابت می‌ماند. اما انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی افزایش پیدا می‌کند. اگر بار در روی صفحه‌های خازن ثابت نگه داشته شود، انرژی در میدان الکتریکی کاهش می‌یابد. پرسش جالب این است که انرژی از کجا فراهم می‌شود و در کجا از دست می‌رود؟

می‌توان از اصل کار مجازی استفاده کرد و به این پرسش پاسخ داد. نخست حالتی را در نظر بگیرید که در یک خازن منزوی، اختلاف پتانسیل V (یا میدان E) ثابت نگه داشته می‌شود. معادله‌ای که حساب کار و انرژی را نگه می‌دارد، عبارت است از

$$dU = -F_e\,dx + VdQ \qquad (۷-۱۶۸)$$

که در آن F_e نیرویی است که میدان الکتریکی به دی‌الکتریک وارد می‌کند. جمله‌ی $V\,dQ$ به این خاطر است که برای ثابت نگه داشتن اختلاف پتانسیل، باید بار اضافی به خازن منتقل کنیم. بنابراین، با جابه‌جایی dx دی‌الکتریک به درون خازن، ظرفیت خازن افزایش پیدا می‌کند و هم‌زمان با آن باتری بار dQ را در پتانسیل V به خازن منتقل می‌کند.

برای این که نیروی F را بیابیم، کافی است dU و $V\,dQ$ را برحسب مقدار جابه‌جایی dx دی‌الکتریک بنویسیم و سپس از معادله‌ی (۷-۱۶۸) F را حساب کنیم. برای این کار، با $U = (۱/۲)QV$ آغاز می‌کنیم. چون V ثابت است ، می‌توان Q را برحسب V و C نوشت. در شکل (۷-۳۸) وضعیتی با خازن تخت نشان داده شده است. این شکل همانند دو خازن موازی است که در درون یکی دی‌الکتریک وجود دارد و دیگری خلاء است. اگر A سطح ناحیه‌ی خلاء و A' سطح با دی‌الکتریک باشد، ظرفیت این خازن عبارت است از



شکل ۷-۳۸ دی‌الکتریک و خازن

$$C = \frac{\varepsilon_\circ A}{d} + \frac{\kappa_e \varepsilon_\circ A'}{d} \qquad (۷-۱۶۹)$$

که در آن d فاصله‌ی بین صفحه‌های خازن است. اگر پهنای صفحه‌های خازن b باشد، داریم

$$C = \frac{\varepsilon_\circ b}{d}\left(\kappa_e x + \ell - x\right) \qquad (۷-۱۷۰)$$

ℓ طول صفحه‌ی خازن است. چون $Q = CV$ است، می‌توان نوشت

$$Q = \frac{\varepsilon_\circ bV}{d}\left(\kappa_e x + \ell - x\right) \quad \Rightarrow \quad dQ = \frac{\varepsilon_\circ bV}{d}\left(\kappa_e - ۱\right)dx \qquad (۷-۱۷۱)$$

با توجه به این که

$$U = \frac{۱}{۲}VQ \quad \Rightarrow \quad dU = \frac{۱}{۲}V\,dQ = \frac{۱}{۲}\frac{V^{۲}\varepsilon_\circ b}{d}\left(\kappa_e - ۱\right)dx \qquad (۷-۱۷۲)$$

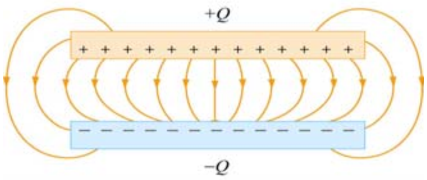
است، اینک رابطه‌ی (۱۶۸-۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$F_e\,dx = -dU + V\,dQ = -\frac{1}{2}\frac{V^2\varepsilon_\circ b}{d}(\kappa_e-1)dx + \frac{V^2\varepsilon_\circ b}{d}(\kappa_e-1)dx \quad \Rightarrow \quad F_e = \frac{1}{2}\frac{V^2\varepsilon_\circ b}{d}(\kappa_e-1) \qquad (۷-۱۷۳)$$

چون F_e مثبت است، جهتش، در جهت افزایش x است و بنابراین، دی‌الکتریک به وسیله‌ی نیروی الکتریکی به درون خازن **کشیده** می‌شود. نیمی از کار که باتری خرج می‌کند هزینه‌ی افزایش انرژی ذخیره شده در خازن و نیمی دیگر صرف کشیدن دی‌الکتریک به درون خازن می‌شود.

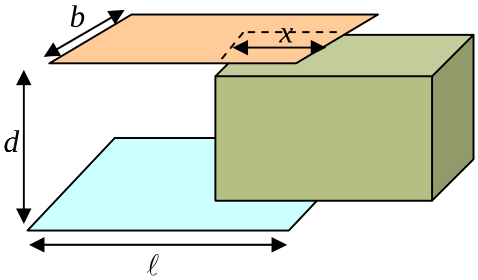
در حالتی که بار روی خازن ثابت است، با وجود دی‌الکتریک انرژی خازن کاهش پیدا می‌کند. در این حالت، کاری که میدان الکتریکی خرج می‌کند تا دی‌الکتریک را به درون خود بکشد، با کاهش انرژی ذخیره شده در میدان خازن تامین می‌شود.

مسئله را می‌توان کلی‌تر از این بررسی کرد. ما همواره فرض کرده‌ایم که میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن تخت یکنواخت و در بیرون آن صفر است. اگر واقعا این گونه می‌بود، به قطعه‌ی دی‌الکتریک نیرو وارد نمی‌شد. واقعیت این است که در کنار لبه‌های خازن خط‌های میدان خمیده می‌شوند و یک مولفه‌ی افقی هم پیدا می‌کنند. در شکل (۳۹-۷) خط‌های میدان در یک خازن تخت نشان داده شده است. میدان خمیده در لبه‌ها نا یکنواخت است و میدان‌های **چتری** نامیده می‌شوند. محاسبه‌ی میدان‌های چتری دشوار و پیچیده است، اما روش ابتکاری زیر ما را از این دشواری می‌رهاند.



شکل ۳۹-۷ میدان‌های چتری در خازن

خازن تخت شکل (۴۰-۷) را در نظر بگیرید که طول و پهنای صفحه‌های آن به ترتیب ℓ و b است و فاصله‌ی بین صفحه‌ها d است. یک قطه ماده‌ی دی‌الکتریک را تصور کنید که بخشی از آن در درون خازن قرار دارد. انرژی این سامانه را U بنامید. همان‌گونه که در بالا دیدیم، این انرژی به هم‌پوشی خازن و دی‌الکتریک، x ، بستگی دارد. اگر دی‌الکتریک را به اندازه‌ی کوچک dx به بیرون بکشیم، انرژی سامانه به اندازه‌ی کاری که در این جابه‌جایی انجام می‌گیرد، تغییر می‌کند. فرض کنید، دی‌الکتریک را با نیروی F_s چنان جابه‌جا می‌کنیم که شتاب پیدا نکند. یعنی نیروی F_s با نیروی الکتروستاتیکی F_e که آن را به درون خازن می‌کشد، از نظر اندازه برابر باشد تا از افزایش انرژی جنبشی جلوگیری شود. پس، $F_s = -F_e$ است. کار ما در جابه‌جایی دی‌الکتریک به اندازه‌ی dx (یا تغییرانرژی سامانه) عبارت است از



شکل ۴۰-۷ دی‌الکتریک دربین صفحه‌های خازن

$$dU = F_s\,dx \qquad (۷-۱۷۴)$$

در نتیجه، نیروی الکتروستاتیکی F_e وارد به قطعه‌ی دی‌الکتریک برابر است با

$$F = -\frac{dU}{dx} \qquad (۷-۱۷۵)$$

پس، اگر تغییر انرژی سامانه را بتوانیم حساب کنیم، نیروی الکتروستاتیکی وارد به دی‌الکتریک هم به‌دست می‌آید.

انرژی ذخیره شده در خازن عبارت است از

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \qquad (۷-۱۷۶)$$

و ظرفیت خازن در رابطه‌ی (۷-۱۷۰) داده شده است:

$$C=\frac{\varepsilon_\circ b}{d}\left(\kappa_e x+\ell-x\right)=\frac{\varepsilon_\circ b}{d}\left(\ell+\chi_e x\right) \tag{۷-۱۷۷}$$

چون در اینجا خازن در اختلاف پتانسیل ثابت قرار ندارد، با حرکت دی‌الکتریک پتانسیل تغییر می‌کند؛ اما بار آزاد Q مو.جود در خازن ثابت می‌ماند. چون $Q=CV$ است ، رابطه‌ی (۷-۱۷۶) برحسب Q به صورت

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{۷-۱۷۸}$$

درمی‌آید. تنها چیزی که در این رابطه به مقدار جابه‌جایی دی‌الکتریک بستگی دارد، ظرفیت C است. بنابراین،

$$F_e=-\frac{dU}{dx}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{dx}=\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} \tag{۷-۱۷۹}$$

از طرفی، می‌توان dC/dx را از رابطه‌ی (۷-۱۷۷) حساب کرد و در رابطه‌ی (۷-۱۷۹) قرار دار. پس، برای F_e خواهیم داشت

$$\frac{dC}{dx}=\frac{\varepsilon_\circ b\,\chi_e}{d} \qquad \Rightarrow \qquad F_e=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_\circ b\,\chi_e}{d}V^2 \tag{۷-۱۸۰}$$

توجه کنید که در این رابطه V اختلاف پتانسیل نهایی صفحه‌های خازن است. هم‌چنین توجه کنید که برای محاسبه‌ی dU/dx ، یا نیروی F_e، از رابطه‌ی (۷-۱۷۶) استفاده نکردیم، چون در این رابطه V یک متغیر است. به جای آن از رابطه‌ی (۷-۱۷۸) سود بردیم. اگر از رابطه‌ی (۷-۱۷۶) استفاده می‌کردیم پاسخ به صورت زیر می‌شد:

$$F_e=-\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}=-\frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_\circ b\,\chi_e}{d} \tag{۷-۱۸۱}$$

که در یک علامت منفی با رابطه‌ی (۷-۱۸۰) اختلاف دارد و جهت نادرستی برای نیروی الکتریکی به‌دست می‌دهد. در آغاز این بخش نشان دادیم که می‌توان اختلاف پتانسیل را ثابت نگه داشت و از رابطه‌ی (۷-۱۷۶) برای یافتن نیروی F_e استفاده کرد. اما برای این کار لازم است که خازن به یک باتری وصل شود. در این صورت، سامانه از باتری بعلاوه‌ی خازن و قطعه‌ی دی-الکتریک تشکیل می‌شود و باید در انرژی U سامانه سهم باتری را هم به‌حساب آوریم. این همان کاری است که در رابطه‌ی (۷-۱۶۸) انجام دادیم. بگذارید یک بار دیگر آن را تکرار کنیم. تغییر انرژی سامانه عبارت است از کاری که ما در جابه‌جایی قطعه‌ی دی‌الکتریک انجام می‌دهیم بعلاوه‌ی کاری که باتری انجام می‌دهد تا بارهای اضافی را به خازن منتقل کند (و اختلاف پتانسیل را ثابت نگه دارد).

$$dU=F_S dx+V\,dQ=-F_e dx+V\,dQ \tag{۷-۱۸۲}$$

و از این رابطه نتیجه می‌شود که

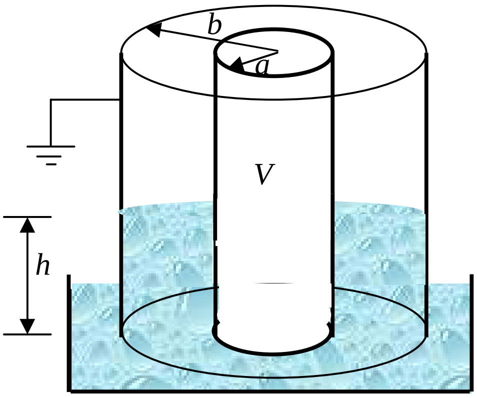
$$F_e=-\frac{dU}{dx}+V\frac{dQ}{dx}=-\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}+V^2\frac{dC}{dx}=\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}=\frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_\circ b\,\chi_e}{d} \tag{۷-۱۸۳}$$

که همان پاسخ رابطه‌ی (۷-۱۸۰)، اما، با علامت درست است. همان‌گونه که در آغاز این بخش گفتیم، نیروی وارد به قطعه‌ی دی‌الکتریک به توزیع بارهای القایی و آزاد بستگی دارد و نمی‌تواند به ثابت بودن V یا Q وابسته باشد.

مثال ۱۸-۷ ارتفاع مایع دی‌الکتریک در خازن استوانه‌ای: دو لوله‌ی دراز فلزی هم‌محور برابر شکل (۷-۴۱) یک خازن استوانه می‌سازند. فرض کنید شعاع استوانه‌ی داخلی a و شعاع استوانه‌ی بیرونی b است. استوانه‌ها را به طور عمودی در ظرفی از روغن دی‌الکتریک با پذیرفتاری χ_e و چگالی جرمی ρ قرار می‌دهیم. استوانه‌ی درونی در پتانسیل ثابت V قرار دارد و

استوانه‌ی بیرونی به زمین وصل است. بنابراین، اختلاف پتانسیل استوانه‌ها مقدار ثابت V است. در فضای بین لوله‌ها روغن تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

حل: این مثال همانند خازن تخت است که دی‌الکتریک به اندازه‌ی x در فضای بین صفحه‌ها قرار داشت و در بالا آن را بررسی کردیم. در اینجا فقط به جای خازن تخت، شکل خازن استوانه‌ای است. بنابراین، مانند مثال خازن تخت، در اینجا هم نخست ظرفیت آرایه را برحسب h حساب می‌کنیم: این آرایه را می‌توان دو خازن استوانه‌ای موازی پنداشت که در یکی دی‌الکتریک وجود دارد و در دیگری خلاء است.



شکل ۴۱–۷ خازن استوانه در روغن دی‌الکتریک

بگذارید این محاسبه را از آغاز انجام دهیم. با استفاده از قانون گوس، در ناحیه‌ی خلاء داریم

$$E = \frac{۲\lambda}{۴\pi\varepsilon_{\circ} r} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{۲\lambda}{۴\pi\varepsilon_{\circ}} \ell n\left(b/a\right) \qquad (۷–۱۸۴)$$

که در آن λ بار در واحد طول قسمت خلاء است. در قسمتی هم که دی‌الکتریک دارد، می‌توان نوشت

$$D = \frac{۲\lambda'}{۴\pi r} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{۲\lambda'}{۴\pi\varepsilon r} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{۲\lambda'}{۴\pi\varepsilon} \ell n\left(b/a\right) \qquad (۷–۱۸۵)$$

چون سطح رسانا هم‌پتانسیل است، اختلاف پتانسیل در دو بخش خازن باید باهم برابر باشد:

$$\frac{۲\lambda}{۴\pi\varepsilon_{\circ}} \ell n\left(b/a\right) = \frac{۲\lambda'}{۴\pi\varepsilon} \ell n\left(b/a\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\varepsilon_{\circ}} = \frac{\lambda'}{\varepsilon} \qquad \therefore \lambda' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\circ}} \lambda = \kappa_e \lambda \qquad (۷–۱۸۶)$$

اگر طول کل لوله ℓ باشد، بار کل خازن عبارت است از

$$Q = \lambda' h + \lambda\left(\ell - h\right) = \kappa_e \lambda h - \lambda h + \lambda \ell = \lambda\left[\left(\kappa_e - 1\right)h + \ell\right] = \lambda\left(\chi_e h + \ell\right) \qquad (۷–۱۸۷)$$

بنابراین، ظرفیت خازن برابر است با

$$C = \frac{Q}{V} = ۴\pi\varepsilon_{\circ} \frac{\lambda\left(\chi_e h + \ell\right)}{۲\lambda\, \ell n\left(b/a\right)} = ۲\pi\varepsilon_{\circ} \frac{\left(\chi_e h + \ell\right)}{\ell n\left(b/a\right)} \qquad (۷–۱۸۸)$$

پس، نیروی رو بالا که میدان الکتریکی به دی‌الکتریک وارد می‌کند برابر است با

$$F_e = \frac{۱}{۲} V^{۲} \frac{dC}{dh} = \frac{V^{۲}\, ۲\pi\varepsilon_{\circ}\chi_e}{۲\, \ell n\left(b/a\right)} \qquad (۷–۱۸۹)$$

این تیرو با نیروی وزن مایع در لوله به ترازمندی می‌رسد. نیروی وزن روغن درون لوله رو به پایین و برابر است با

$$F_g = mg = \rho\pi\left(b^{۲} - a^{۲}\right)gh \qquad (۷–۱۹۰)$$

از برابری $F_e = F_g$ به‌دست می‌آید

$$h = \frac{\varepsilon_{\circ}\chi_e V^{۲}}{\rho\left(b^{۲} - a^{۲}\right)g\ \ell n\left(b/a\right)} \qquad (۷–۱۹۱)$$

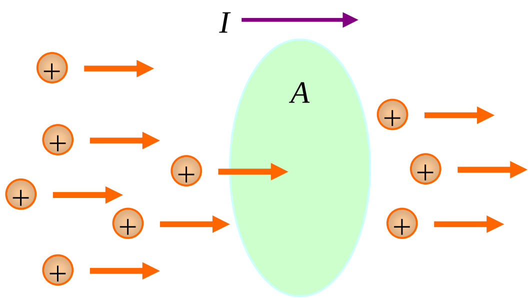
توجه کنید که از این چیدمان می‌توان برای یافتن، پذیرفتاری یا ثابت دی‌الکتریک استفاده کرد.

۸ جریان و مقاومت

۸-۱ جریان الکتریکی

جریان الکتریکی شارش بار الکتریکی است. وقتی حامل‌های بار الکتریکی حرکت کنند، جریان الکتریکی تولید می‌شود. حامل‌های بار الکترون و پروتون‌هایی اند که ممکن است آزاد باشند و یا به اجسام بزرگ‌تری مانند اتم و مولکول وابسته باشند. هنگامی که در باره‌ی جریان الکتریکی سخن می‌گوییم، ماهیت حامل‌های بار برای ما مهم نیست، بلکه بارهای خالص که در اثر حرکت آنها جابه‌جا می‌شوند اهمیت دارد. جریان الکتریکی در یک سیم مقدار باری است که در واحد زمان از یک نقطه‌ی معین سیم می‌گذرد.

در شکل (۸-۱) مجموعه‌ای از بارهای الکتریکی دیده می‌شوند که در جهت **عمود** بر سطح A حرکت می‌کنند. جریان الکتریکی که این بارها تولید می‌کنند با آهنگ گذار آنها از سطح A برابر است. این تعریف جریان الکتریکی است.



شکل ۸-۱ عبور بار از یک سطح

اگر مقدار بار ΔQ در بازه‌ی زمانی Δt از سطحی بگذرند، می‌توانیم برای آنها جریان میانگین I_{avg} تعریف کنیم:

$$I_{\text{avg}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (۸-۱)$$

در یکاهای SI، جریان الکتریکی با آمپر (A) تعریف می‌شود. یک آمپر برابر یک کولمب بر ثانیه است:

$$۱\ \text{A} = ۱\ \text{کولمب/ثانیه} \qquad (۸-۲)$$

جریان‌های الکتریکی بازه‌ی بزرگی را دربر می‌گیرند. آذرخش می‌تواند جریانی از مرتبه‌ی مگا آمپر تولید کند. در عصب‌های بدن انسان، جریان الکتریکی از مرتبه‌ی نانوآمپر است.

اگر در رابطه‌ی (۸-۱) زمان را به صفر میل دهیم، می‌توانیم جریان لحظه‌ای تعریف کنیم. در حد $\Delta t \to ۰$ خواهیم داشت:

$$I \equiv \lim_{t\to ۰} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \qquad (۸-۳)$$

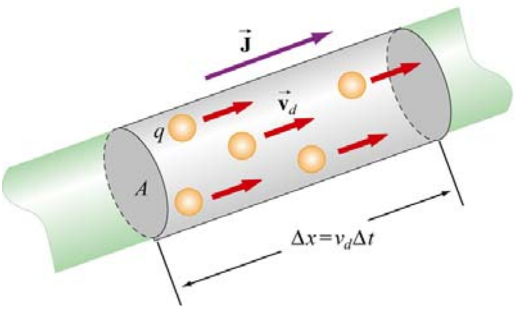
چون شارش بار جهت دارد، بنابراین، جریان الکتریکی هم کمیت جهت‌دار و در نتیجه، یک کمیت برداری است. در این جا به‌طور ضمنی قرارداد می‌کنیم که جهت شارش بارهای مثبت را جهت جریان بنامیم. در یک سیم، الکترون‌های با بار منفی شارش می‌یابند. بنا به قرارداد بالا، این شارش در جهت خلاف جهت جریان است. به بیان دیگر، بارهای منفی که به‌سوی راست حرکت می‌کنند با بارهای مثبتی که به سوی چپ در حرکت اند، هم‌ارز هستند. نکته در این است که جابه‌جایی بار خالص، با توجه به علامت بارها، مهم است. بارهای منفی که به سوی راست حرکت می‌کنند جریانی به سوی چپ تولید می‌کنند. بارهای مثبت هم که به سوی چپ حرکت می‌کنند، جریانی به سوی چپ تولید می‌کنند.

جریان الکتریکی در رساناها: جامدها (فلز، نیمه‌رساناها)در مایع (الکترولیت‌ها) و در گازهای یونیده شارش می‌یابد اما در نارساناها یا عایق‌ها جریان پیدا نمی‌کند.

۸-۲ چگالی جریان

جریان الکتریکی یک کمیت ماکروسکوپی و حرکت بارهای الکتریکی پدیده‌ی میکروسکوپی است. برای این که این دو دنیای متفاوت را به هم مربوط کنیم، بخشی از یک رسانا را در نشر بگیرید که سطح مقطع آن A است. شکل (۸-۲) را ببینید.

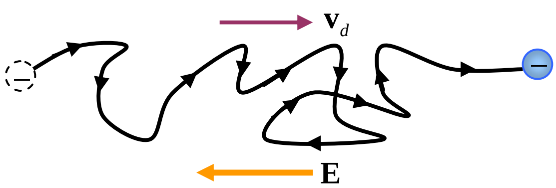
در درون این رسانا حامل‌های بار وجود دارند. فرض کنید بار هر حامل q است و تعداد آنها در واحد حجم رسانا n است. بنابراین، در طول Δx این رسانا به اندازه‌ی $\Delta Q = q\left(n A \Delta x\right)$ بار وجود دارد. اگر حامل‌های بار با سرعت v_d در رسانا حرکت کنند، در زمان Δt مسافت $\Delta x = v_d \Delta t$ را می‌پیمایند. جریان میانگین این بارها از رابطه‌ی (۱-۸) به دست می‌آید. داریم



شکل ۲-۸ نمایش میکروسکوپی شارش بارها

$$I_{\text{avg}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_d A \qquad (۸-۴)$$

سرعت v_d حامل‌های بار *سرعت رانش* (یا سرعت *سوق*)* نامیده می‌شود. از نظر فیزیکی، v_d سرعت میانگین حامل‌های بار در رساناست. برای این که مفهوم آن را بفهمید، رسانایی را در نظر بگیرید که حامل‌های بار آن الکترون‌های آزاد اند. در رسانای منزوی حرکت این الکترون‌ها، مانند حرکت مولکول‌های گاز، کاتوره‌ای است. وقتی بین دو انتهای رسانا اختلاف پتانسیل اعمال بشود (رسانا را مثلا به باتری وصل کنیم) یک میدان الکتریکی در رسانا به‌وجود می‌آید و به الکترون‌ها نیروی الکتریکی وارد می‌شود و در رسانا جریان الکتریکی به‌وجود می‌آید. اما، الکترون‌ها در امتداد رسانا روی یک خط راست حرکت نمی‌کنند، بلکه با اتم‌های رسانا برخورد می‌کنند و جهت سرعتشان تغییر می‌کند. این برخوردهای پی‌درپی سبب می‌شود که مسیر الکترون بسیار پیچیده باشد. الکترون در اثر برخورد با اتم‌ها مقداری انرژی به اتم منتقل می‌کند. انرژی انتقالی به صورت انرژی ارتعاشی اتم و در نتیجه افزایش دمای رسانا ظاهر می‌شود. با وجود این برخوردها، الکترون به آهستگی در امتداد رسانا (در خلاف جهت میدان الکتریکی **E**) با سرعت میانگینی که سرعت رانش v_d نامیدیم، حرکت می‌کند. شکل (۳-۸) حرکت الکترون را در رسانا نشان می‌دهد. مقدار کاری که میدان الکتریکی بر روی الکترون انجام می‌دهد، بیش از مقدار انرژی میانگین است که در اثر برخوردها الکترون از دست می‌دهد. این فزونی کار میدان الکتریکی به جریانی می‌انجامد که در رسانا به‌وجود می‌آید. سرعت رانش خیلی کوچک‌تر از سرعت میانگین بین دو برخورد پی‌درپی است.



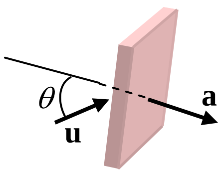
شکل ۳-۸ حرکت الکترون دررسانا، سرعت رانش

اندازه‌ی جریانی که از واحد سطح می‌گذرد از رابطه‌ی (۴-۸) به‌دست می‌آید

$$I_A = nqv_d \qquad (۸-۵)$$

است. این رابطه خیلی محدود کننده است، چون فرض کردیم که بارها به طور عمود از سطح می‌گذرند. اما همان‌گونه که از شکل (۳-۸) پیداست، جهت سرعت حامل‌های بار تغییر می‌کنند و در نتیجه، ممکن است جهت آنها بر سطحی که از آن می‌گذرند، عمود نباشد. بنابراین، بهتر است که آن را به گونه‌ی واقعی‌تری بازنویسی کنیم.

نخست، حالت خاصی را در نظر بگیرید که بردار سرعت همه‌ی الکترون‌ها یکسان و برابر **u** است. فرض کنید بارها از سطح کوچک **a** می‌گذرند. در شکل (۴-۸) یکی از حامل‌های بار نشان داده شده است. بردار سطح **a** جهت‌گیری سطح را نشان می‌دهد. تعداد کل بارهایی که در بازه‌ی زمانی Δt به طور عمود از این سطح می‌گذرند عبارت است از



شکل ۴-۸

* drift velocity

$$\Delta Q = q\left(n\,\mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{x}\right) = q\left(n\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\Delta t\right) \qquad (۸-٦)$$

و در نتیجه، جریان *میانگین* (یا میانگین آهنگ انتقال بار) که از این سطح می‌گذرد

$$I_a = \frac{q\left(n\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\,\Delta t\right)}{\Delta t} = nq\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} \qquad (۸-۷)$$

توجه کنید که ضرب داخلی $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}$ مولفه‌ی عمود بر سطح سرعت را برمی‌گزیند.

حال به حالت عمومی‌تری توجه کنید: فرض کنید حامل‌های بار از گروه‌های مختلفی تشکیل شده است. بار q یا سرعت $\mathbf{u}$ و یا هر دو از یک گروه به گروه دیگر فرق می‌کنند. در این صورت، هر گروه سهم خودش را در جریان گذرنده از سطح $\mathbf{a}$ خواهد داشت. اگر هر گروه را با زیرنویس k مشخص کنیم، بار هر یک ازحامل‌های k امین گروه q_k و بردار سرعت آن $\mathbf{u}_k$ خواهد بود. جریان کل که مجموعه‌ی k گروه تولید می‌کنند، عبارت است از

$$I_a = n_۱q_۱\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_۱ + n_۲q_۲\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_۲ + \cdots = \mathbf{a}\cdot\sum_k n_k q_k \mathbf{u}_k \qquad (۸-۸)$$

جریان گذرنده از واحد سطح را **چگالی جریان** خواهیم نامید. بنابراین، می‌توانیم آن را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{J} = \sum_k n_k q_k \mathbf{u}_k \qquad (۸-۹)$$

در یکاهای SI واحد چگالی جریان آمپر بر مترمربع $\mathrm{A/m^۲}$ یا به‌طور هم‌ارز $\mathrm{C/m^۲\cdot s}$ است.

حال بگذارید فرض کنیم فقط یک نوع حامل بار الکتریکی در وجود دارد. برای روشنی بیشتر فرض کنید، تنها حامل‌های بار الکترون‌ها هستند که با سرعت‌های مختلف حرکت می‌کنند. همان‌طور که گفتم، در یک رسانا سرعت الکترون‌ها توزیع کاتوره‌ای دارند. هم‌اندازه‌ی سرعت آنها و هم جهت‌شان تغییر می‌کند. فرض کنید تعداد الکترون‌ها، با هر سرعتی، در واحد حجم N_e اند. الکترون‌ها را می‌توانیم در گروه‌های زیادی دسته‌بندی کنیم. هر گروه شامل الکترون‌هایی است که اندازه و جهت سرعت‌شان به تقریب یکسان است. سرعت میانگین همه‌ی الکترون‌ها را مثل هر میانگین‌گیری دیگری، از جمع وزنی سرعت‌ها می‌توان حساب کرد. به بیان دیگر، بر روی حاصل ضرب تعداد الکترون‌ها در هر گروه سرعت جمع ببندید و نتیجه را به کل الکترون‌ها تقسیم کنید. به‌دست می‌آید

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{۱}{N_e}\sum_k n_k \mathbf{u}_k \qquad (۸-۱۰)$$

در اینجا برای نشان دادن میانگین از خط تیره بر روی $\mathbf{u}$ استفاده کردیم تا میانگین جهت را نشان دهیم. از مقایسه‌ی رابطه‌های (۸-۹) و (۸-۱۰) دیده می‌شود که می‌توانیم سهم الکترون‌ها در چگالی جریان را برجسب سرعت میانگین الکترون بنویسیم. با توجه به این که بار الکترون را $q = -e$ نامیدیم، سهم الکترون‌ها در چگالی جریان به‌صورت زیر درمی‌اید

$$\mathbf{J}_e = -eN_e\bar{\mathbf{u}}_e \qquad (۸-۱۱)$$

$\bar{\mathbf{u}}$ همان سرعت رانش است که پیش‌تر با $\mathbf{v}_d$ نشان دادیم. ما از هر دو نماد استفاده خواهیم کرد.

رابطه‌ی بالا را برحسب چگالی بار الکترون‌ها هم می‌توان نوشت. چون N_e چگالی الکترون‌هاست و بار هر الکترون برابر $-e$ است، پس $\rho_e = -eN_e$ چگالی بار الکترونی در رسانا است. در نتیجه، $\mathbf{J}_e = \rho_e\mathbf{u}_e$ سهم الکترون‌ها در چگالی جریان است. می‌توانیم سرعت رانش $\mathbf{v}_d$ یا $\bar{\mathbf{u}}_e$ الکترون را در یک رسانا حساب کنیم. به یاد بیاورید که این سرعتی است که الکترون با وجود میدان الکتریکی (یا اختلاف پتانسیل) در رسانا به‌دست می‌آورد. میدان الکتریکی به الکترون نیروی $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ وارد می‌کند. این نیرو به الکترون شتاب می‌دهد. شتابی که الکترون در اثر آن به‌دست می‌آورد برابر است با

$$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{F}}{m}=\frac{-e\mathbf{E}}{m} \tag{۸-۱۲}$$

فرض کنید سرعت یک الکترون درست پس از برخورد با یک یون یا الکترون دیگر، $\mathbf{v}_i$ است. تا برخورد بعدی، الکترون با شتاب $\mathbf{a}$ حرکت می‌کند و درست پیش از برخورد بعدی، سرعتش برابر

$$\mathbf{v}_f=\mathbf{v}_i+\mathbf{a}t=\mathbf{v}_i-\frac{e\,\mathbf{E}}{m_e}t \tag{۸-۱۳}$$

می‌شود. در این جا t زمان بین دو برخورد پی‌درپی است. میانگین $\mathbf{v}_f$ در این بازه‌ی زمانی عبارت است از

$$\langle\mathbf{v}_f\rangle=\langle\mathbf{v}_i\rangle-\frac{e\,\mathbf{E}}{m_e}\langle t\rangle \tag{۸-۱٤}$$

که با سرعت رانش $\mathbf{v}_d$ برابر است. اگر میدان الکتریکی وجود نداشته باشد، سرعت الکترون‌ها کاملا کاتوره‌ای و در نتیجه $\langle\mathbf{v}_i\rangle=0$ است. اگر $\tau=\langle t\rangle$ زمان مشخصه‌ی بین دو برخورد پی درپی (زمان میانگین پویش آزاد) باشد، آنگاه داریم

$$\bar{\mathbf{u}}=\mathbf{v}_d=\langle\mathbf{v}_f\rangle=-\frac{e\,\mathbf{E}}{m_e}\tau \tag{۸-۱۵}$$

و چگالی جریان الکتریکی الکترون، رابطه‌ی (۱۱-۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{J}=-N_e\,e\,\mathbf{v}_d=-N_e\,e\left(\frac{e\,\mathbf{E}}{m_e}\tau\right)=\frac{N_e\,e^2\tau}{m_e}\mathbf{E} \tag{۸-۱٦}$$

توجه کنید که هم برای حامل‌های بار مثبت و هم برای حامل‌های بار منفی، $\mathbf{J}$ و $\mathbf{E}$ هم‌سو اند.

مثال ۱-۸ سرعت رانش در سیم مسی: از سیم مسی با سطح مقطع $۳\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{m}^۲$ جریان $۱۰A$ می‌گذرد. چگالی جرمی مس $۸{,}۹۵\,\mathrm{g/cm}^۳$ است. سرعت رانش الکترون‌ها را در این سیم حساب کنید.

حل: از جدول دوره‌ای عناصر دیده می‌شود که وزن اتمی مس ٦۳٫۵ گرم در هر مول است. تعداد اتم‌های موجود در هر جرم اتمی یک جسم با عدد آووگادرو، $٦{,}۰۲\times۱۰^{۲۳}$ برابر است. چون چگالی جرمی مس را می‌دانیم، می‌توانیم حجمی را که ٦۳٫۵ گرم مس اشغال کرده است، به‌دست آوریم

$$V=\frac{m}{\rho}=\frac{٦۳{,}۵\,\mathrm{g}}{۸{,}۹۵\ \mathrm{g/cm}^۳}=۷{,}۰۹\ \mathrm{cm}^۳ \tag{۸-۱۷}$$

فرض کنید هر اتم یک الکترون آزاد به رسانا می‌دهد. پس تعداد حامل‌های بار (الکترون‌ها) برابر است با

$$\begin{aligned}N_e&=\frac{٦{,}۰۲\times۱۰^{۲۳}\ \mathrm{electron}}{۷{,}۰۹\ \mathrm{cm}^۳}=۸{,}٤۸\times۱۰^{۲۲}\ \frac{\mathrm{electron}}{\mathrm{cm}^۳}\\&=\left(۸{,}٤۸\times۱۰^{۲۲}\ \frac{\mathrm{electron}}{\mathrm{cm}^۳}\right)\left(۱۰^{٦}\ \frac{\mathrm{cm}^۳}{\mathrm{m}^۳}\right)=۸{,}۸\times۱۰^{۲۸}\ \frac{\mathrm{electron}}{\mathrm{m}^۳}\end{aligned} \tag{۸-۱۸}$$

از رابطه‌ی (٤-۸) به‌دست می‌آید

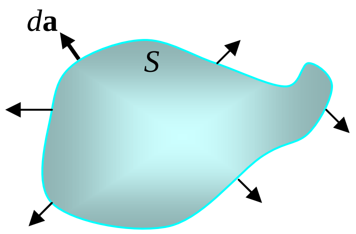
$$v_d=\frac{I}{N_e qA}=\frac{۱۰\ \mathrm{C/s}}{\left(۸{,}٤۸\times۱۰^{۲۸}\ \mathrm{electron/m}^۳\right)\left(۱{,}٦\times۱۰^{-۱۹}\ \mathrm{C}\right)\left(۳\times۱۰^{-٦}\ \mathrm{m}^۲\right)}=۲{,}٤٦\times۱۰^{-٤}\ \mathrm{m/s} \tag{۸-۱۹}$$

۸-۳ جریان پایا و پایستگی بار الکتریکی

در بخش ۸-۲ چگالی جریان را با جریان گذرنده از واحد سطح تعریف کردیم. جریان کل گذرنده از هر سطح S با انتگرال‌گیری از چگالی جریان بر روی سطح به‌دست می‌آید

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۸-۲۰)$$

اگر بردار چگالی جریان $\mathbf{J}$ با زمان تغییر نکند، گوییم **جریان پایا**[♦] داریم. جریان‌های پایا باید از پایستگی بار الکتریکی پیروی کنند. ناحیه‌ای از فضا را درنظر بگیرید که همانند شکل (۸-۵) مرزهایش سطح بسته‌ی S است. انتگرال $\mathbf{J}$ بر روی تمامی سطح S آهنگ نشت بار از درون سطح را به‌دست می‌دهد. اگر بار الکتریکی به طور دایمی از این سطح با حجم محدود خارج شود یا به درون آن واریز شود، چگالی بار در درون سطح باید بینهایت باشد، مگر این که چشمه‌ای پیوسته در درون آن بار تولید کند. اما تولید بار چیزی است که هرگز روی نمی‌دهد. در نتیجه، اگر به راستی توزیع جریانی مستقل از زمان داشته باشیم باید انتگرال سطح $\mathbf{J}$ برای **هر** سطح بسته‌ای صفر باشد. این گزاره با بیان این که در هر نقطه‌ی فضا دیورژانش $\mathbf{J}$ صفر است، کاملا هم‌ارز است. بنابراین، برای هر چگالی جریان پایا می‌توان نوشت



شکل ۸-۵ نشت بار از درون سطح S

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{J} = ۰ \qquad (۸-۲۱)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به چگالی جریان ناپایا تعمیم داد و آن را برای هر چگالی جریان نوشت: فرض کنید چگالی جریان پایا نیست و در نتیجه، به زمان t و مکان (x,y,z) وابسته است. یعنی از نقطه‌ای در فضا به نقطه‌ی دیگر و از زمانی به زمان دیگر تغییر می‌کند. چون $\int_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}$ آهنگ لحظه‌ای نشت بار الکتریکی از سطح بسته‌ی S است، بنابراین، این نشت بار باید به هزینه‌ی کاسته شدن از مقدار بار موجود در درون سطح بسته‌ی S صورت بگیرد. بار کل در **درون** حجم V که سطح S مرزهای آن است، برابر $\int_V \rho d\tau$ است. پس، آهنگ نشت بار با آهنگ کاهش بار کل درون سطح باید برابر باشد. این بدان معنی است که

$$\int_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau \qquad (۸-۲۲)$$

علامت منفی در سمت راست رابطه‌ی (۸-۲۲) به خاطر کاهش بار در درون سطح بسته است. سمت چپ این رابطه را با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{J}\right)d\tau = -\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau \qquad (۸-۲۳)$$

رابطه‌ی بالا برای هر حجمی برقرار است (به بیان دیگر، سطح بسته را سطح خاصی تعریف نکردیم)، از جمله برای سطح بسیار کوچکی حول هر نقطه‌ی (x,y,z) درست است. این به ما اجازه می‌دهد تا آنها را از زیر علامت انتگرال خارج کنیم. بنابراین، رابطه‌ی (۸-۲۳) برای توزیع بار وابسته به زمان به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (۸-۲۴)$$

مشتق زمانی چگالی بار را به صورت پارمشتق نوشتیم، چون ρ علاوه بر این که به زمان بستگی دارد، می‌تواند تابع مکان هم باشد. توجه کنید که اگر وابستگی زمانی وجود نداشته باشد، رابطه‌ی (۸-۲۴) به معادله‌ی (۸-۲۱) برای جریان پایا کاهش پیدا

[♦] steady current

می‌کند. معادله‌های (۲۳-۸) و (۲٤-۸) بیان پایستگی موضعی بار الکتریکی است و **معادله‌ی پیوستگی*** نامیده می‌شود .
معادله‌ی (۲۳-۸) شکل انتگرالی آن و معادله‌ی (۲٤-۸) شکل دیفرانسیلی آن است.
نکته: ما در این بخش از جریان پایا نام بردیم. جریان پایا جریانی است که برای همیشه و با مقدار ثابت از یک نقطه می‌گذرد. بنابراین، اگر تک الکترونی از یک نقطه بگذرد، در آن نقطه جریان به‌وجود می‌آید، اما این جریان پایا نیست، چون در یک لحظه وجود دارد، اما در لحظه‌ی بعدی دیگر نیست.♣

۸-۴ رسانایی الکتریکی و قانون اهم

انتقال بار الکتریکی از یک نقطه به مکان دیگر به روش‌های گوناگون روی می‌دهد. در مولد **ون دوگراف**◊ این کار با تسمه انجام می‌گیرد. ون دوگراف ماشین مولد الکتروستاتیک است و شامل تسمه‌ی عایقی است که بار سطحی حمل می‌کند و در تماس با الکترود دیگری بارهایش را به آن منتقل می‌کند. به این ترتیب، جریان الکتریکی تولید می‌شود. قطره‌های باران که در اثر وزن خود سقوط می‌کنند، بخشی از سامانه‌ی جریان الکتریکی زمین اند. اگر دوست دارید، می‌توانید تصور کنید که ارابه‌های کوچک پر از بار الکتریکی را به پشت موچه‌های زیر بسته اید و موچه‌ها با کشیدن ارابه‌ها بار را جابه‌جا می‌کنند و به این ترتیب جریان الکتریکی تولید می‌شود. در این بخش، ما با عامل آشناتری برای جابه‌جایی بار سروکار خواهیم داشت: نیرویی که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ به بار وارد می‌کند. میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ بار مثبت را در یک جهت و بار منفی را در جهت مخالف به حرکت وامی‌دارد. اگر حامل‌های بارهای مثبت یا منفی و یا هر دو حرکت کنند، جریان الکتریکی در جهت میدان $\mathbf{E}$ پدید می‌آید. در بسیاری از مواد، چگالی جریان به میدان الکتیکی خارجی $\mathbf{E}$ که سبب آن می‌شود، به‌طور خطی بستگی دارد. رابطه‌ی خطی بین میدان $\mathbf{E}$ وچگالی جریان $\mathbf{J}$ معمولا به صورت زیر نوشته می‌شود

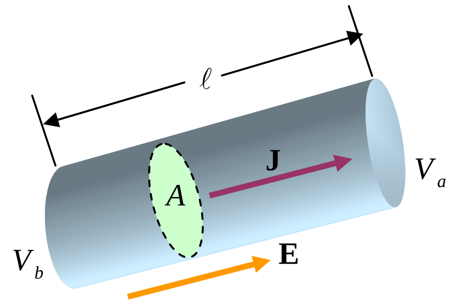
$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad (۸-۲۵)$$

که در آن σ **رسانندگی**† ماده نام دارد. مقدار آن به ماده‌ی مورد نظر بستگی دارد. در رساناهای فلزی مقدارش بسیار بزرگ است و برای مواد نارسانای خوب مقدارش بسیار ناچیز است. مقدار σ به وضعیت فیزیکی، مانند دما هم بستگی دارد، با این حال، مقدار σ به اندازه‌ی میدان $\mathbf{E}$ وابسته نیست. اگر همه چیز را ثابت نگه‌دارید و شدت میدان را دوبرابر کنید، چگالی جریان دوبرابر می‌شود.
رابطه‌ی (۲۵-۸) قانون (میکروسکوپی) اهم نام دارد. ماده‌ای که از این رابطه پیروی کند، ماده‌ی اهمی خوانده می‌شود و در غیر این صورت، غیر اهمی است. از مقایسه‌ی رابطه‌های (۱٦-۸) و (۲۵-۸) دیده می‌شود که می‌توان رسانندگی را به صورت زیر هم نوشت

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m_e} \qquad (۸-۲٦)$$

قانون اهم یک قانون تجربی است و یک قضیه‌ی بنیادی نیست که باید همه‌ی مواد از آن پیروی کنند. اگر میدان الکتریکی خیلی قوی باشد، در هر ماده‌ای ممکن است این قانون نقض شود و ماده از خود رفتار غیر اهمی نشان دهد. با این حال، در بازه‌ی بسیار گسترده‌ای و برای مواد زیادی چگالی جریان با میدان الکتریکی متناسب است و این به راستی چشم‌گیر است.

* continuity equation
◊ Van de Graaff
† conductivity



شکل ٦-٨ رسانای همگن با اختلاف پتانسیل ΔV

برای کاربردهای عملی، بهتر است شکل سودمندتری از قانون اهم به دست بیاوریم. برای این کار بخشی از یک سیم راست به طول ℓ و سطح مقطع A را برابر شکل (٦-٨) در نظر بگیرید. فرض کنید بین دو انتهای اختلاف پتانسیل $\Delta V = V_b - V_a$ اعمال شده است ومیدان الکتریکی **E** و جریان I در سیم به وجود آمده اند. با فرض یکنواخت بودن میدان **E** در سیم، می‌توان نوشت

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E\,\ell \qquad (٨-٢٧)$$

پس، چگالی جریان J به صورت زیر درمی‌آید

$$J = \sigma E = \sigma\left(\frac{\Delta V}{\ell}\right) \qquad (٨-٢٨)$$

از طرفی، چون $J = I/A$ است، اختلاف پتانسیل را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\Delta V = \frac{\ell}{\sigma}J = \left(\frac{\ell}{\sigma A}\right)I = RI \qquad (٨-٢٩)$$

که در آن R **مقاومت رسانا** نام دارد و به صورت زیر تعریف شده است.

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I} = \frac{\ell}{\sigma A} \qquad (٨-٣٠)$$

مقاومت R به شکل و اندازه‌ی رسانا وبه رسانندگی σ ماده بستگی دارد. رابطه‌ی (٨-٣٠) را به صورت زیر بازنویسی کنید

$$\Delta V = IR \qquad (٨-٣١)$$

این رابطه، نسخه‌ی ماکروسکوپی قانون اهم است. یکای R در یکاهای SI اهم (Ω) است. یک اهم عبارت است از

$$١\Omega = \frac{١\ \text{V}}{١\ \text{A}} \qquad (٨-٣٢)$$

باز هم، هر ماده‌ای که از رابطه‌ی (٨-٣٠) پیروی کند، اهمی و در غیر این صورت غیر اهمی است. بیشتر فلزها با رسانایی خوب و مقاومت کم، اهمی اند. توجه ما بیشتر به مواد اهمی خواهد بود.

مقاومت ویژه‌ی ρ ماده با وارون رسانندگی آن تعریف می‌شود

$$\rho \equiv 1/\sigma = m_e\big/\left(n\,e^2\tau\right) \qquad (٨-٣٣)$$

از این رابطه دیده می‌شود که ρ را می‌توان به مقاومت R ماده مربوط کرد

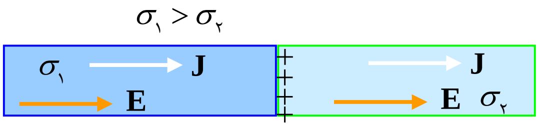
$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{\Delta V/\ell}{I/A} = \frac{RA}{\ell} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{\rho\,\ell}{A} \qquad (٨-٣٤)$$

بنابراین، مقاومت یک سیم با طول آن متناسب و با سطح مقطع نسبت عکس دارد. پس، اگر طول سیم دو برابر شود، مقاومتش هم دو برابر می‌شود. اگر سطح مقطع دو برابر شود، مقاومت به نصف کاهش می‌یابد.

نکته‌ی ١: برای رسیدن به این نتیجه‌ی ساده، از برخی فرض‌های ضمنی استفاده کردیم. به‌جاست که به آنها بپردازم. نخست این که فرض کردیم، چگالی جریان در سطح مقطع سیم یکنواخت توزیع شده است. برای این که ببینید چرا باید چنین باشد، فرض کنید که J در قسمت بالایی سیم بزرگ‌تر از راستای پایینی آن است. در این صورت، میدان الکتریکی هم در سمت بالا

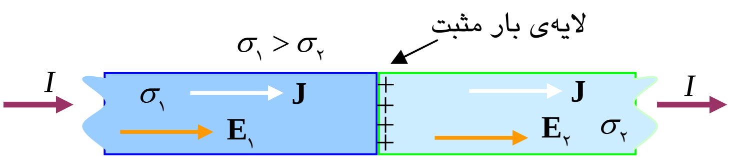
بزرگ‌تر از قسمت پایینی سیم خواهد بود. آنگاه اگر انتگرال خط $\mathbf{E}$ را بین دو انتهای میله حساب کنیم، در یک طرف سیم بزرگ‌تر از طرف دیگرش خواهد شد. و این برای میدان الکتریکی پذیرفتنی نیست.
ما همچنین فرض کردیم که جهت و اندازه‌ی $\mathbf{J}$ در امتداد سیم حالت یکنواختی خود را حفظ می‌کند. درستی یا نادرستی این فرض به رساناهای بیرونی بستگی دارد که جریان را به یک انهای میله منتقل می‌کنند و از انتهای دیگرش آن را به جاهای دیگر می‌برند. به بیان دیگر به اتصال‌های انتهایی بستگی دارد.
فرض سوم این است که میله‌ی ما با ماده‌ی نارسانایی پوشانده شده است. بدون آن حتی نمی‌توانستیم رسانای منزوی و مسیر جریان را تعریف کنیم. توجه کنید که هوا هم یک عایق خوب است.♣

نکته‌ی ۲: اگر در رسانایی σ مقدار ثابتی باشد، شرط جریان پایا، $\vec{\nabla}\cdot\mathbf{J}=\circ$، به همراه قانون اهم، رابطه‌ی (۲۵-۸)، نشان می-دهد که $\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}$ هم باید صفر باشد. این بدان معنی است که چگالی بار در آن ناحیه صفر است (این را از قانون گوس، $\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_\circ$) می‌دانیم. اگر σ از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر رسانا تغییر کند، جریان پایا ممکن است با بارهای ساکن در رسانا همراه باشد. شکل (۷-۸) یک نمونه را نشان می‌دهد. فرض کنید سیمی از دو نوع رسانا با رسانندگی‌های $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ ساخته شده است. اگر جریان پایا باشد، $\mathbf{J}$ در دو سوی سطح تماس رساناها باید یکسان باشد. در غیر این صورت، بار به طور پیوسته در آنجا انباشته خواهد شد. پس، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ باید در دو ناحیه متفاوت و با یک جهش ناگهانی در سطح تماس دو رسانا همراه باشد. از قانون گاوس می‌دانیم که یک چنین گسستگی در $\mathbf{E}$ به معنی وجود لایه‌ای بار در سطح تماس دو رسانا است.♣



شکل ۷-۸ نمای میله‌ای از دو نوع رسانا

مثال ۲-۸ بار الکتریکی در پیوندگاه دو سیم : دو قطعه سیم از دو ماده‌ی متفاوت با رسانندگی‌های $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ و ($\sigma_۲>\sigma_۱$) برابر شکل (۸-۸) به هم وصل شده اند. اگر از پیوندگاه این دو سیم جریان I بگذرد، بار الکتریکی کل را در پیوندگاه این دو سیم حساب کنید.



شکل ۸-۸ بار الکتریکی در پیوندگاه

حل: در حالتی که جریان پایا ست، مولفه‌ی عمودی چگالی جریان $\mathbf{J}$ باید در هر دو سوی سطح پیوندگاه یکسان باشد. چون $J=\sigma E$ است، پس داریم $\sigma_۱E_۱=\sigma_۲E_۲$ و یا

$$E_۲=\left(\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲}\right)E_۱ \qquad (۸-۳۰)$$

بار کل موجود در سطح تماس را q_{in} بنامید. با استفاده از قانون گوس داریم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=(E_۲-E_۱)A=\frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_\circ} \quad\Rightarrow\quad E_۲-E_۱=\frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_\circ A} \qquad (۸-۳۶)$$

با جاگذاری از رابطه‌ی (۳۵-۸) به‌دست می‌آید

$$q_{\text{in}}=\varepsilon_\circ AE_۱\left(\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲}-۱\right)=\varepsilon_\circ A\sigma_۱E_۱\left(\frac{۱}{\sigma_۲}-\frac{۱}{\sigma_۱}\right) \qquad (۸-۳۷)$$

چون جریان برابر $I = JA = (\sigma_1 E_1)A$ است، پس مقدار کل بار در سطح تماس دو سطح عبارت است از

$$q_{\text{in}} = \varepsilon_{\circ} I\left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}\right) \qquad (۸-۳۸)$$

مقاومت ویژه‌ی مواد با دما، T، تغییر می‌کند. برای فلزها این تغییر در بازه‌ی بزرگی از T خطی است

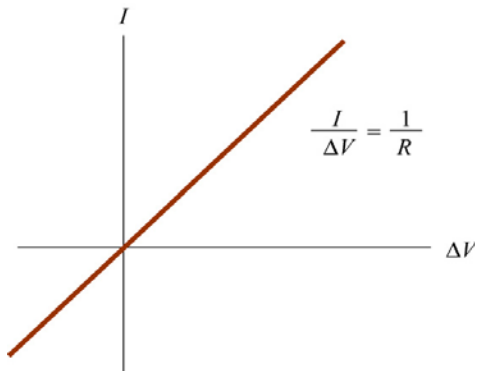
$$\rho = \rho_{\circ}\left[1+\alpha\left(T - T_{\circ}\right)\right] \qquad (۸-۳۹)$$

α ضریب *مقاومت دمایی* است. در جدول زیر مقدارهای ρ، σ و α (در دمای $20^{\circ}\,\mathrm{C}$) برای مواد مختلف دیده می‌شود.

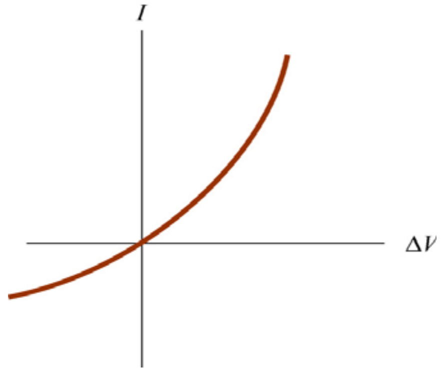
ماده	مقاومت ویژه ρ $(\Omega\cdot\mathrm{m})$	رسانش σ $(\Omega\cdot\mathrm{m})^{-1}$	ضریب دمایی α $(^{\circ}\mathrm{C})^{-1}$
عناصر			
نقره	$1{,}59\times10^{-8}$	$6{,}29\times10^{7}$	۰٫۰۰۳۸
مس	$1{,}72\times10^{-8}$	$5{,}81\times10^{7}$	۰٫۰۰۳۹
آلومینیوم	$2{,}82\times10^{-8}$	$3{,}55\times10^{7}$	۰٫۰۰39
تنگستن	$5{,}6\times10^{-8}$	$1{,}8\times10^{7}$	۰٫۰۰۴۵
آهن	$10{,}0\times10^{-8}$	$1{,}0\times10^{7}$	۰٫۰۰۵
پلاتینیوم	$10{,}6\times10^{-8}$	$1{,}0\times10^{7}$	۰٫۰۰۳۹
آلیاژها			
برنز	7×10^{-8}	$1{,}4\times10^{7}$	۰٫۰۰۲
نایکروم	100×10^{-8}	$0{,}1\times10^{7}$	۰٫۰۰۰۴
نیم‌رساناها			
کربن(گرفیت)	$3{,}5\times10^{-5}$	$2{,}9\times10^{4}$	−۰٫۰۰۰۵
ژرمنیوم (خالص)	۰٫۴۶	۲٫۲	−۰٫۰۴۸
سیلیکون (خالص)	۶۴۰	$1{,}6\times10^{-3}$	−۰٫۰۷۵
عایق‌ها			
شیشه	$10^{10}-10^{14}$	$10^{-14}-10^{-10}$	
کوارتز	75×10^{16}	$1{,}33\times10^{-18}$	

همان‌گونه که گفتیم در مواد اهمی، مانند مس، رابطه‌ی بین شدت جریان I و اختلاف پتانسیل ΔV در بازه‌ی بزرگی از اختلاف پتانسیل‌ها، خطی است. در نمودار شکل (۸-۹) این رفتار نشان داده شده است. شیب خط I برحسب ΔV در ناحیه‌ی خطی، مقدارمقاومت R را به‌دست می‌دهد. در مواد غیر اهمی، نمودار جریان برحسب اختلاف پتانسیل همانند نمودار شکل (۸-۱۰) غیر خطی است. یکی از ابزار معمول نیمه‌رسانا که تابع I نسبت به ΔV غیر خطی است، دوسو کننده یا دیود است و نمودار شکل (۸-۱۰) مربوط به آن است. مقاومت موثر این وسیله (که با وارون شیب خم متناسب است) برای جریان در یک سو (در سوی $\Delta V > 0$) اندک و برای جریان‌های در سوی دیگر (در سوی $\Delta V < 0$) بزرگ است. در بیشتر ابزار الکترونیکی مدرن،

مانند ترانزیستورها، رابطه‌ی جریان و اختلاف پتانسیل غیرخطی است.



شکل ۹–۸ نمودار I برحسب ΔV در مواد اهمی



شکل ۱۰–۸ نمودار I برحسب ΔV در مواد غیراهمی

گروهی از فلزها و ترکیب‌ها وجود دارند که مقاومت‌شان در دماهای کمتر از یک دمای خاص، T_c، به نام **دمای بحرانی**[†] صفر می‌شود. این مواد **ابررسانا** نام دارند. مقاومت این مواد در دماهای بالاتر از دمای بحرانی T_c همانند رفتار فلز معمولی است. وقتی دما به T_c و پایین‌تر می‌رسد، مقاومت به طور ناگهانی صفر می‌شود. این رفتار در سال ۱۹۱۱ توسط فیزیک‌دان آلمانی اچ. کمرلینگ اونِس[*] در جیوه کشف شد. جیوه در دمای کم‌تر از $٤,٢^\circ K$ ابررسانا می‌شود.

امروزه، هزاران ابررسانا شناخته شده اند که دمای بحرانی برخی از آنها $۲۳^\circ K$ (آلیاژی از نایوبیم، آلومینیوم و ژرمانیوم) است. فلزهای معمولی مانند آلومینیوم، روی، سرب و اینیدیم خاصیت ابررسانایی دارند. دمای بحرانی T_c نسبت به ترکیب شیمیایی، فشار و ساختار بلوری ماده بستگی دارد. جالب است بدانید که نقره، مس و طلا که رساناهای بسیار خوبی اند، رفتار ابررسانایی از خود نشان نمی‌دهند.

یکی از ویژگی‌های بسیار چشمگیر ابررسانا این است که وقتی جریان الکتریکی در آن برقرار شد، *بدون اعمال اختلاف پتانسیل* این جریان در ابررسانا پابرجا می‌ماند؛ چون $R = ۰$ است. در واقع دیده شده است که بدون اعمال پتانسیل، جریان مانا در ابررساناها برای سال‌ها باقی می‌ماند! ویژگی دیگر ابرساناها این است که در طول گذار از رسانای معمولی به ابررسانایی، میدان مغناطیسی از گوشت آن رانده می‌شود.

یکی از کابردهای مهم ابررساناها، ساختن آهن‌رباهای ابررساناست. در این آهن‌رباها، شدت میدان مغناطیسی حدود ۱۰ برابر بزرگ‌تر از شدت میدان آهن‌رباهای الکترومگنت معمولی است. اندیشه‌ی استفاده از ابررسانا در خطهای انتقال نیرو مورد توجه بسیار است. از آهن‌رباهای ابررسانا می‌توان برای انبار کردن انرژی استفاده کرد. ابزار الکترونیکی مدرن ابررسانا از دو لایه‌ی نازک ابررسانا که با لایه‌ی نازک عایق از هم جدا شده می‌شوند، ساخته شده اند. برخی از این ابزار، آهن‌رباسنج (وسیله‌ای برای اندازه‌گیری شدت میدان مغناطیسی)، کلیدهای فوق سریع کامپیوتری و ابزار ریزموج اند.

مثال ۳–۸ مقاومت سیم نایکروم: **(الف)** مقاومت در واحد طول سیم نایکروم با شعاع قاعده‌ی $۰,۳۲۱\ mm$ را حساب کنید.
(ب) اگر اختلاف پتانسیل دو سر یک متر از این سیم ۱۰ ولت باشد، جریان گذرنده از سیم را به‌دست آورید.

[†] critical temperature
[*] H. Kamerlingh Onnes

حل : **(الف)** سطح مقطع سیم برابر $A=\pi r^{2}=\pi\left(0{,}321\times10^{-3}\ \text{m}\right)^{2}=3{,}23\times10^{-7}\ \text{m}^{2}$ است. از جدول بالا می‌دانیم که مقاومت ویژه‌ی نایکروم $1{,}5\times10^{-8}\ \Omega$ است. بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی (۳۴-۸) داریم

$$\frac{R}{\ell}=\frac{\rho}{A}=\frac{1{,}5\times10^{-8}\ \Omega}{3{,}24\times10^{-7}\ \text{m}^2}=4{,}6\ \ \Omega/\text{m} \qquad (8-40)$$

(ب): مقاومت یک متر از این سیم $4{,}6\ \Omega$ است. از قانون اهم داریم

$$I=\frac{V}{R}=\frac{10\ \text{V}}{4{,}6\ \Omega}=2{,}2\ \text{A} \qquad (8-41)$$

توجه کنید که مقاومت سیم نایکروم حدود ۱۰۰ برابر مقاومت سیم مسی است. بنابراین، مقاومت در واحد طول یک سیم مسی با همان شعاع فقط $0{,}052\ \Omega$ است. پس، برای این که همان جریان $2{,}2\text{A}$ از یک سیم مسی یک متری با همان شعاع بگذرد، فقط به اختلاف پتانسیل $0{,}11\text{V}$ نیاز است. از نایکروم به خاطر مقاومت زیادش و مقاوم بودنش در برابر اکسیدی شدن در اتو، آب‌گرم کن و بخاری برقی استفاده می‌شود.

مثال ۴-۸ دماسنج مقاومتی پلاتینیوم: مقاومت یک دماسنج مقاومتی پلاتینیوم در دمای $20^\circ\ \text{C}$ برابر 50Ω است. اگر این دماسنج را در ظرفی از اینیدیم در حال ذوب قرار دهیم، مقاومت آن به $76{,}5\Omega$ افزایش پیدا می‌کند. از این داده‌ها استفاده کنید و نقطه‌ی ذوب اینیدیم را به‌دست آورید. ضریب دمایی پلاتینیوم $\alpha=3{,}92\times10^{-3}\left(\text{C}^\circ\right)^{-1}$ است .

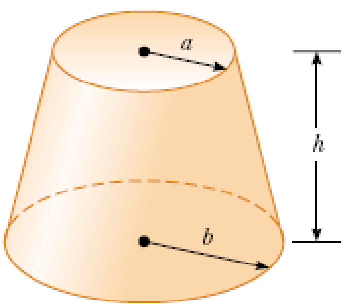
حل: از رابطه‌ی (۳۵-۸) داریم

$$R=R_\circ\left[1+\alpha\left(T-T_\circ\right)\right]\ \Rightarrow\ \Delta T=T-T_\circ=\frac{R-R_\circ}{\alpha R_\circ}$$

$$\Rightarrow\quad \Delta T=\frac{76{,}8\ \Omega-55{,}0\ \Omega}{\left[3{,}92\times10^{-3}\left(\text{C}^\circ\right)^{-1}\right]\left(55{,}0\ \Omega\right)}=137\ \text{C}^\circ \qquad (8-42)$$

چون $\Delta T=T-T_\circ$ و $T_\circ=20^\circ\ \text{C}$ است، پس $T=157\ \text{C}^\circ$

مثال ۵-۸ مقاومت مخروط ناقص: مخروط ناقصی برابر شکل (۱۱-۸) از ماده‌ای با مقاومت ویژه‌ی ρ را در نظر بگیرید. ارتفاع این مخروط h و شعاع قاعده‌های آن a و b اند. اگر جریان در سطح مقطع مخروط به طور یکنواخت توزیع شود، مقاومت بین دو انتهای آن را حساب کنید.

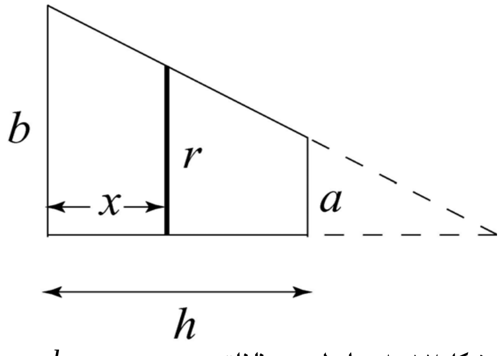


شکل ۱۱-۸ مخروط ناقص

حل: در فاصله‌ی x از قاعده‌ی سمت چپ، قرصی به شعاع r در نظر بگیرید. با توجه به شکل(۱۱۲-۸) داریم

$$\frac{b-r}{x}=\frac{b-a}{h}\Rightarrow r=\left(a-b\right)\frac{x}{h}+b \qquad 8-43)$$

از سوی دیگر $R=\rho\ell/A$ است که در آن ℓ طول رسانا و A سطح مقطع اند. سهم قرصی با ضخامت dx در مقاومت عبارت است از



شکل۱۲-۸ رابطه‌ی مثلثاتی بین r ، a و b

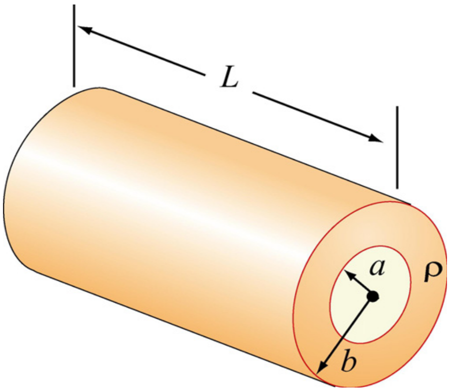
$$dR=\frac{\rho dx}{\pi r^{2}}=\frac{\rho dx}{\pi\left[b+(a-b)x/h\right]^{2}} \tag{۸-۴۴}$$

اگر از این رابطه انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$R=\int_{0}^{h}\frac{\rho dx}{\pi\left[b+(a-b)x/h\right]^{2}}=\frac{\rho h}{\pi ab} \tag{۸-۴۵}$$

برای این انتگرال‌گیری از قاعده‌ی زیر استفاده کردیم

$$\int\frac{du}{(\alpha u+\beta)^{2}}=-\frac{1}{\alpha(\alpha u+\beta)} \tag{۸-۴۶}$$



شکل ۱۳-۸ پوسته‌ی استوانه‌ای

مثال ۶-۸ مقاومت پوسته‌ی استوانه‌ای: پوسته‌ی استوانه‌ای با شعاع داخلی a وشعاع بیرونی b و طول L و مقاومت ویژه‌ی ρ را برابر شکل (۱۳-۸) در نظر بگیرید.

(الف): اختلاف پتانسیلی بین دو انتهای آن اعمال می‌شود و جریان الکتریکی به موازات محور استوانه جریان پیدا می‌کند. مقاومت سامانه چیست؟

(ب): اگر اختلاف پتانسیل بین سطح درونی و سطح بیرونی پوسته اعمال شود و جریان الکتریکی در راستای شعاعی و روبه بیرون شارش یابد. مقاومت سامانه در این حالت چیست؟

حل: **(الف)** در این حالت، سطح مقطع برابر $A=\pi\left(b^{2}-a^{2}\right)$ است. بنابراین، مقاومت عبارت است از

$$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{\rho L}{\pi\left(b^{2}-a^{2}\right)} \tag{۸-۴۷}$$

(ب): استوانه‌ی نازکی با شعاع داخلی آن r و شعاع بیرونی $r+dr$ و طولش L را در نظر بگیرید سهم این استوانه در مقاومت سامانه عبارت است از

$$dR=\frac{\rho d\ell}{A}=\frac{\rho dr}{2\pi rL} \tag{۸-۴۸}$$

که در آن $A=2\pi rL$ سطح عمود بر جهت جریان است. مقاومت کل با انتگرال‌گیری از این رابطه به‌دست می‌آید

$$R=\int_{a}^{b}\frac{\rho dr}{2\pi rL}=\frac{\rho}{2\pi L}\ell n\left(\frac{b}{a}\right) \tag{۸-۴۹}$$

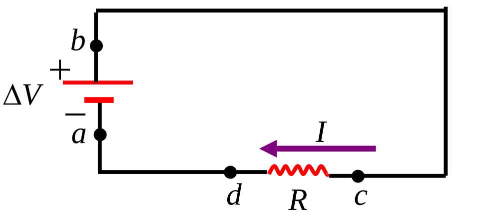
۵-۸ مدار الکتریکی

ابزار الکتریکی معمولا دو پایانه دارند و سیم‌های حامل جریان را می‌توان به آنها وصل کرد. بارهای الکتریکی در مسیر بین این دو پایانه به درون ابزار و یا از ابزار به بیرون شارش می‌یابند. اگر دو و فقط دو پایانه با سیم به چیزی (مانند باتری) در بیرون آن وصل شود و جریان پایا در آن برقرار شود به طوری که اختلاف پتانسیل در همه‌جا ثابت بماند، جریان الکتریکی در دو

پایانه باید برابر و در خلاف جهت هم باشد. در این صورت می‌توانیم از جریان I که از ابزار می‌گذرد و اختلاف پتانسیل V بین دو پایانه‌ی آن سخن بگوییم. نسبت V/I به ازای جریان معین، عددی با یکای مقاومت است. اگر همه‌ی قسمت‌های سامانه که جریان از آنها می‌گذرد، از قانون اهم پیروی کنند، این عدد یک مقدار ثابت و مستقل از I خواهد بود. این عدد رفتار الکتریکی ابزار در برابر جریان پایا را بین دو پایانه‌ی آن به طور کامل توصیف می‌کند. به بیان دیگر، به هر وسیله‌ی الکتریکی می‌توان یک عدد، یک مقاومت، نسبت داد و در مدار الکتریکی آن را با نماد مقاومت (WWW) نشان داد. بنابراین، هر مدار یا شبکه‌ی الکتریکی مجموعه‌ای از این اجزاء است که به یکدیگر وصل اند.
در شبکه‌ای با چندین جزء، مدار همواره می‌توان دو نقطه را به عنوان پایانه برگزید و اجزایی را که در بین این دو پایانه قرار دارند، با یک جزء همارز (مقاومت معادل) جایگزین کرد. به این ترتیب می‌توان شبکه‌ی پیچیده‌ی بین دو پایانه را به یک مقاومت معادل کاهش داد. اما همواره یک قاعده‌ی بسیار مهم را باید در نظر داشت: فقط اندازه‌گیری **جریان مستقیم** مجاز است. یعنی جریان و میدان الکتریکی باید مستقل از زمان باشند. در واقع، اگر جریان و میدان الکتریکی (یا اختلاف پتانسیل بین دو پایانه) به زمان بستگی داشته باشند، رفتار جزء مدار ممکن است افزون بر مقاومت آن، به عناصر دیگری هم بستگی داشته باشد. با این حال، مفهوم مدار هم‌ارز (مدار معادل) را می‌توان به مدارهایی که جریان و اختلاف پتانسیل در آنها با زمان تغییر می‌کنند، تعمیم داد. در واقع، بیشترین سودمندی مدار هم‌ارز در این گونه شبکه‌هاست. اما هنوز ما آماده‌ی بررسی آن نیستیم. این موضوعی است که در فصل ١٤ به آن خواهیم پرداخت.

٣-٨ انرژی و توان الکتریکی

اگر از یک باتری برای برقراری جریان الکتریکی در یک رسانا استفاده کنیم، انرژی شیمیایی باتری به طور پیوسته به انرژی جنبشی الکترون‌ها و انرژی درونی رسانا تبدیل می‌شود و دمای رسانا افزایش می‌یابد.
در هر مدار الکتریکی، انرژی از یک منبع، مانند باتری، به ابزاری که در مدار قرار دارد، مانند لامپ روشنایی یا رادیو، منتقل می‌شود. در اینجا می‌خواهیم آهنگ انتقال این انرژی را حساب کنیم.
مدارساده‌ی شکل (١٤–٨) را در نظر بگیرید که از یک باتری و مقاومت R تشکیل شده است. مقاومت R را می‌توانید نماینده‌ی لامپ، رادیو، یا هر ابزار دیگری فرض کنید. سیم‌هایی که باتری و مقاومت را به هم وصل می‌کنند، مقاومت دارند و در نتیجه، بخشی از انرژی به آنها منتقل می‌شود. ما فرض خواهیم کرد که سیم‌های اتصال در مدار مقاومت ندارند و انرژی به آنها منتقل نمی‌شود.



شکل ١٤–٨ مداری با یک باتری و یک مقاومت

فرض کنید بار مثبت Δq در مدار شکل (١٤–٧) ساعتگرد می‌گردد و از نقطه‌ی a حرکت می‌کند، از درون باتری می‌گذرد و به نقطه‌ی b می‌رسد. پس از پیمودن مدار و گذار از مقاومت R دوباره به نقطه‌ی a می‌رسد. کل مدار را یک سامانه درنظر بگیرید. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی a و b برابر $\Delta V = V_b - V_a > 0$ است. وقتی بار Δq، با گذار از باتری، از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b می‌رود، انرژی پتانسیل الکتریکی سامانه به اندازه‌ی $\Delta U = (\Delta q)(\Delta V)$ افزایش پیدا می‌کند و به همان اندازه از انرژی شیمیایی باتری کاسته می‌شود. وقتی بار بین نقاط c و d از مقاومت R می‌گذرد در اثر برخورد با اتم‌های مقاومت، انرژی پتانسیل الکتریکی خود را از دست می‌دهد. این انرژی به انرژی ارتعاشی تم‌های مقاومت تبدیل می‌شود. چون فرض

کردیم که سیم‌های اتصال مقاومت ندارند، به بخش‌های bc و da مدار انرژی منتقل نمی‌شود. هنگامی که بار Δq به نقطه‌ی a می‌رسد، همان مقدار انرژی دارد که در هنگام رهسپار شدن از آن نقطه داشت. نتیجه‌ی نهایی این فرایند انتقال بخشی از انرژی شیمیایی باتری به مقاومت است. این انرژی در مقاومت به‌صورت انرژی درونی (انرژی ارتعلشی اتم‌های آن و در نتیجه، افزایش دما) ظاهر می‌شود. معمولا مقاومت با هوا تماس دارد و افزایش دما سبب می‌شود که این انرژی به‌صورت گرما به هوا منتقل شود. افزون بر این، مقاومت تابش‌های گرمایی گسیل می‌کند و بخشی از انرژی به این ترتیب از سامانه‌ی ما خارج می-شود. پس از گذشت مدت زمانی، دمای مقاومت به حالت ترازمندی می‌رسد. از این هنگام به بعد، انرژی دریافتی از باتری با انرژی گرمایی و تابشی مقاومت برابر می‌شود. سامانه با گذار بار Δq از مقاومت انرژی از دست می‌دهد. آهنگ از دست رفتن انرژی در مقاومت برابر است با

$$P=\frac{\Delta U}{\Delta t}=\left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right)\Delta V \;=I\;\Delta V \qquad (۸-۵۰)$$

که در آن I جریان در مدار است. وقتی بار از باتری می‌گذرد، سامانه این مقدار انرژی پتانسیل را به هزینه‌ی کاسته شدن از انرژی شیمیایی باتری دوباره به‌دست می‌آورد. بنابراین، با آهنگی که سامانه، در اثر گذار بار از مقاومت، انرژی پتانسیل از دست می‌دهد با آهنگی که سامانه انرژی شیمیایی از باتری می‌گیرد، برابر است. به بیان دیگر، آهنگ از دست دادن انرژی پتانسیل الکتریکی در مقاومت با توانی که باتری فراهم می‌کند، برابر است.

چون $\Delta V \;=IR$ است، رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$P=I\left(\Delta V\right)=I\left(IR\right)=I^{۲}R=\left(\Delta V\right)^{۲}\big/R \qquad (۸-۵۱)$$

اگر یکای جریان آمپر، اختلاف پتانسیل برحسب ولت و مقاومت برحسب اهم باشد، در سامانه‌ی یکاهای SI یکای توان برحسب وات (W) است. دررابطه‌ی (۸-۵۱) P توانی است که در مقاومت R به صورت گرما تلف می‌شود و **گرمای ژول*** نامیده می‌شود (اگرچه یکای آن انرژی در واحد زمان یا یکای توان است).

باتری یا هر وسیله‌ای که انرژی الکتریکی فراهم می‌کند، منبع نیروی محرکه نامیده می‌شود. در فصل ۱٤ یک بار دیگر با جزییات بیشتر به قانون اهم خواهیم پرداخت و مفهوم نیروی محرکه را بازگشایی خواهیم کرد.

مثال ۷-۸ توان آب‌گرم کن برقی: یک آب‌گرم کن برقی از سیم نایکروم با مقاومت کل $۱٦\ \Omega$ تشکیل شده است و به اختلاف پتانسیل ۲۲۰ ولت وصل است. جریان گذرنده از سیم و توان آب‌گرم کن را حساب کنید.

حل: چون $\Delta V \;=IR$ است، پس داریم

$$I=\frac{\Delta V}{R}=\frac{۲۲۰\ \text{V}}{۱٦\ \Omega}=۱۳{,}۸\ \text{A} \qquad (۸-۵۲)$$

$$\text{P}=\text{I}^2R=(۱۲{,}۸\ \text{A})^{۲}(۱٦\ \Omega)=۳{,}۰٤\ \ \text{kW} \qquad (۸-۵۳)$$

مثال ۸-۸ سرعت رانش یون‌های آب دریا: مقاومت ویژه‌ی آب دریا حدود $۲۵\ \Omega\cdot\text{cm}$ است. حامل‌های بار یون‌های Na^+ و Cl^- اند. فراوانی هر یک از این یون‌ها ۳×۱۰^{۲۰} در هر سانتی‌متر مکعب است. اگر یک لوله‌ی پلاستیکی به طول دو متر را از آب

* Joule heating

دریا پر کنیم و در انتهای لوله دو الکترود قرار دهیم که به یک باتری ۱۲ ولت وصل اند، میانگین سرعت رانش یون‌ها برحسب cm/s چیست؟

حل: جریان الکتریکی در رسانایی با سطح مقطع A با رابطه‌ی (۸-۴) به‌صورت $I = enAv_d$ به سرعت رانش v_d مربوط است که در آن n تعداد بارها در واحد حجم است. بنابراین، قانون اهم را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$V = IR = (neAv_d)\left(\frac{\rho\ell}{A}\right) = nev_d\rho\ell \quad \Rightarrow \quad v_d = \frac{V}{ne\rho\ell} \tag{۸-۵۴}$$

که با جاگذاری مقادیر عددی خواهیم داشت

$$v_d = \frac{۱۲\ \mathrm{V}}{(۶\times۱۰^{۲۰}/\mathrm{cm}^3)(۱{,}۶\times۱۰^{-۱۹}\ \mathrm{C})(۲۰\Omega\times\mathrm{cm})(۲۰۰\ \mathrm{cm})} = ۲{,}۵\times۱۰^{-۵}\ \frac{\mathrm{V\cdot cm}}{\mathrm{C}\times\Omega} = ۲{,}۵\times۱۰^{-۵}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \tag{۸-۵۵}$$

توجه کنید که در تبدیل واحدها از رابطه‌ی زیر استفاده کردیم

$$\frac{\mathrm{V}}{\Omega\cdot\mathrm{C}} = \left(\frac{\mathrm{V}}{\Omega}\right)\frac{۱}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} = \mathrm{s}^{-۱} \tag{۸-۵۶}$$

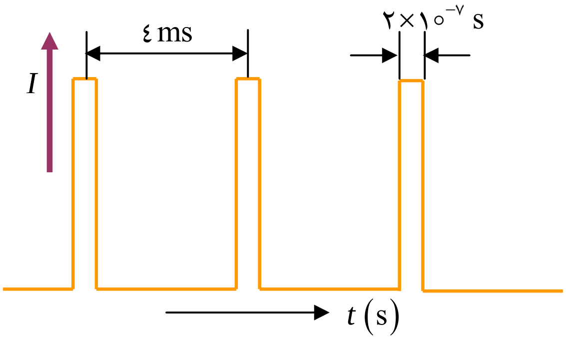
مثال ۹-۸ شتاب‌دهنده: یک شتاب‌دهنده‌ی ذرات الکترون‌های با انرژی ۴۰MeV تولید می‌کند ($۱\mathrm{MeV} = ۱{,}۶۰\times۱۰^{-۱۳}\ \mathrm{J}$). الکترون‌ها به صورت باریکه‌ی پایا و پیوسته تولید نمی‌شوند، بلکه تپ‌هایی با آهنگ ۲۵۰ در ثانیه تولید می‌شوند. یعنی بین دو تپ پی‌درپی یک فاصله‌ی زمانی ۴ میلی ثانیه وجود دارد. هر تپ به مدت ۲ نانوثانیه دوام می‌آورد. الکترون‌های هر تپ جریان ۲۵۰mA تولید می‌کنند. بین دو تپ، جریان وجود ندارد. شکل (۸-۱۵) را نگاه کنید.

(الف): در هر تپ، چند الکترون وجود دارد؟

(ب): جریان میانگین که شتاب‌دهنده تولید می‌کند، چیست؟

(پ): بیشینه توانی را که باریکه‌ی الکترون منتقل می‌کند، چقدر است؟

(ت): بیشینه میانگین که باریکه‌ی الکترون منتقل می‌کند، چقدر است؟



شکل ۸-۱۵ جریان برحسب زمان برای باریکه‌ی تپی

حل (الف): از $I = dq/dt$ استفاده کنید. اگر از $dq = Idt$ انتگرال بگیرید، بار کل در هر تپ به‌دست می‌آید. توجه کنید که در مدت زمانی که تپ وجود دارد، جریان مقدار ثابتی است. بنابراین،

$$Q_{\text{pulse}} = I\int dt = I\Delta t = (۲۵۰\times۱۰^{-۳}\ A)(۲۰۰\times۱۰^{-۹}\ \mathrm{s}) = ۵\times۱۰^{-۸}\ \mathrm{C} \tag{۸-۵۷}$$

اگر این مقدار را به بار یک الکترون تقسیم کنیم، تعداد الکترون‌های هر تپ به‌دست می‌آید

$$N_e = \frac{۵\times۱۰^{-۸}\ \mathrm{C/pulse}}{۱{,}۶۰\times۱۰^{-۱۹}\ \mathrm{C/electron}} = ۳{,}۱۳\times۱۰^{۱۱}\ \mathrm{electron/pulse} \tag{۸-۵۸}$$

(ب): جریان میانگین $I_{\text{av}} = \Delta q/\Delta t$ است. بازه‌ی زمانی بین تپ‌ها ۴ میلی ثانیه و بار هر تپ $۵\times۱۰^{-۸}\ \mathrm{C}$ است. در نتیجه،

$$I_{av} = \frac{۵\times۱۰^{-۸}\ \mathrm{C}}{۴\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{s}} = ۱۲{,}۵\mu\mathrm{A} \tag{۸-۵۹}$$

این تنها ۰٫۰۰۵ ٪ جریان بیشینه‌ی $۲۰۰\,\text{mA}$ است.

(**پ**): بنا به تعریف، توان یعنی انرژی در واحد زمان. بنابراین، توان بیشینه مقدار انرژی هر تپ تقسیم بر زمان تداوم تپ است:

$$P_{\text{Max}}=\frac{\left(۳٫۱۳\times ۱۰^{۱۱}\ \text{electrons/pulse}\right)\left(۴۰\,\text{MeV/electron}\right)}{۲\times ۱۰^{-۷}\ \text{s/pulse}}\times\left(\frac{۱٫۶\times ۱۰^{-۱۳}\ \text{J}}{۱\,\text{MeV}}\right)=۱\times ۱۰^{۷}\ \text{W}=۱۰\,\text{MW} \qquad (۸-۶۰)$$

توان را می‌توانستیم مستقیم هم حساب کنیم. فرض کنید پیش از شتاب پیدا کردن، انرژی هر الکترون صفر است. بنابراین، هر الکترون باید از یک اختلاف پتانسیل $۴۰\,\text{MV}$ بگذرد تا انرژی اش به $۴۰\,\text{MeV}$ برسد. در نتیجه،

$$P_{\max}=I_{\max}\Delta V=\left(۲۰۰\times ۱۰^{-۳}\ \text{A}\right)\left(۴۰\times ۱۰^{۶}\ \text{V}\right)=۱۰\,\text{MW} \qquad (۸-۶۱)$$

(**ت**): به‌جای استفاده از زمان تداوم تپ، از بازه‌ی زمانی بین دو تپ استفاده کنید:

$$P_{\text{av}}=\frac{\left(۳٫۱۳\times ۱۰^{۱۱}\ \text{electrons/pulse}\right)\left(۴۰\,\text{MeV/electron}\right)}{۴\times ۱۰^{-۷}\ \text{s/pulse}}\times\left(\frac{۱٫۶\times ۱۰^{-۱۳}\ \text{J}}{۱\,\text{MeV}}\right)=۵۰۰\,\text{W} \qquad (۸-۶۲)$$

یا اگر خواستید مستقیم آن را حساب کنید، از جریان میانگین که در قسمت (ب) به‌دست آوردید، استفاده کنید.

$$P_{\text{av}}=I_{\text{av}}\Delta V=\left(۱۲٫۵\times ۱۰^{-۶}\ \text{A}\right)\left(۴۰\times ۱۰^{۶}\ \text{V}\right)=۵۰۰\,\text{W} \qquad (۸-۶۳)$$

۸-۴ نیروی محرکه‌ی الکتریکی

شارش جریان در مقاومت با هدر رفتن انرژی همراه است. برای این که حامل بار با سرعت میانگین $\mathbf{v}$ در مقاومت حرکت کند، نیروی $\mathbf{F}$ باید به آن وارد شود. عاملی که نیرو را فراهم می‌کند، با آهنگ $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ کار انجام می‌دهد. اگر این عامل میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و حامل‌های بار یون‌های با بار q باشند، $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ است و آهنگ انجام کار $q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$ خواهد بود. بنابراین، برای شارش جریان، مقداری انرژی هزینه می‌شود که سرانجام به‌صورت گرما ظاهر می‌شود. در رسانش یونی، بین دو برخورد پی‌درپی، یون مقداری انرژی جنبشی و تکانه به‌دست می‌آورد. یک یا چند برخورد یون سبب می‌شود که جهت تکانه‌ی یون به طور کاتوره‌ای تغییر کند، اما انرژی جنبشی آن را لزوما به حالت اولیه برنمی‌گرداند. برای این که پس از برخورد انرژی جنبشی یون به حالت اولیه برگردد، یون برخورد کننده باید به مانعی که با آن برخورد می‌کند و منحرف می‌شود، انرژی جنبشی منتقل کند. فرض کنید جرم حامل بار در مقایسه با جرم اتم خنثی که با آن برخورد می‌کند (مانع)، کوچک است. در این صورت، میانگین انرژی جنبشی که به اتم خنثی منتقل می‌شود، اندک است (مانند برخورد توپ پینگ پونگ و توپ بسکتبال). بنابراین، انرژی جنبشی یون (توپ پینگ پونگ) به طور پیوسته افزایش خواهد یافت (توجه کنید که بین دو برخورد، یون حامل بار انرژی جنبشی به دست می‌آورد. در هر برخورد مقدار بسیار اندکی از آن به مانع منتقل می‌شود). سرانجام انرژی جنبشی یون به اندازه‌ای زیاد می‌شود که میانگین انرژی که در یک برخورد از دست می‌دهد با مقدار انرژی که بین دو برخورد به‌دست می‌آورد، مساوی می‌شود. به این ترتیب، پس از آن که حامل‌های بار "خودسازی" کردند، کار نیروی الکتریکی به‌صورت انرژی جنبشی کاتوره‌ای (یا گرما) به بقیه‌ی قسمت‌های ماده منتقل می‌شود.

فرض کنید I آمپر حریان پایا در مقاومت R اهم شارش دارد. پس، مقدار I کولمب بار بین اختلاف پتانسیل V ولت جابه‌جا می‌شود. $V=IR$ است. در نتیجه، مقدار کاری که در یک ثانیه انجام می‌گیرد برابر $IV=I^{۲}R$ ژول است (چون یک کولمب ضرب‌در یک ولت برابر یک ژول است). یک **وات**[*] یکای توان P (آهنگ انجام کار) است و با ولت – آمپر یا ژول بر ثانیه تعریف

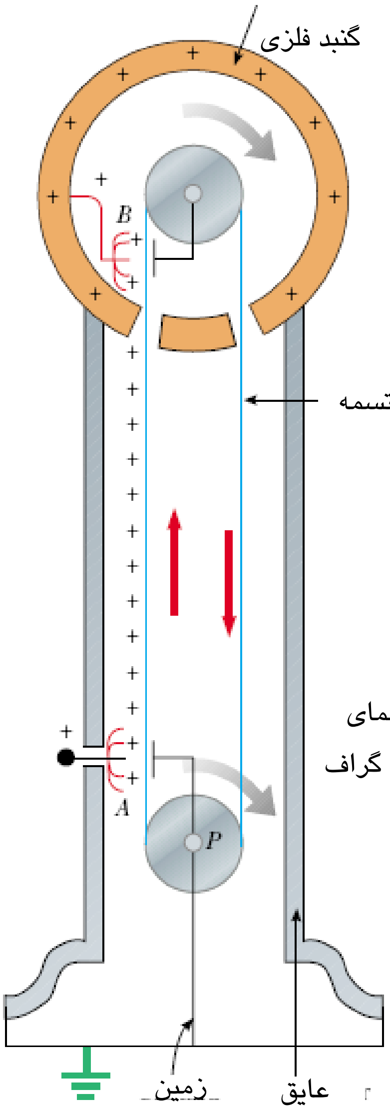
[*] Watt

می‌شود:

$$P = I^2 R \qquad (۸-۶٤)$$

شارش پایای جریان در مدار به یک چشمه‌ی انرژی نیاز دارد تا میدان الکتریکی را که عامل حرکت حامل‌های بار است، ثابت نگه دارد. تاکنون کوشیدیم با بررسی بخشی از مدار از **مفهوم نیروی محرکه‌ی الکتریکی**[◊] الکتریکی دوری کنیم و به این ترتیب باتری را در بحث خود وارد نکردیم. در این بخش به برخی از چشمه‌های نیروی محرکه می‌پردازیم.

- **نیروی محرکه‌ی الکتریکی و پیل ولتا:** در مدار با جریان مستقیم، نیروی محرکه نوعی سازوکار است که حامل‌های بار را در جهت مخالف جهتی که میدان الکتریکی می‌خواهد آن‌ها را به حرکت وا بدارد، جابه‌جا می‌کند. مولد الکتروستاتیک ون دو گراف نمونه‌ای در مقیاس بزرگ‌تراست. جریان در مقاومت بیرونی در جهت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ شارش دارد و انرژی در مقاومت با آهنگ IV_0 یا I^2R به صورت گرما تلف می‌شود. در ستون درونی ماشین ون‌دوگراف هم میدان الکتریکی رو به پایین وجود دارد. در این بخش ماشین بارهای الکتریکی به تسمه‌ی نارسانا سوار می‌شوند و برعکس میدان روبه بالا حرکت می‌کنند. بارها چنان محکم به تسمه چسبیده‌اند که میدان الکتریکی رو به پایین نمی‌تواند آنها را به سوی پایین بلغزاند (در این جا نیازی نداریم که به سازوکار سوار کردن بارها بر روی بسمه و جداکردنشان در بیرون ماشین بپردازیم.) انرژی لازم برای به‌حرکت درآوردن تسمه از جای دیگری تامین می‌شود. معمولا یک موتور الکتریکی که به برق شهر وصل است، این کار را انجام می‌دهد. موتور گازوییلی هم می‌تواند از عهده‌ی آن برآید. ماشین ون دو گراف اساسا یک باتری است با نیروی محرکه‌ی الکتریکی و پتانسیل V_0 است.



شکل ۸-۱٦ شمای ماشین ون دو گراف

در باتری‌های معمولی، انرژی شیمیایی سبب می‌شود تا حامل‌های بار در ناحیه از مدار در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کنند. یعنی، حامل بار مثبت می‌تواند به مکانی برود که پتانسیل الکتریکی آنجا بیشتر است. این کار هنگامی شدنی است که حامل بار در یک فرایند شیمیایی شرکت کند و مقدار انرژی که از این فرایند شیمیایی به‌دست می‌آورد بیشتر از انرژی لازم برای پیمودن سربالایی پتانسیل الکتریکی باشد.

برای این که ببینیم، چگونه این کار شدنی است، پیل ولتا را بررسی می‌کنیم. پیل ولتا نام عمومی برای چشمه‌ی نیروی محرکه‌ی شیمیایی است. در سال‌های ۱۷۸٦ لوییجی گالوانی[†] در آزمایش‌هایی با قورباغه انجام می‌داد، دریافت که وقتی ماشه‌ی مسی را در ستون

[◊] electromotive force
[†] Luigi Galvani

فقرات قورباغه‌ای که از یک میله‌ی فلزی آویزان بود، فرو می‌برد، عضله‌های پای قورباغه منقبض می‌شود. گالوانی مشاهده کرد وقتی با فلزهای نایکسان دیگر هم کار می‌کند، همین اثر پدید می‌آید. او می‌پنداشت که منشاء بار عصب یا عضله‌ی قورباغه است و در نتیجه، آن را "الکتریسیته‌ی حیوانی" نامید.

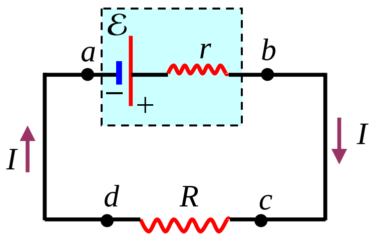
الساندروولتا[♦]، پس از آگاهی از دستاورد گالوانی بر آن شد که آزمایش گالوانی را تکرار و آن را گسترش بدهد. او پیشنهاد کرد که منشاء بار جانور نیست، بلکه تماس بین دو فلز متفاوت مس و آهن است. ولتا در بررسی‌های خود دریافت که وقتی تماس بین دو فلز با یک رسانای نمناک (مانند عضله‌ی قورباغه) صورت بگیرد، اثر چشم‌گیرتری دیده می‌شود. او با جایگزینی پای قورباغه با ماده‌ی آلی این نکته را ثابت کرد. او هم‌چنین ثابت کرد که برخی جفت‌های فلزی اثر چشم‌گیرتری تولید می‌کنند. ولتا فراتر از این رفت و چشمه‌ی الکتریسیته‌ی پیوسته، باتری، را اختراع کرد. نخستین باتری ولتا شامل ستونی از روی و نقره بود. هر لایه با پارچه‌ای که در آب نمگ خیس خورده بود، از لایه‌ی دیگر جدا می‌شد. ساختار لایه‌ای، اختلاف پتانسیل پیوسته بین دو انتهای آن فراهم می‌کرد. انتهای نقره بار مثبت داشت و انتهای روی به همان اندازه بار منفی داشت. در عمل، این دستگاه یک تبدیل کننده‌ی انرژی بود و انرژی شیمیایی را به انرژی پتانسیل الکتریکی تبدیل می‌کرد. باتری‌های امروزی بسته‌بندی جمع و جورتری اند، اما اساس کارشان همان است. تفاوت پیل‌های ولتایی که در دسترس اند، در ماده‌ی شیمیایی آنهاست. همه‌ی این باتری‌ها ویژگی‌های یکسانی دارند: دو الکترود (میله‌ی فلزی) از دو جنس متفاوت که در مایع یونیزه (الکترولیت) فرو برده شده اند. در باتری اتوموبیل، ماده‌ی شیمیایی سرب- اسید سولفوریک است. اهمیت این پیل در کارکرد برگشت‌پذیر آن است. می‌توان آن را باردار کرد و انرژی در آن انباشت و می‌توان با خالی کردن بار، انرژی را به طریق الکتریکی از آن پس گرفت.

صفحه‌های مثبت پیل سرب- اسید سولفوریک وقتی کاملا پُر است، دی‌اکسید سرب، $PbO_۲$ را به صورت پودر متخلخل نگه می‌دارد و صفحه‌های منفی آن شامل سرب خالص است. بدنه‌ی آن از آلیاژ سرب ساخته می‌شود. همه‌ی صفحه‌های مثبت به یکدیگر و به پایانه‌ی مثبت پیل وصل اند. هم‌چنین، صفحه‌های منفی آن به یکدیگر و به پایانه‌ی منفی وصل اند. صفحه‌های مثبت و منفی با فاصله‌ی اندکی از هم قرار دارند و با الکترولیت اسید سولفوریک پر شده است. اگر پیل به مدار بیرونی وصل نشود، برای همیشه در این شرایط باقی می‌ماند و اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های آن به ۲,۱ می‌رسد. در این مدار باز، اختلاف پتانسیل در اثر برهم‌کنش شیمیایی اجزاء پیل، به طور اتوماتیک به‌وجود می‌آید و *نیروی محرکه‌ی الکتریکی* پیل است. برای نشان دادن آن از نماد $\mathcal{E}$ استفاده خواهیم کرد.

حال پایانه‌های باتری را به مدار بیرونی با مقاومت R وصل کنید. اگر R خیلی کوچک نباشد، اختلاف پتانسیل V بین پایانه های باتری اندکی کم‌تر از مقدار $\mathcal{E}$ مدار باز خواهد شد و جریان $I = V/R$ در مدار شارش خواهد کرد. الکترون‌هایی *وارد* پایانه‌ی مثبت خواهند شد و الکترون‌های دیگری از پایانه‌ی منفی *خارج* خواهند شد. در هر الکترود، فرایند شیمیایی در جریان است که سرب، دی‌اکسید سرب و اسید سولفوریک را به سولفات سرب و آب تبدیل می‌کند. به‌ازای هر مولکول سولفات سرب که تشکیل می‌شود یک بار e در مدار می‌گردد و مقدار $e\mathcal{E}$ انرژی آزاد می‌شود. از این مقدار انرژی، به اندازه‌ی eV در مقاومت R به گرما تبدیل می‌شود. تفاوت بین $\mathcal{E}$ و V بر اثر مقاومت خود الکترودها به وجود می‌آید که جریان از طریق آنها در درون باتری شارش می‌یابد. مقاومت الکترودها را معمولا مقاومت درونی می‌نامند و با r یا R_i نشان می‌دهند. نیروی محرکه‌ی $\mathcal{E}$ الکتریکی یک باتری بیشینه ولتاژ ممکنی است که باتری می‌تواند بین دو پایانه‌ی خود تولید کند. شما می‌توانید به منبع نیروی محرکه‌ی الکتریکی به صورت یک دمنده‌ی (پمپ) بار بیندیشید. وقتی بین دو نقطه یک اختلاف پتانسیل الکتریکی

[♦] Alessandro Volta

وجود داشته باشد، منبع بارها را در سربالایی پتانسیل پیش می‌راند و آنها را از نقطه‌ی با پتانسیل کم به نقطه‌ی با پتانسیل بالا می‌برد.



شکل ۸-۱۷ مدار با $\mathcal{E}$ و r

در مدار شکل ۸-۱۸ باتری با مستطیل خط‌چین نشان داده شده است. مقاومت داخلی r آن را در بیرون نشان داده ایم تا از روشنی بیشتری برخوردار شود. فرض کنید که با گذشتن از درون باتری از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b می‌روید و پتانسیل الکتریکی را در مکان‌های مختلف اندازه می‌گیرید. وقتی از پایانه‌ی منفی باتری به پایانه‌ی مثبت می-رسید، پتانسیل به اندازه‌ی $\mathcal{E}$ *افزایش* می‌یابد. اما وقتی از مقاومت درونی r می‌گذرید، پتانسیل به اندازه‌ی Ir *کاهش* پیدا می‌کند. جریان در مدار I است. اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های مدار، $\Delta V = V_b - V_a$، (فرض کنید سیم‌های اتصال مقاومت ندارند) عبارت است از

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir \qquad (۸-۶۵)$$

نکته: اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری در این مدار به اندازه‌ی Ir کاهش یافته است. در برخی وضعیت‌ها که جهت جریان در خلاف جهت نیروی محرکه است (یا حرکت شما در خلاف جهت جریان است) اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری به اندازه‌ی Ir افزایش پیدا می‌کند. نمونه‌ای از این وضعیت هنگامی است که باتری را با منبع نیروی محرکه‌ی الکتریکی دیگری باردار (شارژ) کنید.♣

اختلاف پتانسیل بین دو انتهای مقاومت خارجی R (اختلاف پتانسیل بین نقاط c و d یا بین نقاط a و b که مقاومت R را دربر دارد) برابر $\Delta V = IR$ است. از ترکیب این رابطه با معادله‌ی (۸-۶۵) به‌دست می‌آید

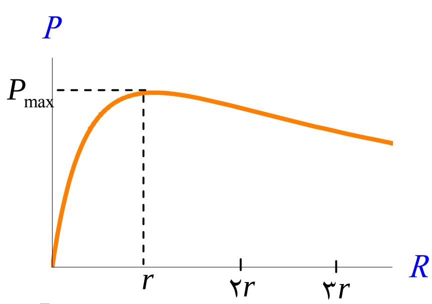
$$IR = \mathcal{E} - Ir \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \qquad (۸-۶۶)$$

این معادله نشان می‌دهد که جریان در این مدار ساده به هر دو مقاومت‌درونی r و مقاومت بیرونی R بستگی دارد. اگر R خیلی بزرگ‌تر از r باشد (که معمولا چنین است) می‌توان از r چشم‌پوشی کرد.

اگر معادله‌ی (۸-۶۶) را در I ضرب کنیم، توان برون داد کل باتری، $I\mathcal{E}$ به‌دست می‌آید (چون $P = IV = I^2R$ است) که در مقاومت خارجی و مقاومت درونی به‌صورت گرما تلف می‌شود:

$$I\mathcal{E} = I^2R + I^2r \qquad (۸-۶۷)$$

مثال ۸-۱۰ بیشینه توان: نشان دهید که بیشترین توانی که در مدار شکل (۸-۱۷) به مقاومت بیرونی R منتقل می‌شود، هنگامی است که مقاومت بیرونی R با مقاومت درونی r برابر است.



شکل ۸-۱۸ نمودار توان برحسب R

حل: توانی که به مقاومت خارجی R فرستاده می‌شود برابر I^2R است که در آن I با رابطه‌ی (۸-۶۶) داده شده است. داریم

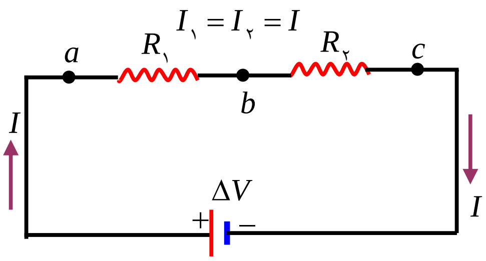
$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2R}{(R+r)^2} \qquad (۸-۶۸)$$

برای یافتن بیشینه‌ی P کافی است از رابطه‌ی بالا نسبت به R مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم. همان‌گونه که از نمودار شکل (۸-۱۸) هم پیداست، بیشینه‌ی توان در $R = r$ است و مقدار آن در $R = r$ برابر $P_{max} = \mathcal{E}^2/4r$ است. وقتی R بزرگ‌تر

از r است، جریان در مدار بسیار اندک می‌شود و در نتیجه، توان $I^{2}R$ انتقالی به مقاومت بیرونی هم کوچک است. وقتی R کوچک است، جریان بزرگ است و اتلاف توان در مقاومت داخلی، $I^{2}r$، چشمگیر است.

۸–۵ شبکه‌های مقاومت

منظور ما از شبکه‌ی مقاومت این است که چندین مقاومت در یک مدار به هم بسته شده باشند. مقاومت‌ها را می‌توان به دو صورت سری و موازی به یکدیگر وصل کرد. شکل (۸–۱۹) دو مقاومت R_{1} و R_{2} را نشان می‌دهد که به طور **سری** به هم بسته شده اند و در مداری که از آن جریان I می‌گذرد، قرار دارند. در اتصال سری اگر بار Q از مقاومت R_{1} به بیرون شارش کند، همان مقدار بار Q باید وارد مقاومت R_{2} بشود. در غیر این صورت بار در سیم بین دو مقاومت انباشته خواهد شد. پس، مقدار باری که در هر بازه‌ی زمانی ازمقاومت‌های R_{1} و R_{2} می‌گذرند، باهم برابر اند. در نتیجه، جریان گذرنده از هر دو مقاومت R_{1} و R_{2} که به طور سری به هم بسته شده‌اند، برابر است.



شکل ۸–۱۹ دو مقاومت به طور سری

اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های مجموعه‌ی دو مقاومت (یعنی نقاط a و c) بین مقاومت‌ها تقسیم می‌شود. چون افت پتانسیل بین نقاط a و b برابر IR_{1} است و افت پتانسیل بین نقاط b و c برابر IR_{2} است، افت پتانسیل بین نقاط a و c برابر

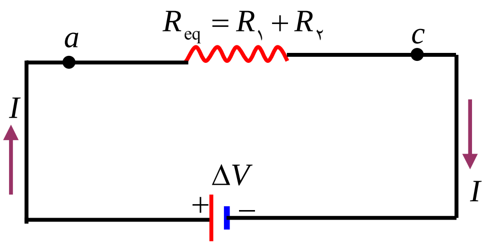
$$\Delta V = IR_{1} + IR_{2} = I\left(R_{1}+R_{2}\right) \qquad (۸–۶۹)$$

است. این اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی a و c همچنین اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری است.

از رابطه‌ی (۸–۶۹) پیداست که اگر به جای دو مقاومت R_{1} و R_{2} مقاومت دیگری به اندازه‌ی $R_{\text{eq}}=R_{1}+R_{2}$ در مدار قرار دهیم، تغییری در جریان مدار و یا در اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری به‌وجود نمی‌آید. مقاومت‌های R_{1} و R_{2} شبکه‌ی ساده‌ای تشکیل می‌دهند. نقاط a و c را می‌توان پایانه‌های این شبکه پنداشت. همارز این شبکه، یک مقاومت معادل به اندازه‌ی

$$R_{\text{eq}} = R_{1} + R_{2} \qquad (۸–۷۰)$$

است. مدار همارز در شکل (۸–۲۰) نشان داده شده است.



شکل ۸–۲۰ مقاومت معادل دو مقاومت سری

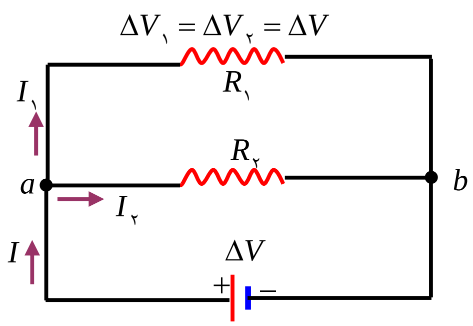
اگر بیش از دو مقاومت به طور سری به هم بسته شده باشند، مقاومت معادل آنها از جمع مقاومت‌ها به‌دست می‌آید

$$R_{\text{eq}} = R_{1} + R_{2} + R_{3} + \cdots = \sum_{n} R_{n} \qquad (۸–۷۱)$$

اگر یک بار دیگر به رابطه‌ی (۸–۶۶) نگاه کنید، می‌بینید که مخرج کسر جمع جبری مقاومت‌های درونی و بیرونی است. این با سری بودن مقاومت درونی و بیرونی در شکل (۸–۱۷) سازگار است.

حالا وضعیتی را در نظر بگیرید که دو مقاومت به‌طور موازی به‌هم بسته شده اند. این وضعیت در شکل (۸–۲۱) نشان داده شده است. وقتی بارها به **پیوندگاه*** در نقطه‌ی a می‌رسند، به دو بخش تقسیم می‌شوند. برخی از مقاومت R_{1} می‌گذرند و بقیه

* junction



شکل ۲۱-۸ مدار با دو مقاومت موازی

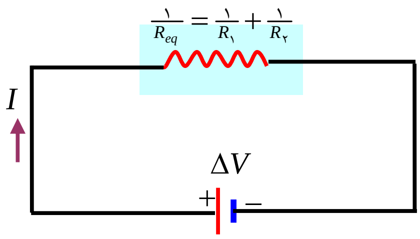
از مقاومت $R_۲$ عبور می‌کنند. پیوندگاه، نقطه‌ای در مدار است که جریان به دو یا چند بخش تقسیم می‌شود. دو یا چند شاخه شدن جریان سبب می‌شود که جریان گذرنده از هر شاخه کم‌تر از جریانی باشد که باتری را ترک می‌کند. چون بار الکتریکی پایسته است، جریانی که به نقطه‌ی a وارد می‌شود، با ید با جریان کل که نقطه‌ی a را ترک می‌کند، برابر باشد. پس:

$$I = I_۱ + I_۲ \qquad (۸-۷۲)$$

$I_۱$ جریانی است که از مقاومت $R_۱$ می‌گذرد و $I_۲$ جریان گذرنده از مقاومت $R_۲$ است. همان‌گونه که از شکل پیداست، هر دو مقاومت به طور مستقیم به دو سر باتری وصل شده اند. بنابراین، وقتی مقاومت‌ها به طور موازی بسته می‌شوند، اختلاف پتانسیل بین دو سر مقاومت‌ها برابر است. به این دلیل، از رابطه‌ی $\Delta V = IR$ داریم

$$I = I_۱ + I_۲ = \frac{\Delta V}{R_۱} + \frac{\Delta V}{R_۲} = \Delta V \left(\frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} \right) = \frac{\Delta V}{R_{eq}} \qquad (۸-۷۳)$$

که در آن R_{eq} مقاومتی است که اثرش در مدار با اثر دو مقاومت موازی یکی است، یعنی مقاومت R_{eq} همان جریانی را از باتری می‌کشد که دو مقاومت موازی $R_۱$ و $R_۲$ از باتری می‌کشند. مقاومت R_{eq} معادل مقاومت‌های موازی $R_۱$ و $R_۲$ است. مدار معادل شکل (۲۱-۸) در شکل (۲۲-۸) با یک مقاومت (مقاومت معادل R_{eq}) نشان داده شده است. پس:



شکل۲۲-۸ مدارمعادل دو مقاومت موازی

$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} \;\Rightarrow\; R_{eq} = \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲} \qquad (۸-۷۴)$$

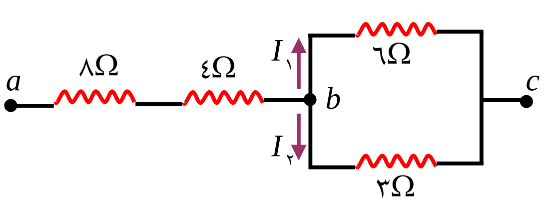
اگر بیش از دو مقاومت به طور موازی در یک مدار قرار گیرند، رابطه‌ی بالا به صورت زیر تعمیم می‌یابد:

$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۳} + \cdots = \sum_j \frac{۱}{R_j} \qquad (۸-۷۵)$$

توجه کنید که مقاومت معادل هموارهکم‌تر از کوچک‌ترینمقاومت موجود در گروه مقاومت‌های موازی است.

سیم‌کشی خانه‌ها همیشه به گونه‌ای است که ابزار الکتریک به طور موازی بسته شوند. هر وسیله‌ی الکتریکی مستقل از ابزار دیگر کار می‌کند. به این ترتیب اگر یکی را خاموش کنیم، دیگری روشن باقی می‌ماند. در این گونه اتصال، همه‌ی ابزار الکتریکی در اختلاف پتانسیل یکسان کار می‌کنند.

مثال ۱۱-۸ شبکه‌ی ساده چهار مقاومت برابر شکل (۲۳-۸) به هم بسته شده اند. مقاومت معادل بین نقاط a و c را بیابید. اگر اختلاف پتانسیل بین نقاط a و c برابر $۴۲\,\text{V}$ باشد، جریان را در هر یک از مقاومت‌ها حساب کنید.



شکل ۲۳ اتصال ترکیبی مقاومتها

حل: بین نقاط a و b دو مقاومت به‌طور سری بسته شده اند. مقاومت معادل آنها $R_{۱,eq} = ۸\Omega + ۴\Omega = ۱۲\Omega$ است. بین نقاط b و c دو

مقاومت ٦ و ٣ اهمی به‌طور موازی بسته شده اند. آنها را می‌توان با مقاومت معادلشان می‌توانیم جایگزین کنیم. از رابطه‌ی (٨-٧٤) داریم

$$R_{۲,eq}=\frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲}=\frac{(٦\Omega)(۳\Omega)}{٦\Omega+۳\Omega}=۲\Omega \qquad (٨-٧٦)$$

پس، اینک دو مقاومت $R_{۱,eq}$ و $R_{۲,eq}$ داریم که به‌طور سری بسته شده‌اند. مقاومت معادل آنها، مقاومت معادل بین نقاط a و c، برابر است با

$$R_{eq}=۱۲\Omega+۲\Omega=۱٤\Omega \qquad (٨-٧٧)$$

جریان گذرنده از مقاومت‌های ٨ و ٤ اهمی یکسان است، چون این دو مقاومت به‌طور سری بسته شده اند. افزون بر این، همین جریان از مقاومت معادل ١٤ اهمی با اختلاف پتانسیل $٤۲\,\text{V}$ خواهد گذشت. پس، با استفاده از $I=\Delta V_{ac}/R_{eq}$ داریم

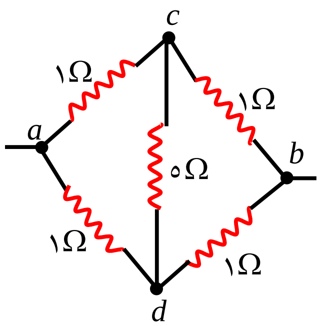
$$I=\frac{\Delta V_{ac}}{R_{eq}}=\frac{٤۲\,\text{V}}{۱٤\Omega}=۳\,\text{A} \qquad (٨-٧٨)$$

این جریانی است که از مقاومت‌های ٨ اهمی و ٤ اهمی می‌گذرد. وقتی این جریان ٣ آمپر به پیوندگاه b می‌رسد، به دو بخش تقسیم می‌شود. جریان $I_۱$ از مقاومت ٦ اهمی می‌گذرد و جریان $I_۲$ از مقاومت ٣ اهمی می‌گذرد. چون اختلاف پتانسیل بین نقاط b و c هر یک از مقاومت‌های موازی یکسان است، داریم

$$\Delta V_{bc}=I_۱(٦\Omega)=I_۲(۳\Omega)\quad\Rightarrow\quad I_۲=۲I_۱ \qquad (٨-٧٩)$$

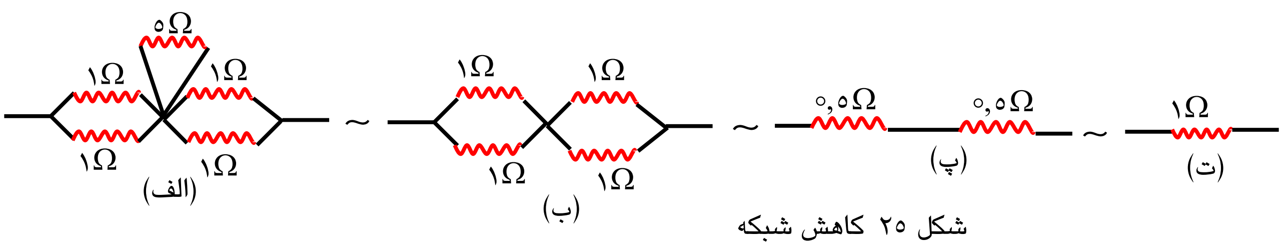
با استفاده از این رابطه و این که $I=I_۱+I_۲=۳\,\text{A}$ است، به دست می‌آید $I_۱=۱\,\text{A}$ و $I_۲=۲\,\text{A}$.

مثال ١٢-٨ شبکه‌ی مقاومت مقاومت معادل پنج مقاومت برابر شکل (٢٤-٨) به‌هم بسته شده اند. مقاومت معادل بین نقاط a و b را بیابید.



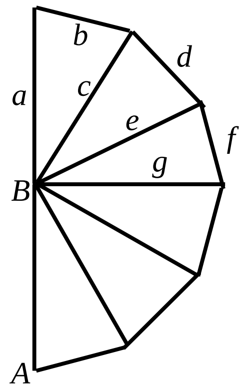
شکل ٢٤-٨ شبکه‌ی مقاومت

حل: وارسی این سامانه نشان می‌دهد که با استفاده از قاعده‌های اتصال‌های سری و موازی مقاومت‌ها نمی‌توان آن را ساده کرد. برای حل این گونه مسئله‌ها از تقارن سامانه می‌توان استفاده کرد. فرض کنید جریانی به پیوندگاه a وارد می‌شود. چون مدار شکل (٢٤-٨) تقارن دارد (یعنی مقاومت‌ها در حلقه همگی ۱Ω اند)، جریان در شاخه‌های ac و ad باید برابر باشند. در نتیجه، پتانسیل الکتریکی در نقاط c و d باید برابر باشد. این بدان معنی است که $\Delta V_{cd}=۰$ است و بین نقاط c و d جریان نمی‌گذرد. پس، بدون این که تاثیری در مدار به وجود بیاید، می‌توان c و d را به‌هم وصل کرد (شکل (٢٥-٨ الف) و در نتیجه، می‌توان مقاومت ٥ اهمی را ازمدار حذف کرد (شکل ٢٥-٨ ب را ببینید.) در نتیجه، دو جفت مقاومت یک اهمی باقی می‌ماند که دو تا دو تا



شکل ٢٥ کاهش شبکه

به طور موازی به یکدیگر وصل اند. مقاومت معادل هر یک از آنها مقاومتی با $\text{۰٫۵}\Omega$ است. (شکل ۲۵–۸ پ). در نتیجه، در گام آخر دو مقاومت نیم اهمی داریم که به طور سری به هم وصل اند. مقاومت معادل این دو مقاومت نیم‌اهم، مقاومت ۱ اهمی شکل (۲۵–۸ ت) مقاومت معادل نهایی است.



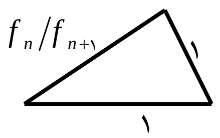
شکل ۲٦–۸ شبکه‌ی مثلثی

مثال ۱۳–۸ شبکه‌ی مثلثی: (الف) در شکل (۲٦–۸) هر پاره‌خط یک مقاومت R است. مقاومت معادل R_{eq} بین نقاط A و B چیست؟

(ب): در حدی که تعداد مثلث‌ها خیلی زیاد باشد، مقاومت معادل را حساب کنید. (*راهنمایی:* اگر یک مثلث دیگر به سمت چپ A بیفزایید، مقاومت معادل در امتداد خط جدیدی که B را به ضلع سمت چپ این مثلث وصل می‌کند هنوز باید R_{eq} باشد.)

حل: **(الف)** مقاومت‌های a و b سری بسته شده اند، می‌توانیم آن‌ها را با یک مقاومت $\text{۲}R$ جایگزین کرد. این مقاومت $\text{۲}R$ با مقاومت c موازی بسته می‌شود. بنابراین، مثلث اول را می‌توان با یک مقاومت $R(\text{۲/۳})$ جایگزین کرد. این مقاومت با d به طور سری بسته شده است و معادل آن دو، مقاومتی به اندازه‌ی $R(\text{۵/۳})$ است. مقاومت $R(\text{۵/۳})$ با مقاومت e موازی است. بنابراین دو مثلث اول را می‌توان با یک مقاومت معادل $R(\text{۵/۸})$جایگزین کرد که با f سری بسته شده است. اگر این روند را ادامه دهید، سه مثلث بالایی را می‌توانید با یک مقاومت $R(\text{۱۳/۲۱})$ جایگزین کنید. شعاع بعدی با مقاومت $R(\text{۳٤/۵۵})$ جایگزین می‌شود. مثلث پنجم جایگزین مقاومت $R(\text{۸۹/۱٤٤})$ و سرانجام مثلث آخر با مقاومت $R(\text{۲۳۳/۳۷۷})$ معادل است که مقاومت معادل R_{eq} بین نقاط A و B است.

عددهای این کسرها، عددهای آشنای فیبوناچی* اند و با رابطه‌ی برگشتی $f_{n+\text{۱}}=f_n+f$ تعریف می‌شود. ۲۳۳ و ۳۷۷ عددهای سیزدهم و چهاردهم فیبوناچی اند.

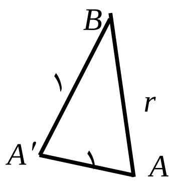


شکل ۲۷–۸ یک مثلث

با استقراء به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر مقاومت معادل یک مثلث به صورت $R(f_n/f_{n+\text{۱}})$ باشد، مقاومت معادل در مثلثبعدی برابر $R(f_{n+\text{۲}}/f_{n+\text{۳}})$ است. این را می‌توان از شکل (۲۷–۸) دید. مقاومت پایینی در شکل (۲۷–۸) (ضریب R را ننوشتیم) برابر است با

$$\frac{\text{۱}}{\frac{\text{۱}}{\text{۱}}+\frac{\text{۱}}{\text{۱}+(f_n/f_{n+\text{۱}})}}=\frac{\text{۱}}{\text{۱}+\frac{f_{n+\text{۱}}}{f_n+f_{n+\text{۱}}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۱}+\frac{f_{n+\text{۱}}}{f_{n+\text{۲}}}}=\frac{f_{n+\text{۲}}}{f_{n+\text{۱}}+f_{n+\text{۲}}}=\frac{f_{n+\text{۲}}}{f_{n+\text{۳}}} \qquad (\text{۸–۸۰})$$

اگر N مثلث داشته باشیم (در مثال ما $N=\text{٦}$ است) مقاومت معادل بین شعاع اول یا شعاع آخر (پاره‌خط AB) برابر $R(f_{\text{۲}n+\text{۱}}/f_{\text{۲}n+\text{۲}})$ می‌شود.



شکل ۲۸–۸ مثلث بعدی

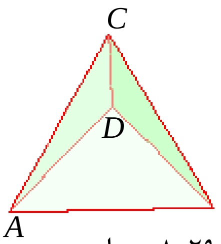
(ب): اگر مقاومت بین BA به مقدار r میل کند، با افزودن یک مثلث دیگر، باید مقاومت معادل هنوز هم به همان مقدار r میل کند. مقاومت معادل بین نقاط B و A' باید برابر (ضریب R را ننوشتیم) .

* Fibonacci numbers

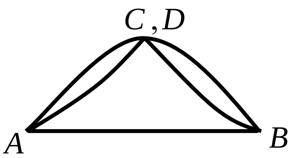
$$r=\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{r+1}}\;\Rightarrow\; r=\frac{r+1}{r+2}\;\Rightarrow\; r^2+r-1=0\;\Rightarrow\; r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}618 \qquad (8\text{-}81)$$

باشد. این عدد، نسبت بین دو عدد فیبوناچی پی‌درپی است. حتی برای n های کوچک هم نسبت خیلی به ۰٫۶۱۸ نزدیک است.
در مثال بالا که شش مثلث وجود دارد، ۲۳۳/۳۷۷ با مقدار $\left(-1+\sqrt{5}\right)/2$ تا پنج رقم اعشار، سازگار است

مثال ۱۴-۸ چهار وجهی با لبه‌های مقاومتی: هر لبه‌ی چهار وجهی شکل (۲۹-۸) یک مقاومت R است. بنابراین، شامل شش مقاومت R است.مقاومت معادل بین دو راس را بیابید.
(*راهنمایی*: از تقارن چهار وجهی استفاده کنید.)



شکل ۲۹-۸ چهار وجهی



شکل ۳۰-۸ مدار معادل

حل: فرض کنید راس‌های مورد نظر A و B اند. بنا به تقارن، دو مقاومت دیگر در پتانسیل یکسان قرار دارند و در نتیجه، از مقاومتی که آنها را به هم وصل می‌کند، جریان نمی‌گذرد. پس، می‌توانیم راس‌های C و D به هم بچسبانیم مدار معادل همانند شکل (۳۰-۸) می‌شود. در این شکل، بین نقطه‌ی A و نقطه‌ی C,D دو مقاومت R به طور موازی بسته شده‌اند. به جای آن دو می‌توان مقاومت معادلشان $R_{eq(A,C-D)}=R/2$ را قرار داد. همین کار را بین نقطه‌های B و C,D انجام می‌دهیم. این دو مقاومت $\left(R/2\right)$ با هم به طور سری بسته شده اند. مقاومت معادل آن دو $R_{eq(A-C,D-B)}=\left(R/2\right)+\left(R/2\right)=R$ است. این مقاومت R معادل با مقاومت R که بین نقاط A و B قرار دارد، موازی است. پس، مقاومت معادل بین A و B برابر $R_{eq,A-B}=R/2$ است.
توجه کنید که جمع مقاومت‌های معادل هر شش مقاومت برابر $6\left(R/2\right)=3R$ است.

۶-۸ قانون‌های کرکهوف

در بخش ۵-۸ دیدیم که مدارهای ساده (معمولا با یک چشمه‌ی نیروی محرکه) را می‌توان با استفاده از $\Delta V=IR$ و قاعده‌های ترکیب سری و موازی مقاومت‌ها به مدار با یک حلقه‌ی جریان کاهش داد و بررسی کرد. بیش‌تر وقت‌ها کاهش یک مدار پیچیده به یک حلقه شدنی نیست. در این وضعیت‌ها دو اصل ساده که قانون‌های کرکهوف♦ نامیده می‌شوند، بررسی مدارهای پیچیده را آسان می‌کنند. این قانون‌ها بیان پایستگی بار الکتریکی و پایستگی انرژی اند. در زیر نخست آنها را بیان می‌کنیم و سپس به بررسی اندرونه‌ی آنها و کاربردشان می‌پردازیم.

قانون نخست کرکهوف: جمع جریان‌هایی که به یک پیوندگاه مدار وارد می‌شود با جمع جریان‌هایی که آن پیوندگاه را ترک می‌کنند، باید برابر باشد. این قانون را گاهی **قانون پیوندگاه** هم می‌نامند.

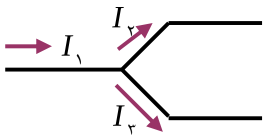
$$\sum I_{\text{in}}=\sum I_{\text{out}} \qquad (8\text{-}82)$$

قانون دوم کرکهوف: در هر حلقه‌ی بسته از یک مدار الکتریکی، جمع اختلاف پتانسیل‌های دو سر اجزاء آن حلقه‌ی مدار صفر است. این قانون را گاهی **قانون حلقه** می‌نامند

♦ Kirchhoff's rules

$$\sum_{\text{closed loop}} \Delta V = \text{۰} \qquad (\text{۸–۸۳})$$

همان‌گونه که گفتیم، قانون اول کرکهوف گزاره‌ای برای پایستگی بار الکتریکی است. همه‌ی بارهایی که وارد نقطه‌ی معینی از مدار می‌شوند، باید آن نقطه را ترک کنند، چون بارها نمی‌توانند در یک نقطه انباشته شوند. اگر این قاعده را در پیوندگاه شکل (۳۱–۸) به کار ببریم، خواهیم داشت



شکل ۳۱–۸ قانون پیوندگاه

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (\text{۸–۸٤})$$

در واقع این شبیه لوله‌کشی آب است. اگر لوله‌ها نشتی نداشته باشد،مقدار آبی که به نقطه‌ی انشعاب می‌رسد، باید از آن نقطه به بیرون شارش کند؛ چون آب در هیچ جای لوله انباشته نمی‌شود. آهنگ درون‌شاری با آهنگ کل برون‌شاری از شاخه‌های انشعاب باید برابر باشد.

قانون دوم کرکهوف از پایستگی انرژی نتیجه می‌شود. تجسم کنید که بار q را در یک حلقه‌ی مدار می‌گردانید. وقتی بار به نقطه‌ی آعاز خود برمی‌گردد، سامانه‌ی بار– مدار باید همان مقدار انرژی داشته باشد که بیش از گرددندن بار در مدار، داشت. بار در هنگام گذار از برخی اجزاء مدار ممکن است انرژی به‌دست بیاورد و در گذار از برخی اجراء دیگر انرژی از دست بدهد. جمع انرژی‌هایی که به‌دست می‌آورد باید با جمع انرژی‌هایی که از دست می‌دهد برابر باشد. هر گاه بار q از یک افت پتانسیل $(-IR)$ بین دو سر مقاومت می‌گذرد، یا در جهت خلاف نیروی محرکه حرکت می‌کند، انرژی پتانسیل آن کاهش می‌یابد. اگر بار از پایانه‌ی منفی باتری وارد و به پایانه‌ی مثبت آن برود، انرژی پتانسیل بار افزایش پیدا می‌کند.

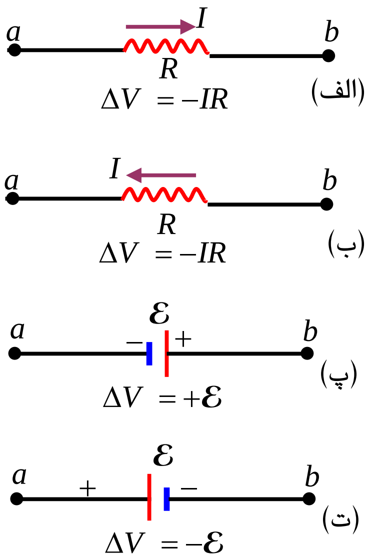
در عمل، به جای این که ازتغییر انرژی پتانسیل بار سخن بگوییم، از *پتانسیل الکتریکی* در به کار بردن قانون دوم کرکهوف استفاده می‌کنیم. تصور کنید که در مداری از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b می‌روید. ممکن است از یک سر مقاومت و یا باتری وارد و از سردیگر مقاومت و پایانه‌ی دیگر باتری خارج شوید. چهار قراداد زیر را ناگزیرید همواره رعایت کنید (می‌توانید از محوعه‌ی قراردادهای دیگری استفاده کنید. اما همواره باید یک و فقط یک مجموعه‌ی قراردادها را به‌کار ببرید.) در هر یک از شکل‌های زیر حرکت شما از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b است

۱. چون بار الکتریکی در مقاومت از انتهای با پتانسیل بیش‌تر به انتهای با پتانسیل کم‌تر آن حرکت می‌کند، اگر جهت حرکت شما در مقاومت با جهت جریان در آن مقاومت *هم‌سو* باشد، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $-IR$ است (شکل ۳۲–۸ الف).

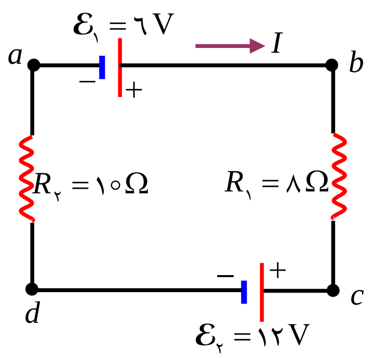
۲. اگر حرکت در مقاومت در *خلاف* جهت جریان در مقاومت باشد، اختلاف پتانسیل دوسر مقاومت برابر $+IR$ است (شکل ۳۲–۸ ب).

۳. اگر در جهت نیروی نیروی محرکه (از پایانه‌ی منفی وارد و از پایانه‌ی مثبت خارج شوید) از یک باتری بگذرید، اختلاف پتانسیل (با فرض این که مقاومت درونی باتری صفر است) برابر $+\mathcal{E}$ است. وقتی در این جهت از باتری بگذریم، نیروی محرکه‌ی باتری سبب افزایش پتانسیل الکتریکی می‌شود. (شکل ۳۲–۸ پ).

۴. اگر در خلاف جهت نیروی نیروی محرکه (از پایانه‌ی مثبت وارد و از پایانه‌ی منفی خارج شوید) از یک باتری بگذرید، اختلاف پتانسیل (اگر مقاومت درونی باتری صفر باشد) برابر $-\mathcal{E}$ است. وقتی در این جهت از باتری بگذریم، نیروی محرکه‌ی باتری سبب کاهش پتانسیل الکتریکی می‌شود. (شکل ۳۲–۸ ت).



شکل ۳۲–۸ قراردادهای اجزاء مدار



شکل ۳۳-۸ مدار تک حلقه

مثال ۱۵-۸ مدار تک حلقه: در مدار شکل (۳۳-۸) دو مقاومت و دو باتری وجود دارد. از مقاومت درونی باتری‌ها چشم‌پوشی کنید.

(الف): جریان مدار را حساب کنید

(ب): چه مقدار توان در هر مقاومت تلف شده است؟ توان تولیدی باتری ۱۲ ولت چقدار است؟

حل (الف): برای حل این مسئله، به قانون‌های کرکهوف نیازی نیست، با این حال از آنها استفاده می‌کنیم و کاربردشان را بیاموزیم. در مدار تک حلقه پیوندگاه وجود ندارد؛ پس، جریان در همه‌جای مدار یکسان است. فرض کنید جهت جریان ساعتگرد است. از نقطه‌ی a آغاز کنید و ساعتگرد حلقه را بپیمایید. در مسیر از a به b از پایانه‌ی منفی باتری به پایانه‌ی مثبت آن می‌رویم. در نتیجه، اختلاف پتانسیل $+\mathcal{E}_1$ است. در مسیر $b \to c$ از یک مقاومت می‌گذریم. جهت حرکت با جهت جریان همسو است و اختلاف پتانسیل برابر $-IR_1$ است. در مسیر $c \to d$ از پایانه‌ی مثبت باتری وارد و از پایانه‌ی منفی آن خارج می‌شویم. در اینجا اختلاف پتانسیل برابر $-\mathcal{E}_2$ است. سرانجام، در مسیر $d \to a$ مقاومت R_2 را همسو با جهت جریان می‌پیماییم که به معنی اختلاف پتانسیل $-IR_2$ است. با استفاده از قانون دوم کرکهوف داریم

$$\sum \Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = -0{,}33\,\text{A} \qquad (8\text{-}85)$$

علامت منفی در پاسخ بالا برای جریان نشان می‌دهد که جهت جریان برخلاف جهتی است که فرض کردیم. علت این که در مخرج کسر بالا مقاومت‌ها باهم جمع شده اند، این است که آنها به طور سری در مدار قرار دارند. نیروهای محرکه در صورت کسر از هم کم شده اند، چون قطبایی آنها متفاوت است.

(ب): توان مصرفی در مقاومت با $P = I^2R$ حساب می‌شود. بنابراین

$$P_1 = I^2R_1 = (0{,}33\,\text{A})^2(8\,\Omega) = 0{,}87\,\text{W} \quad , \quad P_2 = I^2R_2 = (0{,}33\,\text{A})^2(10\,\Omega) = 1{,}1\,\text{W} \qquad (8\text{-}86)$$

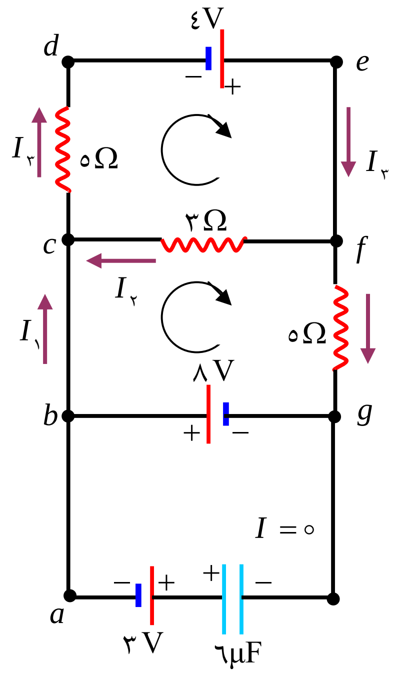
بنابراین، توان کل که به مقاومت‌ها منتقل شده است $P_1 + P_2 = 2\,\text{W}$ است. توان باتری ۱۲ ولت برابر $P = I\mathcal{E}_2 = 4\,\text{W}$ است. نیمی از این توان به مقاومت‌ها منتقل شده است و نیم دیگرس به باتری ۶ ولتی منتقل شده است که توسط باتری ۱۲ ولتی در حال شارژ شدن است. اگر مقاومت‌های درونی باتری‌ها را هم در نظر می‌گرفتیم، بخشی از توان باتری ۱۲ ولتی در آنها از بین می‌رفت.

نکته: اگر قطبایی باتری ۱۲ ولتی وارون می‌شد، علامت $\mathcal{E}_2$ در معادله‌ی (۸۵-۸) عوض می‌شد و جریان 1A در مدار شارش پیدا می‌کرد.♣

مثال ۱۶-۸ مدار با چند حلقه: **(الف)** در مدار شکل (۳۴-۸) و در شرایط پایا، جریان‌های I_1، I_2 و I_3 را به‌دست آورید.

(ب): بار خازن را حساب کنید.

حل: پیش از هر چیز توجه کنید که چون خازن پر است (شرایط پایا) ، جریانی از آن نمی‌گذرد. در نتیجه، در مسیر $ghab$ بین نقاط g و b جریان وجود ندارد. بنابراین، وقتی بارهای مربوط به جریان I_1 به نقطه‌ی g می‌رسند، همگی با گذشتن ازباتری



شکل ۸-۳۴ مدار با چند حلقه

۸ ولتی به سوی نقطه‌ی b می‌روند. پس، $I_{gb}=I_1$ است. جریان‌ها را همانند شکل نمادگذاری کنید و قانون اول کرکهوف را در پیوندگاه c به‌کار ببرید. به‌دست می‌آید

$$I_1+I_2=I_3 \qquad (۸-۸۷)$$

حالا از قانون دوم کرکهوف در حلقه‌های $defcd$ و $cfgbc$ استفاده کنید.حرکت خود را ساعتگرد برگزینید. داریم

$$defcd \qquad ۴\,\text{V}-(۳\Omega)I_2-(۵\Omega)I_3=۰ \qquad (۸-۸۸)$$

$$cfgbc \qquad (۳\Omega)I_2-(۵\Omega)I_1+۸\,\text{V}=۰ \qquad (۸-۸۹)$$

از معادله‌ی (۸-۸۷) داریم $I_1=I_3-I_2$ ، آن را درمعادله‌ی (۸-۸۹) جایگزین کنید. به دست می آید

$$(۸\Omega)I_2-(۵\Omega)I_3+۸\,\text{V}=۰ \qquad (۸-۹۰)$$

اگر معادله‌ی (۸-۹۰) را از معادله‌ی (۸-۸۸) کم کنیم، I_3 حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$I_2=-\frac{۴\,\text{V}}{۱۱\Omega}=-۰{,}۳۶۴\,\text{A} \qquad (۸-۹۱)$$

چون I_2 منفی است، نتیجه می‌گیریم که جهت I_2 در مقاومت ۳ اهمی از c به f است. با وجود این تفسیر از جهت جریان I_2، در دنباله‌ی مسئله باید از همین مقدار منفی استفاده کنیم، چون معادله‌های ما بر اساس گزینه‌ی اولیه‌ی جهت‌های نوشته شده اند.

با استفاده از $I_2=-۰{,}۳۶۴\,\text{A}$ در معادله‌های (۸-۸۷) و (۸-۸۹) به‌دست می‌اید

$$I_1=۱{,}۳۸\,\text{A} \qquad , \qquad I_3=۱{,}۰۲\,\text{A} \qquad (۸-۹۱)$$

(ب): می‌توانیم قانون دوم کرکهوف را در حلقه‌ی $bghab$ (یا هر حلقه‌ی دیگری که شامل خازن است) به کار ببریم و اختلاف پتانسیل دو سر خازن، ΔV_{cap}، را حساب کنیم. ما از این اختلاف پتانسیل در معادله‌ی حلقه استفاده می‌کنیم اما از هیچ قراردادی برای علامت آن استفاده نمی‌کنیم، چون بار روی خازن فقط به اندازه‌ی اختلاف پتانسیل بستگی دارد. اگر در حلقه‌ی $bghab$ ساعتگرد حرکت کنیم خواهیم داشت

$$-۸\,\text{V}+\Delta V_{cap}-۳\,\text{V}=۰ \quad\Rightarrow\quad \Delta V_{cap}=۱۱\,\text{V} \qquad (۸-۹۲)$$

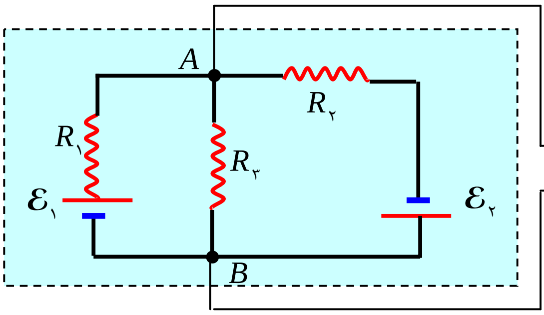
چون $Q=C\Delta V$ است، پس بار روی خازن برابر است با

$$Q=(۶\,\mu\text{F})(۱۱\,\text{V})=۶۶\,\mu\text{C} \qquad (۸-۹۳)$$

۸-۷ قضیه‌ی تِونِن

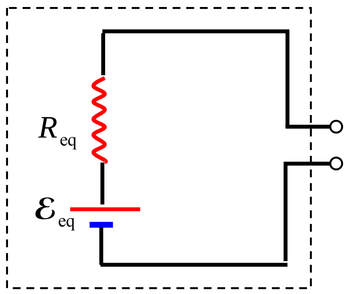
فرض کنید شبکه‌ای مانند مدار شکل (۸-۳۵) بخشی از یک مدار بزرگ‌تر است و در دو پیوندگاه به آن وصل است. فرض کنید سیم‌ها را به دو پیوندگاه A و B وصل کردیم و بقیه‌ی مدار شکل (۸-۳۵ الف) را در یک "جعبه‌ی سیاه" قرار دادیم. این دو سیم تنها پایانه‌های جعبه‌ی سیاه است که دیده می‌شوند. شکل (۸-۳۵) را نگاه کنید. جعبه‌ی سیاه با زمینه‌ی خاکستری نشان

داده شده است.) بنا به قضیه‌ی عمومی تونین[*]، وقتی دو پایانه‌ی جعبه‌ی سیاه به مدار دیگری متصل می‌کند، رفتارش کاملا هم‌ارز **یک** چشمه‌ی ولتاژ $\mathcal{E}_{eq}$ با مقاومت درونی R_{eq} است. این قضیه در هر شبکه‌ی هر اندازه پیچیده‌ی شامل مقاومت و منبع‌های نیروی محرکه درست است. مقدارهای $\mathcal{E}_{eq}$ و R_{eq} را بسادگی می‌توان به‌دست آورد. $\mathcal{E}_{eq}$ اختلاف پتانسیل بین دو پایانه‌ی سیم‌ها در هنگامی است که چیزی در بیرون جعبه‌ی سیاه به این دو پایانه وصل نباشد. $\mathcal{E}_{eq}$ در مثال شکل (۳۵-۸) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_۲$ است. برای یافتن آن باید جریان گذرنده از مقاومت $R_۲$ را حساب کنیم. این کار با استفاده از قانون‌های کرکهوف به سادگی شدنی است. R_{eq} مقاومتی است که اگر همه‌ی نیروهای محرکه‌ی درون جعبه صفر باشند، بین دو پایانه‌ی جعبه اندازه‌گیری می‌شود. در مثال ما، مقدار آن از سه مقاومت $R_۱$ و $R_۲$ و $R_۳$ که موازی بسته شده اند به‌دست می‌آید. یعنی برابر $R_۱R_۲R_۳/\left(R_۱R_۲+R_۲R_۳+R_۱R_۳\right)$ است.



(الف): جعبه‌ی سیاه و اندرونه‌ی

شکل ۳۵-۸



(ب): مدار هم‌ارز تونین برای جعبه‌ی

اگر ندانیم که در درون جعبه چه چیزی وجود دارد، چه کنیم؟ در این صورت $\mathcal{E}_{eq}$ و R_{eq} را با دو اندازه‌گیری می‌توانیم به طور تجربی تعیین کنیم. ولتاژ مدار باز را با یک ولت‌سنج که جریان خیلی اندک از آن می‌گذرد، اندازه بگیرید. این $\mathcal{E}_{eq}$ را به‌دست می‌دهد. حالا پایانه‌های جعبه را با یک آمپرسنجی که مقاومتش اندک است به هم وصل کنید. با این کار جریان مدار کوتاه I_{sc} را اندازه می‌گیرید. در نتیجه،

$$R_{eq}=\frac{\mathcal{E}_{eq}}{I_{sc}} \qquad (۸-۹٤)$$

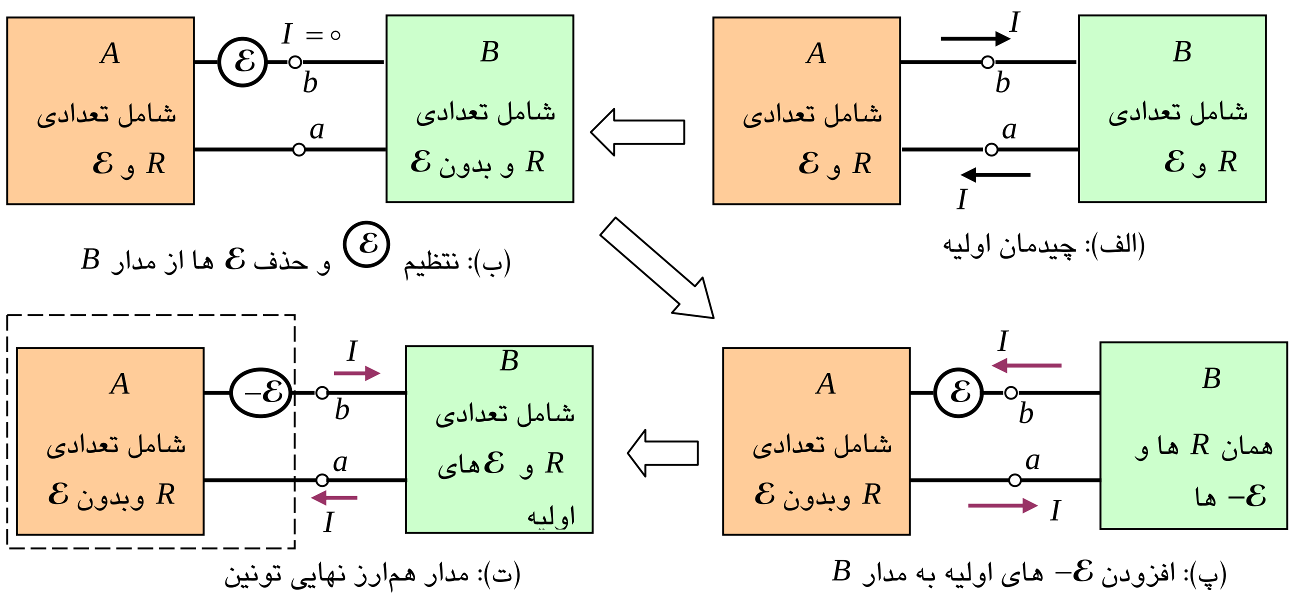
هنگام بررسی مدارهای پیچیده، بهتر است بخش دو پایانه را همانند شکل (۳۵-۸ ب) با $\mathcal{E}_{eq}$ و R_{eq} هم‌ارز جایگزین کنیم.

※ **قضیه‌ی تونین و اثبات آن**: مدار دلخواه A را در نظر بگیرید. مدار دلخواه B به‌طور سری به پایانه‌های خروجی مدار A وصل است. ثابت کنید تا جایی که به مدار B مربوط است، مدار A مانند یک نیروی محرکه‌ی $\mathcal{E}_{eq}$ (که برابر است با اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های مدار A وقتی چیزی به آنها وصل نیست) و یک مقاومت R_{eq} (برابر مقاومتی که اگر نیروهای محرکه‌ی درونی مدار A همگی صفر می‌بودند، بین پایانه‌های A اندازه‌گیری می‌شد) که به طور سری بسته شده اند، رفتار می‌کند. توجه کنید که این نتیجه مستقل از جزییات مدار B است.

اثبات: در شکل (۳٦-۸ الف) مدار کامل دیده می‌شود. جریانی را که از سیم‌های افقی می‌گذرد، I بنامید. اثبات قضیه سه گام دارد. این سه گام در شکل (۳٦-۸) نشان داده شده است و در زیر آن را توضیح می‌دهیم.

---
[*]Thevenin's theorem

گام نخست این است که همه‌ی نیروهای محرکه‌ی درونی B را حذف کنیم (به طور هم‌ارز، منهای همه‌ی نیروهای محرکه را به آن بیفزاییم) و برابر شکل (۳۶-۸ ب) یک نیروی محرکه‌ی $\mathcal{E}$ به مدار بیفزاییم و آن را تنظیم کنیم تا جریان در سیم‌های افقی صفر شود. حال که جریان صفر است و در مدار B نیروی محرکه‌ی درونی وجود ندارد، اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های a و b



شکل ۳۶-۸ یافتن مدار تونین معادل

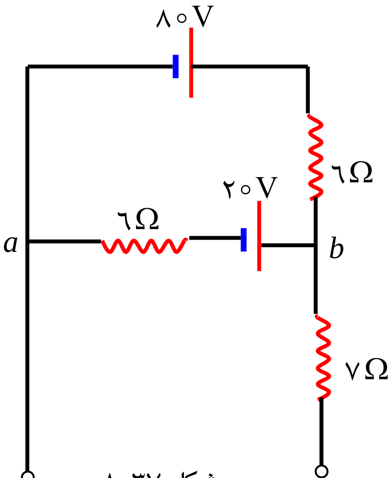
مدار A (بنا به تعریف) اختلاف پتانسیل مدار باز، V_A^{open}، است. بنابراین، نیروی محرکه‌ی $\mathcal{E}$ که به مدار افزودیم باید برابر $-V_A^{\text{open}}$ باشد؛ چون جریان صفر است.

گام دوم: در شکل (۳۶-۸ پ) همه‌ی چشمه‌های نیروی محرکه‌ی درونی مدار A را حذف کنید (یا به طور هم‌ارز، منهای آنها را به مدار A اضافه کنید). افزون بر این، به مدار B منهای نیروهای محرکه‌ی اولیه را اضافه کنید. حالا نیروهای محرکه‌ی درونی A صفر است و نیروهای محرکه‌ی درونی B برابر منهای نیروهای محرکه‌ی درونی اولیه‌ی آن است. در این گام، منهای نیروهای محرکه‌ی اولیه را به هر دو مدار افزودیم. اثر این کار این است که به جریان I اولیه مقدار $-I$ را افزودیم. پیش از آنکه این گام را برداریم، چون جریان صفر بود، حالا جریان $-I$ شده است. همان‌گونه که در شکل می‌بینید، اینک جهت جریان وارون شده است.

گام سوم: در این گام علامت همه‌ی نیروهای محرکه را عوض کنید (در B، در A و نیز علامت نیروی محرکه‌ای را که به مدار افزودیم). به مداری می‌رسیم که در شکل (۳۶-۸ ت) می‌بینید. مدار B و جریان‌ها درست همان‌هایی اند که در آغاز بودند. نتیجه می‌گیریم که از دید مدار B ، مدار A با منبع نیروی محرکه‌ی $\mathcal{E}_{\text{eq}}=-V_A^{\text{open}}$ که به طور سری به R_{eq} بسته شده است، هم ارز است. R_{eq} با نادیده گرفتن همه‌ی چشمه‌های نیروی محرکه‌ی درونی مدار A به‌دست آمده است. اثبات قضیه همین است.

در اثبات بالا از خطی بودن استفاده شد. بگذارید آن را روشن‌تر بگوییم. می‌دانیم که اگر یک $\mathcal{E}$ را به مداری مانند A که شامل تعداد دلخواه نیروی محرکه و مقاومت است، وصل کنیم جریان گذرنده از A باید به صورت $I=a\mathcal{E}+b$ باشد. این معنی خطی بودن است و a و b ثابت‌هایی اند که مقدارشان به ساختار درونی A بستگی دارد. خطی بودن نتیجه‌ی این واقعیت است

که همه‌ی معادله‌های حلقه خطی اند. بنابراین، وقتی معادله‌های حلقه‌ی قانون کیرکهوف را حل می‌کنیم و جریان را به‌دست می‌آوریم ، باید شکل بالا را داشته باشند. این رابطه را می‌توان به صورت $\mathcal{E}+b/a=I/a$ بازنویسی کرد. در این شکل، نشان می‌دهد که مدار A با یک نیروی محرکه‌ی b/a و یک مقاومت I/a هم‌ارز است. بنابراین، تنها با خطی بودن، می‌دانیم که باید برای مدار یک $\mathcal{E}_{\text{eq}}$ و یک R_{eq} یگانه وجود داشته باشد.



شکل ۳۷–۸

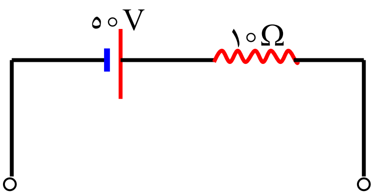
مثال ۱۷–۸ مدار هم‌ارز تونین: مدار هم‌ارز تونین را برای مدار شکل (۳۷–۸) چیست؟ اگر یک مقاومت ۱۰Ω به پایانه‌های آن وصل بشود، چه جریانی از آن خواهد گذشت؟

حل: یافتن R_{eq} آسان است. نیروهای محرکه را نادیده بگیرید (یعنی آنها را مساوی صفر قرار دهید). چیزی که باقی می‌ماند دو مقاومت ۶ اهمی موازی است که با یک مقاومت ۷ اهمی به طور سری بسته شده است. مقاومت معادل دو مقاومت ۶ اهمی یک مقاومت ۳ اهمی است. این مقاومت ۳ اهمی با مقاومت ۷ اهمی سری است. بنابراین، $R_{\text{eq}}=۳\Omega+۷\Omega=۱۰\Omega$ است.

برای یافتن $\mathcal{E}_{\text{eq}}$ توجه کنید که در مدار باز، از مقاومت ۷ اهمی جریان نمی‌گذرد. در نتیجه، ولتاژ مدار باز با ولتاژ بین نقاط a و b یکسان است. فقط در حلقه جریان وجود دارد. بنا به قانون کرکهوف داریم (جهت جریان را ساعتگرد فرض کنید)

$$۸۰\text{V}-(۶\Omega)I-۲۰\text{V}-(۶\Omega)I=۰\;\Rightarrow\; I=۵\text{A} \qquad (۹۰–۸)$$

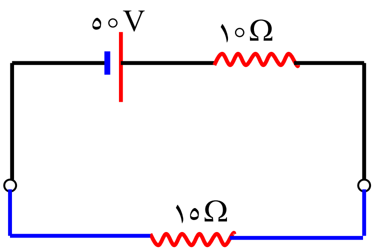
اندازه‌ی افت پتانسیل بین a و b برابر $V_b-V_a=۲۰\text{V}+(۶\Omega)(۵\text{A})=۵۰\text{V}$ است. (می‌توانستیم از شاخه‌ی بالایی حلقه هم این مقدار را به‌دست بیاوریم: $-(۶\Omega)(۵\text{A})+۸۰\text{V}=۵۰\text{V}$)، بنابراین، $\mathcal{E}_{\text{eq}}=۵۰\text{V}$ است. بنابراین، مدار هم‌ارز تونین همانند شکل (۳۸–۸) است.



شکل ۳۸–۸ مدار هم‌ارز تونین

اگر یک مقاومت۱۵ اهمی را به پایانه‌های مدار اصلی وصل کنیم، می‌توانیم از مدار هم‌ارز تونین استفاده کنیم و جریان گذرنده از مقاومت ۱۵ اهمی را به‌دست آوریم (شکل ۳۹–۸). از مدار شکل (۳۹–۸) پیداست که جریان گذرنده از مقاومت ۱۵ اهمی عبارت است از

$$\frac{۵۰\text{V}}{(۱۰\Omega+۱۰\Omega)}=۲\text{A} \qquad (۹۶–۸)$$

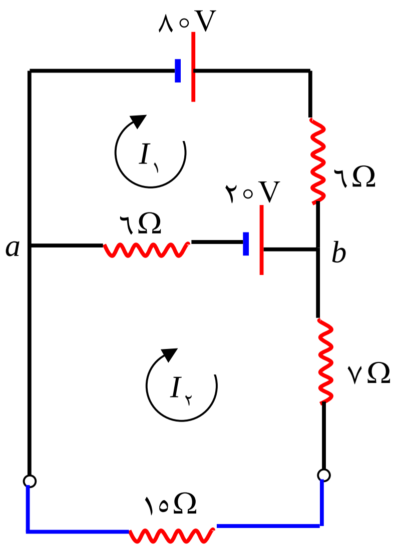


شکل ۳۹–۸

اگر باور نمی‌کنید که وقتی پایانه‌های مدار اصلی را به مقاومت ۱۵ اهمی وصل می‌کنید، همان جریان از مقاومت ۱۵ اهمی می‌گذرد که از مدار هم‌ارز تونین به‌دست آوردید، می‌توانید درستی پاسختان را با استفاده از قانون‌های کرکهوف در مدار اصلی بیازمایید. بگذارید همین کار را در این‌جا انجام دهیم. اگر یک مقاومت ۱۵ اهمی به پایانه‌های مدار اصلی وصل کنید، مدارتان یک مدار دو حلقه‌ای، همانند مداری شکل (۴۰–۸) خواهد شد. فرض کنید چرخش جریان‌ها در دو حلقه همانند شکل(۴۰–۸) است. از این شکل داریم

$$۸۰\text{V}-(۶\Omega)I_۱-۲۰\text{V}-(۶\Omega)(I_۱-I_۲)=۰ \qquad (۹۷–۸)$$

$$۲۰\text{V}(۷\Omega)I_۲-(۱۰\Omega)I_۲-(۶\Omega)(I_۱-I_۲)=۰ \qquad (۹۸–۸)$$



شکل ٤٠-٨

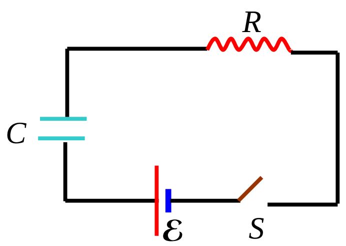
از حل این دو معادله خواهیم داشت $I_{٢} = ٢\text{A}$ که همان پاسخی است که با مدار هم‌ارز تونین به‌دست آمد. هم‌چنین $I_{١} = ٦\text{A}$ است. این جریان در مدار اولیه هم وجود داشت، اما در مدار هم‌ارز تونین بی‌معنی است. توجه کنید که ولتاژ بین پایانه‌ها در مدار بسته $(١٠\Omega)(٢\text{A}) = ٣٠\text{V}$ است. هم‌چنین افت اختلاف پتانسیل از b به a برابر ٤٤V است (هر سه مسیر ممکن بین b و a همین مقدار را به‌دست می‌دهد. آن را بیازمایید). هیچ یک از این دو پتانسیل ٤٤V و ٣٠V (که به گزینه‌ی مقاومت بیرونی بستگی دارد) با پتانسیل مدار باز ٥٥V (که به گزینه‌ی مقاومت بیرونی بستگی ندارد) برابر نیست.

٨-٧ مدار RC

در مدارهایی که تاکنون بررسی کردیم، جریان مستقیم در مدار مقدار ثابتی بود. مدارهای جریان مستقیم که در آنها افزون بر مقاومت و باتری، خازن هم وجود دارد، اگر چه جهت جریان عوض نمی‌شود، اما مقدار آن ممکن است با زمان تغییر کند. فرض کنید خازنی را باردار کردیم و در پتانسیل $V_{٠}$ قرار دارد. اگر آن را به مداری با مقاومت R وصل کنیم، بار خازن خالی می‌شود و پتانسیل دو سر خازن به صفر میل می‌کند و این به نوبه‌ی خود جریان را در مدار کاهش می‌دهد. هم‌چنین، اگر یک خازن بی بار را در مدار قرار دهیم، شارش بار آغاز می‌شود و در مدار جریان به‌وجود می‌آید و خازن باردار می‌شود. در مدت زمانی که بار بر روی خازن انباشته می‌شود، بارها از شکاف بین صفحه‌های خازن نمی‌گذرند، چون شکاف بین صفحه‌ها بمانند یک مدار باز است. بارها بین هر صفحه و سیم‌های رابط آن، بر اثر میدان الکتریکی که باتری در سیم‌ها فراهم می‌کند، انتقال پیدا می‌کنند تا این که خازن کاملا باردار بشود. با باردار شدن خازن، اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن افزایش پیدا می‌کند. بیشینه مقدار بار در صفحه‌های خازن به ولتاژ باتری بستگی دارد. وقتی بار خازن به بیشینه مقدار خود رسید، جریان در مدار صفر می‌شود، چون اختلاف پتانسیل دو سر خازن با اختلاف پتانسیل باتری برابر می‌شود.

مدارهایی که شامل مقاومت و خازن اند، مدار RC نامیده می‌شوند. در این بخش به بررسی این گونه مدارها می‌پردازیم.

نکته: هر جا که در بخش‌ها و فصل‌های پیشین در باره‌ی خازن سخن گفتیم، فرض کردیم وضعیت در حالت پایا است. یعنی در شاخه‌ای از مدار که شامل خازن بود، جریان وجود نداشت. در این بخش وضعیت‌هایی را بررسی می‌کنیم که سامانه هنوز به حالت پایا نرسیده است. در این حالت‌ها بارها حرکت می‌کنند و در سیم‌هایی که به خازن‌ها وصل اند جریان وجود دارد.♣

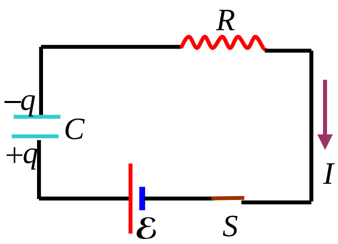


شکل ٤١-٨ مدار RC ساده

- **باردار کردن خازن:** نخست مدار ساده‌ی شکل (٤١-٨) را در نظر بگیرید که از یک باتری با نیروی محرکه‌ی الکتریکی $\mathcal{E}$، از یک مقاومت R، یک خازن C و یک کلید S تشکیل شده است. فرض کنید خازن در آغاز خالی است. در زمان $t = ٠$ کلید مدار را می‌بندیم. روشن است که خازن باردار خواهد شد و جریان در مدار شارش خواهد کرد. در شکل (٤٢-٨) این وضعیت نشان داده شده است.

برای بررسی این مدار قانون دوم کرکهوف را به کار ببرید. فرض کنید مدار را ساعتگرد می‌پیمایید. اگر بار لحظه‌ای خازن q باشد، داریم

$$\mathcal{E}-\frac{q}{C}-IR=0 \qquad (٨-٩٩)$$



شکل ٨-٤٢ مدار RC بسته

در اینجا برای $\mathcal{E}$ و R قراردادهایی را به کار بردیم که در بخش ٦-٨ پذیرفتیم. در مورد خازن، توجه کنید که ما از صفحه‌ی با بار مثبت به سوی صفحه‌ی با بار منفی می‌رویم. این بدان معنی است که پتانسیل کاهش می‌یابد. به این دلیل برای اختلاف پتانسیل دو سر خازن از علامت منفی استفاده کردیم. همچنین توجه کنید که بار q خازن و نیز جریان I مقدارهای **لحظه‌ای** اند و با زمان تغییر می‌کنند (تا با پر شدن خازن به حالت پایا برسند).

از معادله‌ی (٨-٩٩) می‌توان جریان اولیه‌ی مدار و بیشینه بار خازن را به‌دست آورد. در لحظه‌ای که کلید بسته شد ($t=0$) بار موجود در خازن صفر بود. بنابراین، معادله‌ی (٨-٩٩) نشان می‌دهد که به ازای $q=0$ جریان اولیه

$$I_0=\mathcal{E}/R \qquad (t=0 \text{ جریان در زمان}) \qquad (٨-١٠٠)$$

است. در این هنگام اختلاف پتانسیل دو سر باتری به تقریب با اخلاف پتانسیل دو سر خازن یکی است. پس از گذشت زمان درازی، بار خازن به مقدار بیشینه‌ی خود، Q، می‌رسد و خازن پر می‌شود و جریان در مدار به صفر فرو افت می‌کند. حالا اختلاف پتانسیل دو سر باتری به خازن داده شده است. اگر این شرایط را در معادله‌ی (٨-٩٩) جایگزین کنیم (یعنی $I\to 0$ و $q\to Q$)، خواهیم داشت

$$Q=C\mathcal{E} \qquad (\text{بار بیشینه}) \qquad (٨-١٠١)$$

برای این که وابستگی زمانی بار و جریان را بیابیم، باید معادله‌ی (٨-٩٩) را حل کنیم. اما این فقط یک معادله با دو متغیر q و I است. بنابراین، باید یکی از متغیرها را حذف کنیم. این کار به سادگی شدنی است، کافی است از $I\equiv dq/dt$ استفاده کنیم. در این صورت معادله‌ی (٨-٩٩) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathcal{E}-\frac{q}{C}-IR=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{q}{RC}=\frac{dq}{dt} \qquad (٨-١٠٢)$$

این یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول است. از حل آن q و وابستگی آن به زمان به‌دست می‌آید. معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{dq}{dt}=\frac{C\mathcal{E}-q}{RC} \quad\Rightarrow\quad \frac{dq}{q-C\mathcal{E}}=-\frac{1}{RC}dt \qquad (٨-١٠٣)$$

اگر از دو طرف این معادله انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\int_0^q \frac{dq'}{q'-C\mathcal{E}}=-\frac{1}{RC}\int_0^t dt' \quad\Rightarrow\quad \ell n\left(\frac{q-C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right)=-\frac{t}{RC} \qquad (٨-١٠٤)$$

یا خواهیم داشت

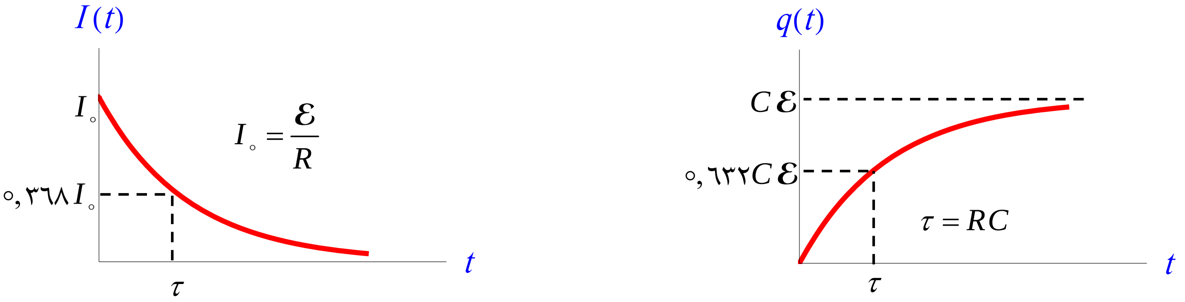
$$q(t)-C\mathcal{E}=-C\mathcal{E}e^{-t/RC} \quad\Rightarrow\quad q(t)=C\mathcal{E}\left(1-e^{-t/RC}\right)=Q\left(1-e^{-t/RC}\right) \qquad (٨-١٠٥)$$

اگر از این معادله نسبت به زمان مشتق بگیریم، رابطه‌ای برای جریان الکتریکی می‌توانیم به‌دست آوریم

$$I(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} \qquad (٨-١٠٦)$$

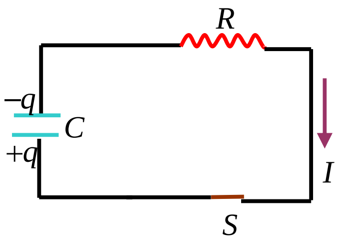
نمودارهای بار خازن و جریان مدار برحسب زمان در شکل (٨-٤٣) نشان داده شده اند. توجه کنید که در زمان $t=0$ بار برابر

صفر است و با $t \to \infty$ به بیشینه مقدار خود، $Q = C\mathcal{E}$ میل می‌کند. جریان در زمان $t = ۰$ بیشینه مقدار خود $I_۰ = \mathcal{E}/R$ را دارد و با $t \to \infty$ به طور نمایی فروافت می‌کند و به صفر می‌گراید. کمیت RC که در معادله‌های (۸-۱۰۵) و (۸-۱۰۶) ظاهر شده است، ثابت زمانی، τ، مدار نامیده می‌شود. این کمیت بعد زمان دارد و نماینده‌ی بازه‌ی زمانی است که در آن بازه جریان به $۱/e$ مقدار اولیه‌ی $I_۰$ کاهش می‌یابد. به بیان دیگر، در بازه‌ی زمان τ جریان برابر $I = e^{-۱} I_۰ = ۰,۳۶۸ I_۰$ می‌شود. همچنین در زمان τ بار خازن از صفر به مقدار $C\mathcal{E}\left(۱ - e^{-۱}\right) = ۰,۶۳۲ C\mathcal{E}$ افزایش می‌یابد



شکل ۸-۴۳ (راست): رفتار بار خازن برحسب زمان. (چپ): رفتار جریان مدار برحسب زمان

خالی کردن خازن: حالا مدار شکل (۸-۴۴) را در نظر بگیرید که شامل خازنی با بار اولیه‌ی Q، یک مقاومت و یک کلید است هنگامی که کلید باز است، اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن Q/C و بین دو سر مقاومت صفر است (چون $I = ۰$ است.) وقتی که در زمان $t = ۰$ کلید مدار بسته می‌شود، بار خازن شروع به خالی شدن می‌کند و جریان در مقاومت شارش می‌یابد. در زمان t پس از بستن کلید، جریان در مدار برابر I و بار خازن q می‌شود. مدار شکل (۸-۴۴) همان مدار شکل (۸-۴۲) است. تفاوت آنها در این است که حالا باتری وجود ندارد. با استفاده از قانون دوم کرکهوف داریم



شکل ۸-۴۴ مدار RC

$$-\frac{q}{C} - IR = ۰ \qquad (۸\text{-}۱۰۷)$$

اگر از جایگزینی $I = dq/dt$ استفاده کنیم، رابطه‌ی بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{۱}{RC}dt \qquad (۸\text{-}۱۰۸)$$

با استفاده از این واقعیت که در زمان $t = ۰$، $q = Q$ است، می‌توانیم از دو طرف رابطه‌ی بالا انتگرال بگیریم. به‌دست می‌آید:

$$\int_Q^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{۱}{RC}\int_۰^t dt' \quad \Rightarrow \quad \ell n\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad q(t) = Qe^{-t/RC} \qquad (۸\text{-}۱۰۹)$$

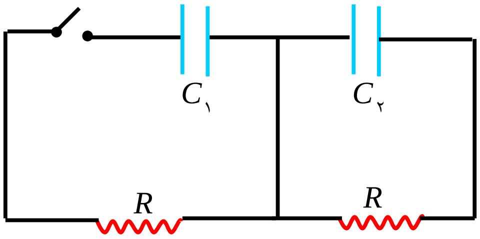
با مشتق گیری نسبت به زمان از این رابطه، جریان را برحسب تابعی از زمان به‌دست می‌دهد:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Qe^{-t/RC}\right) = -\frac{Q}{RC}e^{-t/RC} \qquad (۸\text{-}۱۱۰)$$

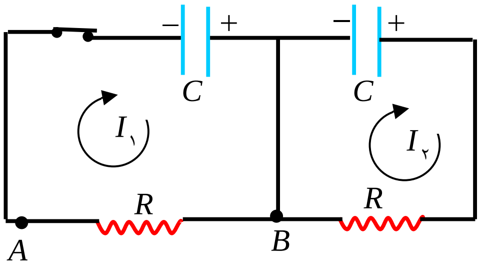
که در آن $Q/RC = I_۰$ جریان اولیه (در زمان $t = ۰$) درست پس از بستن کلید است. علامت منفی درسمت راست نشان می‌دهد که با خالی شدن خازن، جریان در مدار کاهش می‌یابد (همچنین می‌بینیم که جهت جریان در مدار خالی شدن برخلاف جهت جریان در مدار باردار کردن خازن است). توجه کنید که هر دوی بار روی خازن و جریان با زمان به طور نمایی کاهش پیدا

می‌کنند. آهنگ این کاهش با ثابت زمانی مدار، $\tau = RC$، شناسایی می‌شود.

مثال ۱۸-۸ خازن‌های پر و خالی: در مدار شکل (۴۵-۸) بار اولیه‌ی خازن C_1 برابر $Q_1(t=0)=Q_0$ و بار اولیه‌ی خازن C_2 برابر $Q_2(t=0)=0$ است. کلید در زمان $t=0$ بسته می‌شود. بارهای $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ را به‌دست آورید و انرژی تلف شده در مقاومت سمت چپ را حساب کنید. فرض کنید $C_1=C_2=C$ است.



شکل ۴۵-۸ خازن‌های پر و خالی



شکل ۴۶-۸ خازن‌های پر و خالی

حل: فرض کنید جریان در حلقه‌ها همانند شکل (۴۶-۸) است. همچنین صفحه های مثبت و منفی خازن‌ها را نشان داده‌ایم. حالا دو معادله برای دو حلقه‌ی مدار بنویسید. توجه کنید که تنها عضوهای مدار که می‌توانند نیروی محرکه‌ی الکتریکی فراهم کند، خازن‌ها هستند. پتانسیل هر خازن $V_i = Q_i(t)/C_i$ است. داریم

$$\frac{Q_1}{C_1}=\frac{Q_1}{C}=I_1R \qquad \text{(حلقه‌ی سمت چپ)} \qquad (۸-۱۱۱)$$

$$\frac{Q_2}{C_2}=\frac{Q_2}{C}=I_2R \qquad \text{(حلقه‌ی سمت چپ)} \qquad (۸-۱۱۲)$$

به یاد بیاورید که $I=-dQ/dt$ است و چون هر دو معادله یکسان اند، کافی فقط یکی از آنها را حل کنیم. با جداسازی متغیرها داریم

$$\frac{Q}{C}=-R\frac{dQ}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dQ}{dt}=-\frac{1}{RC}dt \;\Rightarrow\; -\int_0^t\frac{dt}{RC}=\int_{Q(0)}^{Q(t)}\frac{dQ}{Q} \;\Rightarrow\; -\frac{t}{RC}=\ell n\left[\frac{Q(t)}{Q(0)}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad Q_i(t)=Q_i(0)e^{-t/RC} \qquad (۸-۱۱۳)$$

حالا با جایگزینی مقدارهای اولیه به‌دست می‌آید

$$Q_1(t)=Q_0e^{-t/RC} \quad , \quad Q_2(t)=0 \qquad (۸-۱۱۴)$$

چون $Q_2(t)$ برای همه‌ی زمان‌ها صفر است، هرگز باری بر روی خازن سمت راست وجود نخواهد داشت. در نتیجه، جریان هم در حلقه‌ی سمت راست صفر است: $I_2=0$. بگذارید این وضعیت را توضیح بدهم: جریان در حلقه‌ی چپ بر اثر نشت بار از صفحه‌ی مثبت خازن C_1 به وجود می‌آید. این جریان باید به صفحه‌ی منفی خازن C_1 برسد. برای رسیدن به صفحه‌ی منفی C_1 مسیری را برمی‌گزیند که کم‌ترین مقاومت را دارد. در مدار ما مسیر با کم‌ترین مقاومت حلقه‌ی سمت چپ است. چون $I_2=0$ است، اساسا می‌توانیم حلقه‌ی سمت راست را نادیده بگیریم. در این صورت تابع نمایی کاهشی ما معنی پیدا می‌کند. توجه کنید که سریع‌ترین فروافت با R و C کوچک‌تر همراه است.

محاسبه‌ی اتلاف انرژی را به دو روش انجام می‌دهیم.

حل ۱: پس از گذشت زمان درازی بار خازن C_1 کاملا خالی خواهد شد و در مدار هیچ انرژی ذخیره نخواهد شد. همه‌ی انرژی اولیه که در خازن انباشته شده بود بایستی در مقاومت سمت چپ تلف شده باشد. بنابراین، با توجه به پایستگی انرژی، مقدار انرژی که بین زمان‌های $t=0$ و $t=\infty$ در مقاومت سمت چپ تلف شده است، همان مقداری است که نخست در خازن C_1 وجود داشت و برابر $U_i=Q_0^2/2C$ است.

حل ۲: می‌توانیم توانی را که در مقاومت تولید شده است به‌دست آوریم و سپس بر روی آن انتگرال بگیریم و انرژی اتلافی را حساب کنیم:

$$P = I_1^2 R = I_1 V_{AB} = \frac{V_{AB}^2}{R} \qquad (8-115)$$

که درآن V_{AB} اختلاف پتانسیل بین نقطه‌ی A و B در شکل (۴۶-۸) یا اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت است. با استفاده از $I_1 = -dQ_1/dt$ و معادله‌ی (۱۱۴-۸) داریم

$$I_1 = -\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(Q_0 e^{-t/RC}\right) = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \quad \Rightarrow \quad P = I_1^2 R = \frac{Q_0^2}{RC^2} e^{-2t/RC} \qquad (8-116)$$

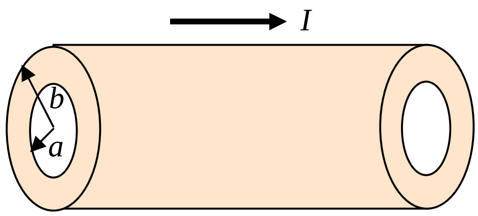
$$P = \frac{dW}{dt} \quad \Rightarrow \quad W = \int dW = \int P dt = \int_0^\infty \frac{Q_0^2}{RC^2} e^{-2t/RC} dt \qquad (8-117)$$

$$\Rightarrow \quad W = -\frac{Q_0^2}{2C} e^{-2t/RC} \Big|_0^\infty = \boxed{\frac{Q_0^2}{2C}} \qquad (8-118)$$

که همان پاسخ حل ۱ است.

مسئله‌ها

٨–١ پوسته‌ی استوانه‌ای کلفتی از یک رسانا را برابر شکل (٨–٤٧) در نظر بگیرید. شعاع درونی پوسته a وشعاع بیرونی آن b است. جریان I به طور **نایکنواخت** در سطح قاعده‌ی پوسته توزیع شده است. چگالی جریان با فاصله از سطح بیرونی پوسته به طور نمایی $J_0 e^{(r^2-b^2)/\delta^2}$ کاهش می‌یابد. ثابت δ "ژرفای پوست" نام دارد و بسیار کوچک‌تر از ضخامت $(b-a)$ پوسته است. ثابت J_0 را بیابید.



شکل ٨–٤٧ جریان در پوسته‌ی استوانه‌ای

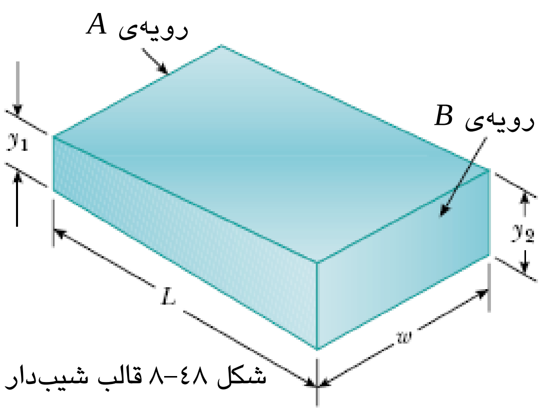
٨–٢ **میله‌ی گرم شیشه‌ای**: دو انتهای میله‌ای شیشه‌ای به طول $L = 2\,\text{cm}$ وقطر $d = 0.5\ \text{cm}$ با ماده‌ی رسانایی با رسانش بینهایت اندود شده است. این میله بخشی از یک مدار است. میله‌ی شیشه‌ای را با مشعلی گرم می‌کنیم تا به اندازه‌ای از خود جریان الکتریکی عبور دهد که لامپی روشن شود. رسانایی میله‌ی گرم با فاصله‌ی x از وسط آن به صورت $\sigma(x) = \sigma_0 L^4/x^4$ تغییر می‌کند و $\sigma_0 = 4\times10^{-2}\,(\Omega\cdot\text{m})^{-1}$ است.

(الف): مقاومت میله را حساب کنید. پاسخ را به طور نمادی بنویسید و مقدار عددی آن را تعیین کنید.

(ب): اگر اختلاف پتانسیل ΔV بین دو انتهای میله برقرار شود، چگالی جریان $\mathbf{J}(x)$ را بیابید. میدان الکتریکی $\mathbf{E}(x)$ حالت مانا را حساب کنید.

٨–٣ **رابطه‌ی بین ظرفیت و مقاومت خازن**: رسانندگی ماده‌ی دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن تخت معمولا غیر صفر σ است. فرض کنید مساحت هر صفحه‌ی خازن A و فاصله‌ی بین آن‌ها d است. ثابت دی‌الکتریک ماده‌ی بین صفحه‌ها را κ بنامید. نشان دهید که بین مقاومت R دی‌الکتریک و ظرفیت C خازن رابطه‌ی $RC = \kappa\varepsilon_0/\sigma$ وجود دارد.

٨–٤ **جسم شیب‌دار**: از ماده‌ای با مقاومت ویژه‌ی ρ قالب شیب‌داری برابر شکل (٨–٤٨) ساختیم. ارتفاع یک انتهای آن y_1 و انتهای دیگری y_2 است. طول و پهنای این قالب به‌ترتیب، L و w است. مقاومت بین رویه‌های A و B آن را بیابید. پاسخ‌تان باید برحسب کمیت‌های داده شده‌ی مسئله باشد.



شکل ٨–٤٨ قالب شیب‌دار

٨–٥ **سیم راست**: سیم راستی به طول L و به قطر d روی محور x قرار دارد. سیم از ماده‌ای ساخته شده است که از قانون اهم پیروی می‌کند. مقاومت ویژه‌ی سیم ρ است. یک انتهای سیم که در $x = 0$ است، در پتانسیل V است. انتهای دیگر آن در پتانسیا صفر است. کمیت‌های زیر را برحسب L، d، ρ، V و ثابت‌های فیزیکی به دست آورید:

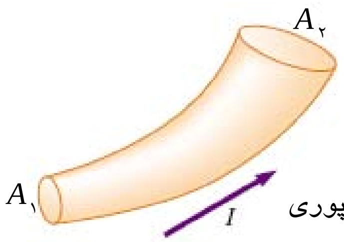
(الف): میدان الکتریکی در سیم. **(ب)**: مقاومت سیم. **(پ)**: جریان الکتریکی در سیم.

(ت): چگالی جریان در سیم. **(ج)**: نشان دهید که $\mathbf{E} = \rho\mathbf{J}$ است.

٨–٦ **رسانای شیپوری**: شکل (٨–٤٩) بخشی از یک رسانای با قطر متغیر را نشان می‌دهد. جریان I از رسانا می‌گذرد. شعاع مقطع کوچک A_1 برابر a است.

(الف): چگالی جریان گذرنده از مقطع A_1 را حساب کنید.

(ب): چگالی جریان گذرنده از مقطع A_2 اندازه‌گیری شده است و برابر یک‌چهارم مقداری است که از مقطع A_1 می‌گذرد، شعاع b را حساب کنید.



شکل ۸-۴۹ رسانای شیپوری

۸-۷ یک رابطه‌ی واقعی‌تر: وقتی یک سیم راست را گرم کنید، بنا به رابطه‌ی (۸-۳۹) مقاومت آن با $R = R_\circ\left[1+\alpha\left(T - T_\circ\right)\right]$ داده می‌شود که در آن α ضریب مقاومت گرمایی است و $R_\circ = \rho_\circ \ell_\circ / A_\circ$ است.

(الف): رابطه‌ی واقعی تر وقتی به‌دست می‌آید که علاوه بر تغییر طول سیم، تغییر سطح مقطع آن را هم در نظر بگیریم. نشان دهید که این رابطه به‌صورت زیر است:

$$R = \frac{R_\circ\left[1+\alpha\left(T - T_\circ\right)\right]\left[1+\beta\left(T - T_\circ\right)\right]}{\left[1+2\beta\left(T - T_\circ\right)\right]} \qquad (۸-۶۴)$$

که در آن β ضریب انبساط طولی است.

(ب): دو نتیجه را برای سیم مسی به طول $2\,\mathrm{m}$ و شعاع $0{,}100\,\mathrm{mm}$ که از دمای $20^\circ\,\mathrm{C}$ به دمای $100^\circ\mathrm{C}$ گرم می‌شود، مقایسه کنید. ضریب انبساط طولی مس $\beta = 17{,}0\times10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$ است.

۸-۸ مقاومت کروی: فضای بین دو پوسته‌ی کروی از ماده‌ای با مقاومت ویژه‌ی ρ انباشته شده است. شعاع درونی این ماده r_1 و شعاع بیرونی آن r_2 است $(r_2 \gg r_1)$. مقاومت بین پوسته‌ها را حساب کنید.

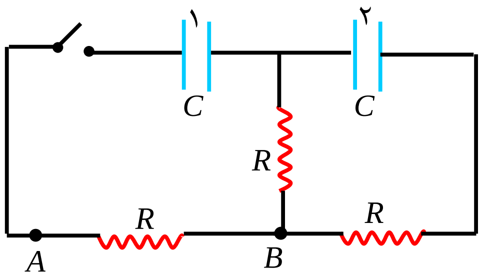
۸-۹ مکعب مقاومتی: مکعبی را در نظر بگیرید که هر لبه‌اش یک مقاومت $R_\circ$ دارد. در هر گوشه‌ی مکعب یک انتهای مقاومت‌ها به هم لحیم شده اند. مقاومت معادل را در هر یک از سه حالت زیر حساب کنید

(الف): مقاومت معادل بین دو گوشه‌ای که در دو انتهای قطر مکعب اند.

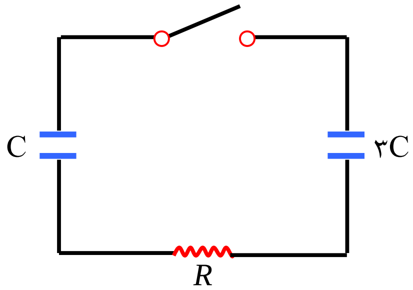
(ب): مقاومت معادل بین دو گوشه‌ی یک رویه‌ی مکعب که در دو انتهای قطر آن رویه اند

(پ): مقاومت معادل بین دو گوشه‌ی همسایه

۸-۱۰ بار خازن‌ها: در مدار شکل (۸-۵۰) خازن۱ و خازن ۲ را با بارهای اولیه‌ی $Q_1(t=0) = Q_\circ$ و خازن ۲ با بار اولیه‌ی $Q_2(t=0)=0$ در مدار قرار می‌دهیم. در زمان $t=0$ کلید مدار بسته می‌شود. $Q_1(t)$، $Q_2(t)$ را حساب کنید.



شکل ۸-۵۰ خازن‌های پر و خالی



شکل ۸-۵۱ دو خازن و مقاومت

۸-۱۱ مدار با خازن و مقاومت: مدار شکل (۸-۵۱) شامل خازنی با ظرفیت ۳C و یک مقاومت است. کلید مدار را باز نگه می‌داریم و خازن دیگری با ظرفیت C را که بار Q بر روی آن وجود دارد، در مدار قرار می‌دهیم و سپس کلید را می‌بندیم.

(الف): اختلاف پتانسیل نهایی بین صفحه‌های خازن را برحسب Q و C بیابید.

(ب): بار هر یک از خازن‌ها را بیابید.

(پ): انرژی نهایی که در هر یک از خازن‌ها انباشته شده است.

(ت): انرژی درونی که در مقاومت ظاهر می‌شود، چقدر است؟

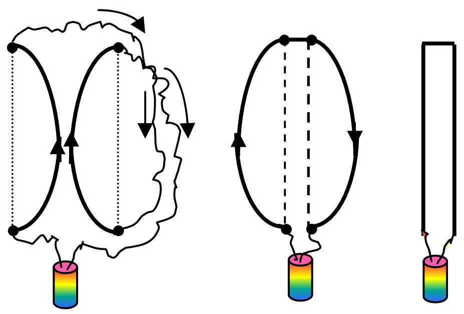
More problems to be added

فصل ۹

میدان های مغناطیسی

۱- پیش گفتار

پرسش بنیادی الکترومغناطیس را به یاد بیاورید: مجموعه‌ی بارهای الکتریکی $q_1, q_2, q_3, \cdots$ چه میدانی را در نقطه‌ای از فضا تولید می‌کنند؟ این بارها را "بارهای چشمه" نامیدیم و با استفاده از اصل برنهش، نیرویی را که آنها به "بار آزمون" Q وارد می‌کردند، حساب کردیم. تاکنون خود را به وضعیتی محدود کردیم که بارهای چشمه ساکن بودند. اینک می‌خواهیم نیروی بین بارهای در حال حرکت را بررسی کنیم. یعنی محدودیت ساکن بودن بارهای چشمه را برداریم. برای این که احساسی از آنچه را که پیش‌روست به دست بدهم، چیدمان شکل(۱-۹) را درنظر بگیرید: دو سیم موازی با فاصله‌ی اندک، از سقف آویزان اند (شکل۱-۹ الف). اگر در این سیم‌ها برابر شکل (۱-۹ ب) جریان الکتریکی برقرار شود، سیم‌های حامل جریان به سمت بیرون خمیده می‌شوند، یعنی دو سیم که جهت جریان در آن‌ها خلاف یکدیگر است، از هم دور می‌شوند. اما اگر جریان در دو سیم همسو باشد (شکل ۱-۹ پ)، دیده می‌شود که سیم‌ها بسوی هم کشیده می‌شوند. این پدیده نیازمند توجیه فیزیکی است. برای توصیف وضعیت شکل (۱-۹ ب) شاید منطقی به‌نظر برسد که بگوییم در هر دو سیم بارهای همنام حرکت می‌کنند. چون بارهای همنام یکدیگر را می‌رانند، در نتیجه سیم‌های حامل بارهای همنام باید از هم *دور* شوند. این توصیف به ظاهر پذیرفتنی است، اما نادرست است. برای این که نادرست بون آن را نشان دهید، چیدمان شکل (۱-۹ پ) را در نظر بگیرید. در این چیدمان شرایط را به گونه‌ای فراهم کردیم که جریان در سیم‌ها همسو باشند. این بار دیده می‌شود که سیم‌ها از هم دور نمی‌شوند، بلکه به یکدیگر نزدیک می‌شوند. سیم‌ها حالا یکدیگر را *می‌ربایند*. در واقع اگر یک بار آزمون را در بین دو سیم نگه دارید، خواهید دید که به آن نیرو وارد نمی‌شود. یا اگر بین دو سیم یک صفحه‌ی رسانا قرار دهید، تاثیری بر روی نیروهای رانشی و ربایشی بین دو سیم حامل جریان نخواهد داشت. پس، می‌توان نتیجه گرفت که سرشت نیرویی که به رانش و ربایش سیم‌های حامل جریان می‌انجامد از نوع نیروی الکتروستاتیکی **نیست**. این نخستین رویارویی ما با نیروی مغناطیسی است.



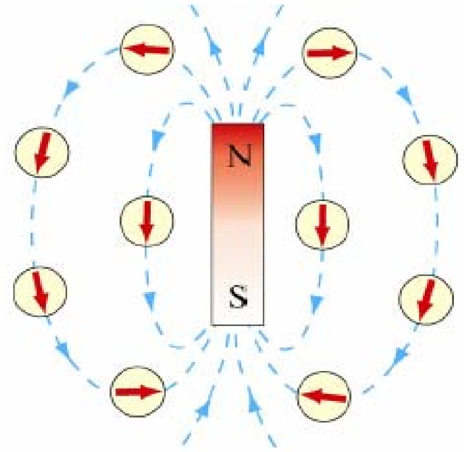
شکل ۱-۹ جریان الکتریکی در دو سیم

آزمایش با دو سیم نشان می‌دهد که سیم‌ها از نظر باری خنثی اند. البته، الکترون ها در سیم حرکت می‌کنند و در سیم‌ها جریان الکتریکی وجود دارد، اما تعداد بارهای منفی و مثبت در هر بخش سیم برابرند.

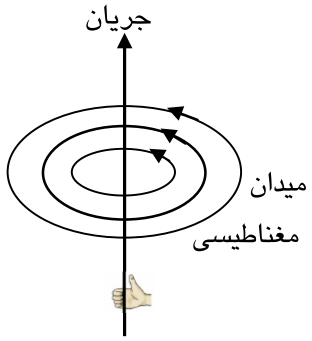
در این فصل خواهیم دید که اگر بار الکتریکی چشمه‌ای حرکت کند، افزون بر این که در فضای پیرامونش میدان الکتروستاتیکی $\mathbf{E}$ ایجاد می‌کند، میدان دیگری هم تولید می‌کند که میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ نام دارد. سیم حامل جریان همانند یک آهن ربا رفتار می‌کند.

هر جسمی که بار الکتریکی داشته باشد، در تمام نقاط فضا میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ به وجود می‌آورد. یعنی، بار الکتریکی چشمه‌ی میدان الکتریکی است. یک آهن ربای میله‌ای هم میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ تولید می‌کند. اگر قطب‌نمایی را به آهن‌ربا نزدیک کنید، خط‌های میدان مغناطیسی را می‌توانید تشخیص دهید. عقربه‌ی قطب‌نما در راستای خط‌های میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد. این وضعیت در شکل (۲-۹) نشان داده شده است. توجه کنید که آهن‌ربای میله‌ای دو قطب دارد: قطب شمال (N) و قطب جنوب

(S). میدان‌های مغناطیسی در این قطب‌ها قوی‌تر است. خط‌های میدان مغناطیسی از قطب شمال آغاز می‌شوند و در قطب جنوب پایان می‌گیرند. همین آزمایش را می‌توان با سیم حامل جریان انجام داد. اگر قطب‌نمایی را درنزدیکی سیم حامل جریان قرار دهید، می‌بینید که عقربه‌ی قطب‌نما به سوی سیم ویا در جهت دور شدن از سیم قرار نمی‌گیرد، بلکه در سویی قرار می‌گیرد



شکل ۲-۹ میدان معناطیسی آهن ربای میله ای



شکل۳-۹ جهت میدان مغناطیسی سیم حامل

که حول سیم می‌چرخد. در واقع اگر سیم را برابر شکل (۳) با دست راست به گونه‌ای بگیرید که انگشت شست در جهت جریان باشد، آنگاه خمش چهار انگشت دیگر در جهت میدان مغناطیسی خواهد بود. یک چنین میدانی چگونه می‌تواند سیم موازی حامل جریان را که در نزدیکی خود قرار دارد از خود براند و یا به سوی خود بکشد؟ به زودی به این پرسش پاسخ خواهیم داد.

آزمایشی که وجود میدان مغناطیسی را در اطراف سیم حامل جریان الکتریکی نشان داد، آزمایش هانس کریستین اورستد* بود. او در زمستان ۱۸۲۰-۱۸۱۹ در کلاس درسش سیمی را به باتری وصل کرد و از آن جریان گذراند و سپس سیم را در جهت عمود بر عقربه‌ی قطب‌نما قرار داد. هیچ اتفاقی بر عقربه نیفتاد. پس از پایان درس، سیم حامل جریان را موازی عقربه‌ی قطب‌نما قرار داد. این بار عقربه چرخید. وقتی جهت جریان را وارون کرد، عقربه در سوی مخالف چرخید. با اعلام این خبر، آزمایشهای زیادی انجام گرفت. طولی نکشید که آمپر، فاراده و دیگران، اثرهای مغناطیسی جریان الکتریکی را توصیف کردند. دوازده سال پس از آزمایش اورستد، فاراده القاء الکترومغناطیسی را کشف کرد. سرانجام، مکسول توانست الکترومغناطیس کلاسیک را به زبان ریاضی فرمول‌بندی کند. هرتز با نمایش امواج الکترومغناطیسی در سال ۱۸۸۸، شکوه این نظریه را نشان داد. ریشه‌های تاریخی نظریه‌ی نسبیت خاص هم در الکترومغناطیس است. در واقع، عنوان مقاله‌ای که اینشتین در سال ۱۹۰۵ به چاپ رساند و نظریه‌ی نسبیت خاص خود را به جهانیان اعلام کرد، "نظریه‌ی نسبیت" نبود. عنوان آن "درباره‌ی الکترودینامیک اجسام متحرک"◊ بود.

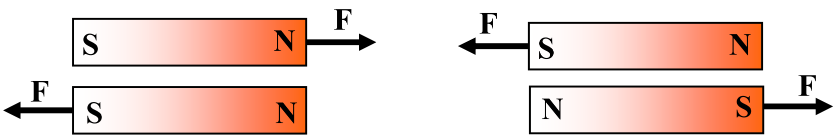
بارهای الکتریکی را می‌توان منزوی کرد. به یاد بیاورید که یک بار الکتریکی نقطه‌ای را تک قطبی الکتریکی نامیدیم. اما دو قطب مغناطیسی همیشه به صورت جفت ظاهر می‌شوند. نمی‌توان فقط قطب شمال یا قطب جنوب مغناطیسی داشت. اگر یک آهن‌ربای میله‌ای را همانند شکل (٤-۹) به دو نیم کنید دو آهن‌ربای میله‌ای به‌وجود می‌آید که هر کدام قطب جنوب و قطب شمال خود را دارند. به بیان دیگر" تک قطبی" مغناطیسی به طور منزوی وجود ندارد. در برخی نظریه‌ها، وجود تک قطبی مغناطیسی پیش

* Hans Christian Oersted
◊ On the Electrodynamics of Moving Bodies

بینی می‌شود و به طور نظری جالب اند، با وجود این، تاکنون کسی نتوانسته است آن را به‌طور تجربی پیدا کند.
اگر دو آهن‌ربای میله‌ای را به هم نزدیک کنید، می‌بینید که قطب‌های همنام یکدیگر را می‌رانند و قطب‌های ناهمنام یکدیگر را می‌ربایند. در شکل (٥-٩) این وضعیت ها را می‌توانید ببینید.



شکل ۴-۹ قطب مغناطیسی منزوی وجود ندارد



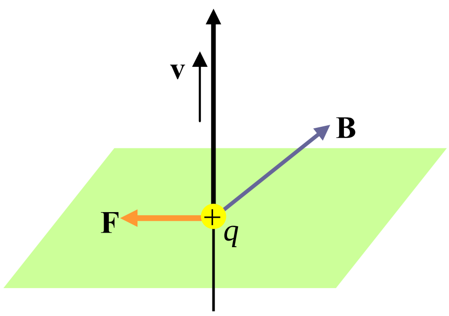
شکل ۵-۹ نیروی ربایشی و رانشی مغناطیسی

۲- تعریف میدان مغناطیسی و قانون نیروی لورنتس

چگونه می‌توان میدان مغناطیسی را تعریف کرد؟ میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را به‌صورت نیرو بر واحد بار الکتریکی نوشتیم

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{q} \qquad (٩-١)$$

اما ، تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد که جای بار الکتریکی را بگیرد. بنابراین، میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را باید به گونه‌ی دیگری تعریف کرد. بار الکتریکی q را در نظر بگیرید که برابر شکل (٦-٩) با سرعت $\mathbf{v}$ در ناحیه‌ای از فضا حرکت می‌کند. فرض کنید که در این ناحیه میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ وجود دارد که جهتش به سوی درون صفحه است. به طور تجربی می‌توان نکات زیر را مشاهده کرد.



شکل۶-۹ جهت نیروی

۱- اندازه‌ی نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_B$ که به بار الکتریکی وارد می‌شود، با مقدار بار q و سرعت v آن متناسب است.

۲- اندازه و جهت $\mathbf{F}_B$ به $\mathbf{B}$ و $\mathbf{v}$ وابسته است.

۳- وقتی که $\mathbf{B}$ و $\mathbf{v}$ موازی اند، اندازه‌ی $\mathbf{F}_B$ صفر می‌شود. وقتی که $\mathbf{B}$ با $\mathbf{v}$ زاویه‌ی θ می‌سازد جهت $\mathbf{F}_B$ به هر دوی $\mathbf{B}$ و $\mathbf{v}$ عمود و اندازه‌اش با $\sin\theta$ متناسب می‌شود.

٤- وقتی علامت بار q از مثبت به منفی یا برعکس تغییر می‌کند، جهت $\mathbf{F}_B$ هم وارون می‌شود.

این مشاهده ها را می توان در رابطه‌ی (٢-٩) خلاصه و با آن بیان کرد.

$$\mathbf{F}_B=q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad (٩-٢)$$

رابطه‌ی (٢-٩) را می‌توان تعریف عملی میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ در نقطه‌ای از فضا دانست. نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_B$ تنها بخشی از نیرویی است که به بار q وارد می‌شود، بخشی که به متحرک بودن آن مربوط است. در این فصل می‌خواهیم ببینیم چرا نیروی

متناسب با سرعت وجود دارد. متناسب بودن این نیرو با $\mathbf{v}$ به‌راستی چشم‌گیر است. نیروی الکتروستاتیکی $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ که به بار q وارد می‌شود به سرعت بستگی ندارد. اندازه‌ی نیروی مغناطیسی

$$F_B = |q| vB \sin\theta \qquad (۹-۳)$$

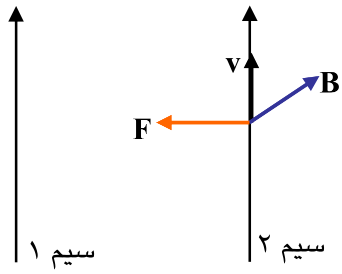
است. توجه کنید که $\mathbf{F}_B$ همواره بر $\mathbf{v}$ و بر $\mathbf{B}$ عمود است.

در یکاهای SI، یکای میدان مغناطیسی تسلا[†] (T) است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$۱\ \text{Tesla} = \frac{۱\,\mathrm{N}}{\mathrm{C.m/s}} = ۱\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A.m}} \qquad (۹-٤)$$

یکای دیگری که از آن استفاده می‌شود گاوس (G) است. رابطه‌ی بین تسلا و گاوس به صورت $۱\ \mathrm{T} = ۱۰^{٤}\ \mathrm{G}$ است.

اینک می‌توانیم به پرسشی که در بالا مطرح کردیم، پاسخ دهیم: دو سیم حامل جریان چگونه یکدیگر را می‌رانند و یا یکدیگر را می‌ربایند؟ برابر شکل (۹-۷) سیم سمت چپ در مکان سیم سمت راست میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند. جهت این میدان در مکان سیم ۲ به سوی *درون صفحه* است. بردار سرعت بارها در سیم ۲ روبه بالا است و جهت نیرو به سمت چپ است. این همان وضعیتی است که در شکل (۹-۱ پ) وجود دارد. اگر جهت بردار سرعت در سیم ۲ رو به پایین باشد، جهت نیروی $\mathbf{F}$ به سمت راست خواهد شد. یعنی دو سیم حامل جریان یکدیگر را خواهند راند. این وضعیت شکل (۹-۱ ب) است.



شکل ۹-۷ نیروی مغناطیسی بین دو سیم حامل

رابطه‌ی (۹-۲) به درستی این رفتارها را توصیف می کند. اگر رابطه‌های (۹-۱) و (۹-۲) را با هم ترکیب کنیم **قانون نیروی لورنتس**[‡] به‌دست می‌آید

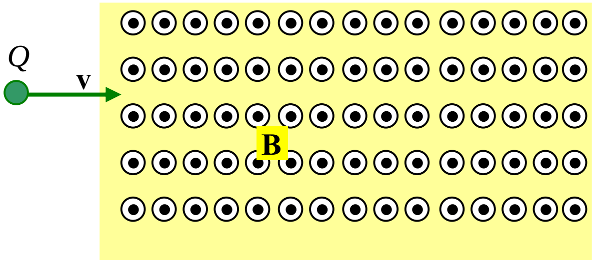
$$\mathbf{F} = q\left[\mathbf{E} + (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\right] \qquad (۹-۵)$$

نیروی لورنتس نیروی کل الکترومغناطیسی است که به بار q وارد می‌شود. رابطه‌ی (۹-۵) می‌گوید اگر بار الکتریکی q در ناحیه‌ای از فضا که شامل میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی است، با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت کند هم نیروی الکتریکی و هم نیروی مغناطیسی به آن وارد می‌شود. رابطه‌ی (۹-۵) جمع برداری این دو نیرو است. توجه کنید که اگر سرعت بار q صفر باشد، اگرچه در میدان مغناطیسی قرار دارد، اما به آن نیروی مغناطیسی وارد نمی‌شود و $\mathbf{F}_B = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = ۰$ می‌شود. در این صورت به بار q فقط نیروی الکتریکی به آن وارد می‌شود. *بار الکتریکی ساکن وجود میدان مغناطیسی را حس نمی‌کند.*

توجه کنید که رابطه‌ی (۹-۵) را ما اثبات نکردیم. مثل قانون کولمب، قانون نیروی لورنتس هم فرض نظریه است و درستی آن را آزمایش نشان می‌دهد. برای یافتن نیروی لورنتس باید روش محاسبه‌ی میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را بیاموزیم (وقتی که بار الکتریکی حرکت می‌کند، قاعده‌ی محاسبه‌ی میدان الکتریکی هم پیچیده‌تر می‌شود و در نتیجه میدان $\mathbf{E}$ را هم باید حساب کنیم). این موضوع فصل آینده است. پیش از پرداختن به آن، رفتار ذره‌ی باردار را در میدان مغناطیسی یکنواخت بررسی می‌کنیم.

مثال ۹-۱ در شکل (۹-۸) ذره‌ای به جرم m و بار Q با سرعت اولیه‌ی $\mathbf{v}$ به ناحیه‌ای از فضا با میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$

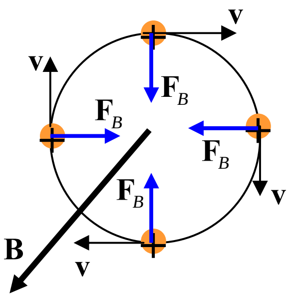
[†] Tesla
[‡] Lorentz force law



شکل ۹-۸ ذره ی باردار در میدان مغناطیسی یکنواخت

وارد می‌شود. جهت میدان بر صفحه عمود و به‌سوی بیرون است. جرم m چه مسیری را در این میدان خواهد پیمود؟

حل: در هر لحظه نیروی مغناطیسی بر سرعت بار عمود است. این دقیقا همان نیرویی است که برای ایجاد حرکت دایره‌ای لازم است. در شکل (۹-۹) نیروی وارد به بار مثبت Q در چند نقطه نشان داده شده است. شعاع مسیر را می‌توان به آسانی حساب کرد. نیروی مغناطیسی به‌سوی مرکز دایره است و اندازه‌ی آن مقدار ثابت $|\mathbf{F}_B|=QvB$ است. این نیرو با نیروی مرکزگرای $F_{\text{cent.}}=m\left(v^{۲}/R\right)$ برابر است. بنابراین



شکل ۹-۹ مسیر ذره‌ی باردار با سرعت اولیه‌ی **v** عمود بر میدان یکنواخت **B**.

$$QvB=m\frac{v^{۲}}{R}\Rightarrow\ p=QBR \qquad (۹-٦)$$

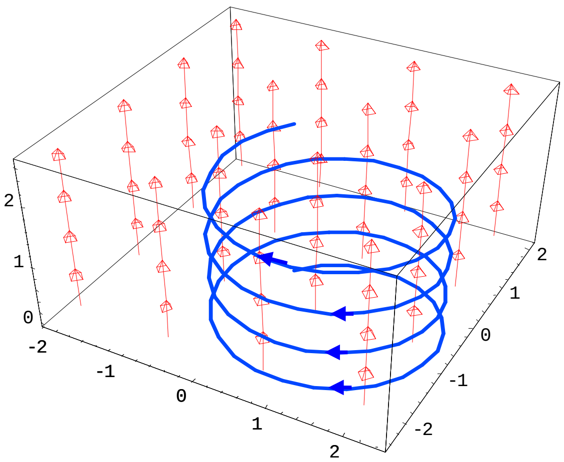
که در آن p تکانه‌ی جرم باردار است. رابطه‌ی (۹-٦) فرمول سیکلوترون است؛ چون حرکت جرم را در سیکلوترون توصیف می‌کند. سیکلوترون وسیله‌ای است که با آن به ذره‌های باردار شتاب می‌دهند. از رابطه‌ی (۹-٦) می‌توان شعاع مسیر، R، را به‌دست آورد: $R=mv/QB$. اگر بار Q مثبت باشد، حرکت ساعتگرد و اگر بار ذره منفی باشد، حرکت آن پاد ساعتگرد است. دوره‌ی T (زمان یک دور چرخش) حرکت عبارت است از

$$T=\frac{۲\pi R}{v}=\frac{۲\pi}{v}\frac{mv}{QB}=\frac{۲\pi m}{QB} \qquad (۹-۷)$$

وسرعت زاویه‌ای یا بسامد سیکلوترون (ω) برابر

$$\omega=۲\pi f=\frac{v}{R}=\frac{QB}{m} \qquad (۹-۸)$$

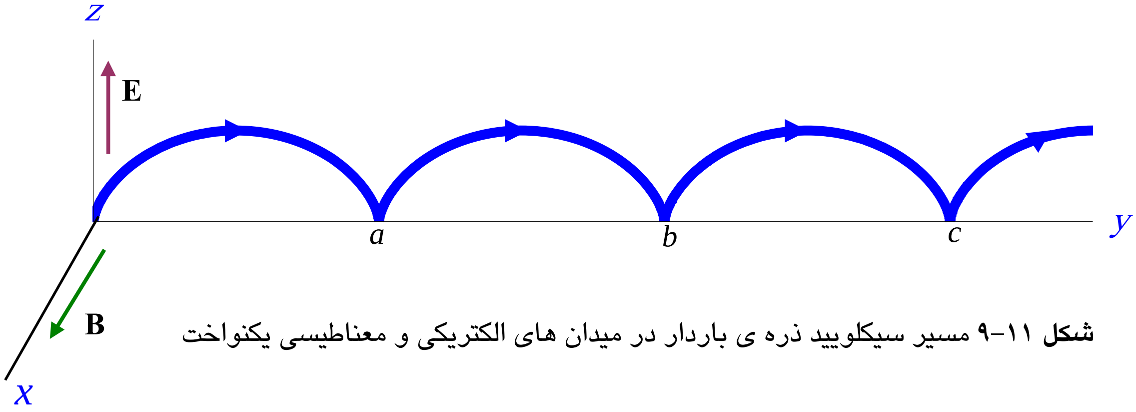
است. در مثال بالا فرض کردیم ذره در صفحه‌ای حرکت می‌کند که بر میدان **B** عمود است. اگر ذره با سرعت اولیه‌ای وارد میدان شود که مولفه‌ای هم موازی میدان **B** داشته باشد، $v_{\parallel}$، بنابه رابطه‌ی (۹-۲) نیروی مغناطیسی تاثیری در این مولفه نخواهد داشت و ذره در مسیری مارپیچ همانند شکل (۹-۱۰) حرکت خواهد کرد.



شکل ۹-۱۰ مسیر مارپیچی ذره‌ی باردار با مولفه‌ی سرعت $v_{\parallel}$ موازی میدان یکنواخت **B**

مثال ۹-۲ حرکت سیکلوییدی: اگر افزون بر میدان مغناطیسی یکنواخت **B**، میدان الکتریکی **E** عمود بر میدان مغناطیسی هم به ذره‌ی باردار اثر کند، مسیر ذره جالب‌تر می‌شود. فرض کنید میدان **B** در راستای محور x و میدان **E** در جهت محور z باشد. ذره از مبداء مختصات با سرعت اولیه‌ی صفر رها می‌شود. مسیر ذره چگونه خواهد بود؟

حل [۱]: نخست، به طور کیفی مسئله را بررسی کنید. ذره در آغاز بدون حرکت و سرعتش صفر است. بنابراین ، نیروی مغناطیسی به آن وارد نمی‌شود. اما میدان الکتریکی به ذره‌ی باردار نیرو وارد می‌کند و در جهت محور z به آن شتاب می‌دهد. با سرعت گرفتن ذره، نیروی مغناطیسی به وجود می‌آید و بنا به رابطه‌ی (۲-۹)، ذره‌ی باردار را برابر شکل (۱۱-۹) به سمت راست منحرف می‌کند. هر چه سرعت ذره بیشتر باشد نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_B$ وارد به آن نیز قوی‌تر است. این نیرو ذره را به حرکت دایره‌ای وادار می‌کند و سرانجام آن را به سوی م حور y منحرف می‌کند. در این هنگام ذره در جهت خلاف میدان الکتریکی حرکت می‌کند و در نتیجه، نیروی الکتریکی سرعت ذره را کند می‌کند. با کاهش سرعت، نیروی مغناطیسی کاهش می‌یابد و نیروی الکتریکی چیره می‌شود و ذره را در نقطه‌ی a به سکون وامی‌دارد. این فرایند دوباره از نقطه‌ی a خود را تکرار می‌کند و ذره را به نقطه‌ی b می‌رساند و ....



شکل ۱۱-۹ مسیر سیکلویید ذره ی باردار در میدان های الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت

اینک به حل مسئله می‌پردازیم. در راستای محور x به ذره نیرویی وارد نمی‌شود. مکان ذره را در هر زمان t می‌توان با بردار $(\circ, y(t), z(t))$ نشان داد. بردار سرعت ذره عبارت است از $\mathbf{v}=(\circ,\dot{y},\dot{z})$. چون $\mathbf{B}=(B,\circ,\circ)$ است، ضرب برداری $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ را به آسانی می‌توان حساب کرد:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \circ & \dot{y} & \dot{z}\\ B & \circ & \circ\end{vmatrix}=(B\dot{z})\hat{\mathbf{j}}-(B\dot{y})\hat{\mathbf{k}} \qquad (۹-۹)$$

از قانون دوم نیوتون داریم

$$\mathbf{F}=Q\left[\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right]=Q\left[(E)\hat{\mathbf{k}}+(B\dot{z})\hat{\mathbf{j}}-(B\dot{y})\hat{\mathbf{k}}\right]=m\mathbf{a}=m\left[\ddot{y}\hat{\mathbf{j}}+\ddot{z}\hat{\mathbf{k}}\right] \qquad (۹-۱۰)$$

یا اگر مولفه‌های $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ را جداگانه بنویسیم داریم

$$QB\dot{z}=m\ddot{y} \quad , \quad QE-QB\dot{y}=m\ddot{z} \qquad (۹-۱۱)$$

در رابطه‌ی (۸-۹) بسامد سیکلوترون را با $\omega=QB/m$ تعریف کردیم. معادله‌های حرکت، رابطه‌های (۱۱-۹) ، برحسب این کمیت به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\ddot{y}=\omega\dot{z} \quad , \quad \ddot{z}=\omega\left(\frac{E}{B}-\dot{y}\right) \qquad (۹-۱۲)$$

---

[۱] برگرفته از: David J. Griffiths, “Introduction To Electrodynamics”, 2nd Ed. Printice Hall, 1989.

این ها معادله‌های دیفرانسیل جفت شده اند. اگر از اولی نسبت به زمان مشتق بگیرید، $\dot{z}$ را می‌توانید از معادله‌ی دوم حذف کنید. .حاصل، اما معادله‌ی دیفرانسیل درجه سه برحسب $\dot{y}$ و $\ddot{y}$ خواهد شد. پاسخ‌های عمومی به‌صورت زیر اند

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B} t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4 \end{aligned} \qquad (۹-۱۳)$$

چهارثابت C_i با چهار شرط اولیه $\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ و $y(0) = z(0) = 0$ تعیین می‌شوند و خواهیم داشت

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}\left(\omega t - \sin \omega t\right) \quad , \quad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t) \qquad (۹-۱۴)$$

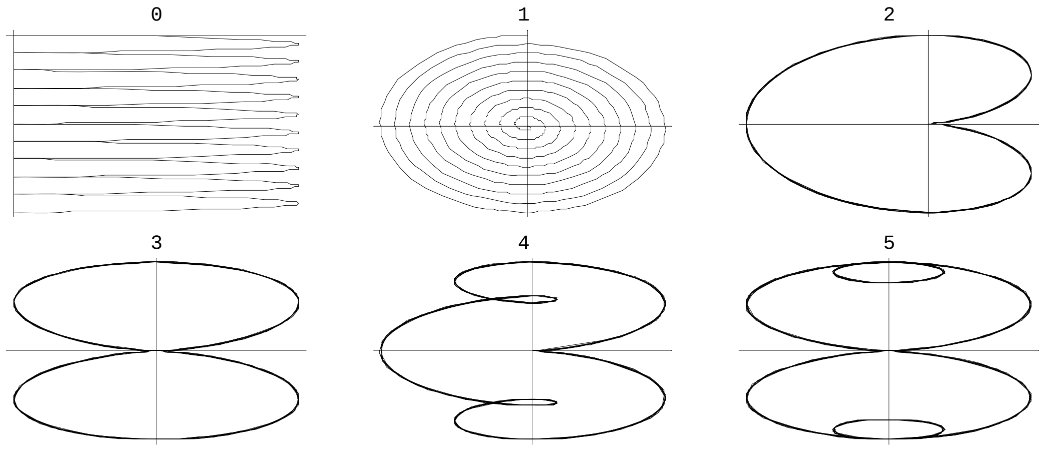
با تعریف $R \equiv E/\omega B$ و با استفاده از $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ می‌توان سینوس و کسینوس‌ها را حذف کرد. معادله‌ی دایره‌ای به شعاع R به‌دست می‌آید که مرکزش در $(0, R\omega t, R)$ قرار دارد و در راستای محور y با سرعت ثابت $v = \omega R = E/B$ حرکت می‌کند. مسیر حرکت در شکل (۱۱-۹) نشان داده شده است.

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2 \qquad (۹-۱۵)$$

حل کامل این مسئله و جزییات ریاضی آن در پیوست همین فصل آمده است.

مسئله‌های محاسباتی: ۱- مثال بالا را نگارنده با استفاده از نرم افزار Mathematica حل کرده است. بکوشید نتایج بالا را با استفاده از Mathematica یا هر روش دیگری به طور عددی حل کنید.

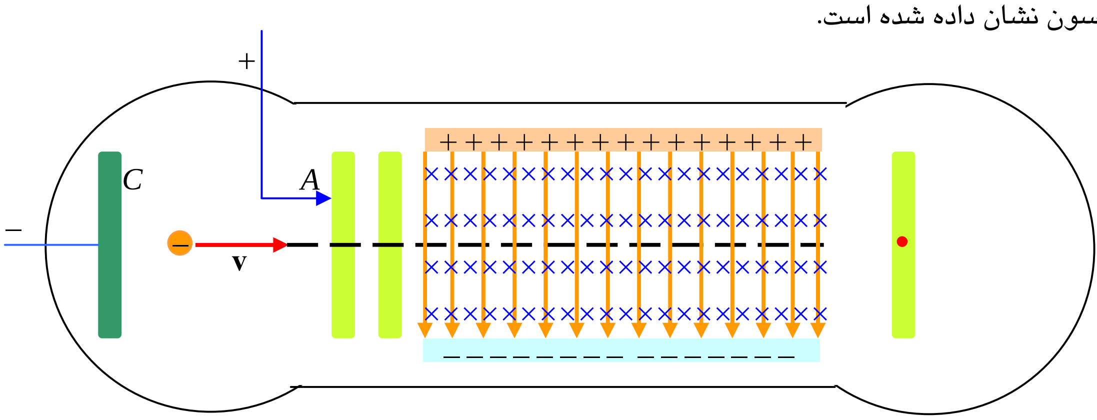
۲- **حرکت ذره‌ی باردار در میدان مغناطیسی یکنواخت و میدان الکتریکی وابسته به زمان.** ذره‌ای با بار q از حالت سکون از مبداء مختصات رها شده است. میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{k}}$ در راستای محو z و میدان الکتریکی وابسته به زمان $\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t\, \hat{\mathbf{i}}$ در راستای محور x اند. حرکت ذره را بیابید و مسیر آن را برای مقادیر متفاوت پارامترهای $\{\omega, E, B\}$ رسم کنید. گزیده‌ای از مسیر ها در شکل (۱۲-۹) نشان داده شده‌است



شکل ۱۲-۹ گزیده ای از مسیر های حرکت ذره ی باردار در میدا یکنواخت $\mathbf{B}$ و میدان وابسته به زمان $\mathbf{E}(t)$ برای پارامترهای مختلف.

۳- کاربردهای قانون نیروی لورنتس

سرند سرعت: وقتی ذره‌ی بارداری در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی باشد، نیروی کل وارد بر آن با قانون لورنتس ، رابطه‌ی (۴-۹) ، داده می‌شود. با اعمال هر دو میدان **B** و **E** می‌توان ذره‌ای را که با سرعت معین حرکت می‌کند از بقیه‌ی ذره-ها جدا کرد. جی. جی تامسون از این اصل برای اندازه گیری نسبت بار به جرم الکترون استفاده کرد. در شکل (۱۳-۹) نمایی از ابزار تامسون نشان داده شده است.



شکل ۱۳-۹ ابزار تامسون برای اندازه گیری e/m الکترون

الکترون‌های با جرم m و بار $q=-e$ از کاتد C گسیل می‌شوند. بین کاتد C و آند A اختلاف پتانسیل $V_A-V_C=\Delta V$ وجود دارد که به الکترون شتاب می‌دهد. تغییر انرژی پتانسیل الکترون‌ها برابر است با مقدار کاری که برای شتاب دادن آنها انجام گرفته است: $\Delta U=W=q\Delta V=-e\Delta V$. از پایستگی انرژی می‌دانیم که افزایش انرژی جنبشی الکترون $\Delta T=-\Delta U=mv^۲/۲$ است. پس، سرعت الکترون عبارت است از

$$v=\sqrt{\frac{۲e\Delta V}{m}} \qquad (۹-۱۵)$$

این الکترون‌ها وارد ناحیه‌ای می‌شوند که میدان الکتریکی رو به پایین وجود دارد. در این ناحیه، الکترونِ با بار منفی به سوی بالا منحرف می‌شود. افزون بر میدان الکتریکی، در این ناحیه میدان مغناطیسی به سوی درون صفحه هم وجود دارد و به الکترون نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_B=-e\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ و به سوی پایین وارد می‌کند. پس، به الکترون دو نیرو وارد می‌شود، یکی رو به بالا و دیگری رو به پایین. وقتی اندازه‌ی این دو نیرو برابر باشند، یکدیگر را حذف می‌کنند و الکترون در مسیر راستخط حرکت می‌کند. از رابطه‌ی (۴-۹) دیده می‌شود که دو نیرو یکدیگر را وقتی حذف می‌کنند که داشته باشیم $eE=evB$ یا

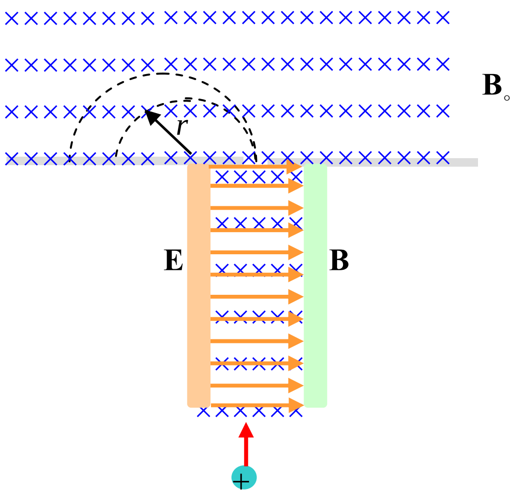
$$v=\frac{E}{B} \qquad (۹-۱۶)$$

به بیان دیگر، فقط ذره های با سرعت $v=E/B$ روی خط راست حرکت خواهند کرد و ذره‌های با سرعت‌های دیگر یا به بالا و یا به پایین منحرف خواهند شد. از ترکیب دو رابطه ی (۱۵-۹) و (۱۶-۹) داریم

$$\frac{e}{m}=\frac{E^۲}{۲(\Delta V)B^۲} \qquad (۹-۱۷)$$

با اندازه‌گیری E, ΔV و B نسبت بار به جرم الکترون به دست می‌آید. دقیق‌ترین مقدار اندازه‌گیری شده تا به امروز $e/m=۱{,}۷۵۸۸۲۰۱۷۴(۷۱)\times۱۰^{۱۱}\ \mathrm{C/Kg}$ است.

طیف سنج جرم: برای اندازه‌گیری جرم اتم روش‌های مختلف وجود دارد. یکی از آنها استفاده از طیف سنج جرم است. شمایی از آن در شکل (۹-۱٤) دیده می‌شود. ذره‌ی با بار $+q$ (یعنی اتم یونیده) نخست از سرند سرعت می‌گذرد. میدان‌های الکتریک و مغناطیسی سرند سرعت در رابطه‌ی $E = vB$ (رابطه ی (۹-۱٦)) صدق می‌کنند. بنابراین، ذره در مسیر راست‌خط حرکت می‌کند و سپس وارد ناحیه‌ای می‌شود که میدان مغناطیسی دیگر $\mathbf{B}_{\circ}$ به سوی درون صفحه قرار دارد. در این ناحیه ذره در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. شعاع دایره برابر است با



شکل ۹-۱۴ شمای طیف سنج جرم

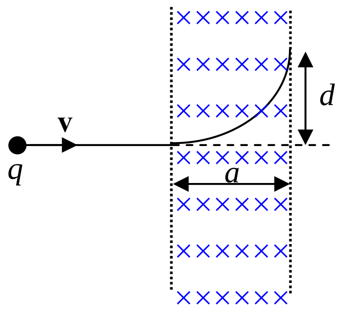
$$r = \frac{mv}{qB_{\circ}} \qquad (۹-۱۸)$$

بنابراین، شعاع مسیر به جرم ذره بستگی دارد. اتمهای با جرم‌های متفاوت در مسیرهای متفاوت حرکت می‌کنند و سرانجام با صفحه‌ی عکاسی برخورد می کنند. چون $v = E/B$ است، پس جرم ذره را می توان به صورت زیر نوشت

$$m = \frac{qB_{\circ}r}{v} = \frac{qB_{\circ}Br}{E} \qquad (۹-۱۹)$$

میدان‌های $\mathbf{B}$، $\mathbf{B}_{\circ}$ و $\mathbf{E}$ شناخته شده اند، چون آنها را خودمان آراسته‌ایم. با اندازه‌گیری شعاع r اندازه‌ی جرم هر دسته از اتم-ها به دست می‌آید.

مثال ۹-۳ ذره ای با بار q وارد ناحیه‌ای از فضا می‌شود که میدان مغناطیسی در آنجا یکنواخت $\mathbf{B}$ وبه سوی درون صفحه است. پهنای این ناحیه a است. ذره برابر شکل (۹-۱۵) در میدان مغناطیسی به اندازه‌ی d از مسیر اصلی خود به بالا منحرف می‌شود. بار ذره مثبت است یا منفی؟ تکانه‌ی ذره را برحسب a, d و q, B به‌دست آورید.

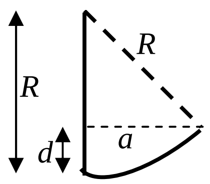


شکل ۹-۱۵ انحراف ذره در میدان

حل: چون جهت $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ رو به بالا است و این همچنین جهت نیروی مغناطیسی است، بنابراین q باید **مثبت** باشد. نخست شعاع R خم مسیر را برحسب a و d به دست آوریم. از شکل (۹-۱٦) دیده می‌شود که

$$(R-d)^{۲} + a^{۲} = R^{۲} \Rightarrow R^{۲} - ۲Rd + d^{۲} + a^{۲} = R^{۲} \text{ یا } ۲Rd = a^{۲} + d^{۲}$$

ودر نتیجه $R = (a^{۲} + d^{۲})/۲d$. از فرمول سیکلوترون داریم $p = qBR$ و بنابراین، $p = qB\left((a^{۲}+d^{۲})/۲d\right)$.



شکل ۹-۱۶

مثال ۹-۴ مسیر ذره‌ی مثال ۹-۲ را با شرایط اولیه زیر بیابید و آن‌ها را رسم کنید. ذره از مبداء با سرعت‌های زیر حرکت می کند. **(الف)**: $\mathbf{v}(\circ) = (E/B)\hat{\mathbf{j}}$ ، **(ب)**: $\mathbf{v}(\circ) = (E/۲B)\hat{\mathbf{j}}$ و **(پ)**: $\mathbf{v}(\circ) = (E/B)(\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})$.

حل: های عمومی با رابطه (۹-۱۲) داده شده اند.

$$y(t)=C_۱\cos\omega t+C_۲\sin\omega t+\frac{E}{B}t+C_۳ \quad , \quad z(t)=C_۳\cos\omega t-C_۱\sin\omega t+C_٤ \qquad (۹-۲۰)$$

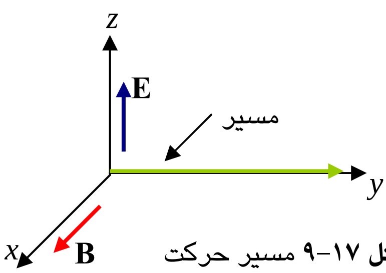
(الف): از $y(\circ)=z(\circ)=\circ$ و $\dot y(\circ)=E/B$ و $\dot z(\circ)=\circ$ برای به دست آوردن $C_۱, C_۲, C_۳ C_٤$ استفاده کنید. داریم

$$y(\circ)=\circ\Rightarrow C_۱+C_۳=\circ, \quad \dot y(\circ)=\omega C_۲+\frac{E}{B}=\frac{E}{B}\Rightarrow C_۲=\circ$$
$$z(\circ)=\circ\Rightarrow C_۲+C_٤=\circ, \quad \therefore\ C_٤=\circ \quad ; \quad \dot z(\circ)=\circ\Rightarrow C_۱=\circ. \quad \therefore C_۳=\circ \qquad (۹-۲۱)$$

بنابراین، داریم

$$y(t)=\frac{E}{B}t; \quad z(t)=\circ \qquad (۹-۲۲)$$

مسیر، خط راستی در امتداد محور y است و در شکل (۹-۱۷) نشان داده شده است. آیا این پاسخ پذیرفتنی است؟ نیروی مغناطیسی عبارت است از $q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})=-q(E/B)B\,\hat{\mathbf{k}}=-q\,\mathbf{E}$ که درست نیروی الکتریکی را حذف می‌کند. پس، نیروی برآیند وارد به ذره صفر است. بنابراین، مسیر خط راستی با سرعت ثابت می‌شود.



شکل ۹-۱۷ مسیر حرکت

(ب): با فرض این که ذره از مبداء شروع به حرکت می‌کند، داریم $C_۳=-C_۱$ و $C_٤=-C_۲$. پس

$$\dot z(\circ)=\circ \ \Rightarrow\ C_۱=\circ\Rightarrow C_۳=\circ$$
$$\dot y(\circ)=\frac{E}{۲B}\Rightarrow C_۲\omega+\frac{E}{B}=\frac{E}{۲B}\ \Rightarrow C_۲=-\frac{E}{۲\omega B}=-C_٤$$
$$\Rightarrow\Rightarrow\ y(t)=-\frac{E}{۲\omega B}\sin\omega t+\frac{E}{B}t; \qquad z(t)=-\frac{E}{۲\omega B}\cos\omega t+\frac{E}{۲\omega B} \qquad (۹-۲۳)$$

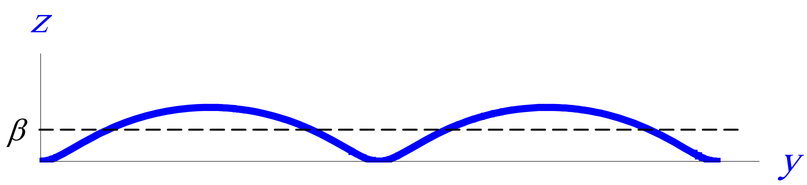
یا

$$y(t)=\frac{E}{۲\omega B}\left[۲\omega t-\sin\omega t\right] \ ; \quad z(t)=\frac{E}{۲\omega B}\left[۱-\cos\omega t\right] \qquad (۹-۲٤)$$

با تعریف $\beta\equiv E/2B\omega$ رابطه‌های بالا به صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{cases} y=\beta\left[۲\omega t-\sin\omega t\right] \ \Rightarrow\ (y-۲\beta\omega t)=-\beta\sin\omega t \\ z=\beta(۱-\cos\omega t)\ \Rightarrow\ (z-\beta)=-\beta\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow\ (y-۲\beta\omega t)^۲+(z-\beta)^۲=\beta^۲ \qquad (۹-۲۵)$$

که دایره‌ای با شعاع β و به مرکز $z_\circ=\beta$ و $y_\circ=۲\beta\omega t$ است و در شکل (۹-۱۸) نشان داده شده است.



شکل ۹-۱۸ مسیر ذره (مثال ٤-۹ ب)

(پ): در این حالت داریم

$$\dot z(\circ)=\dot y(\circ)=\frac{E}{B}\ \Rightarrow\ -C_۱\omega=\frac{E}{B}\ \Rightarrow\ C_۱=-C_۳=-\frac{E}{\omega B} \qquad (۹-۲٦)$$

$$C_۲\omega+\frac{E}{B}=\frac{E}{B} \;\Rightarrow\; C_۲=C_٤=۰ \qquad (۹-۲۷)$$

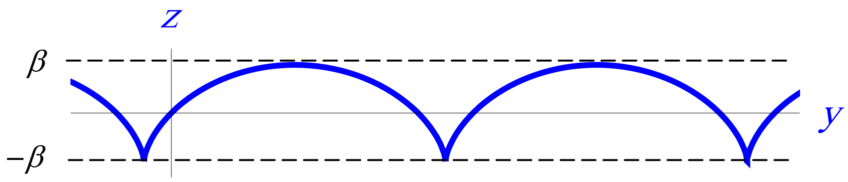
$$\Rightarrow\Rightarrow\; y(t)=-\frac{E}{\omega B}\cos\omega t+\frac{E}{B}t+\frac{E}{\omega B}; \quad z(t)=\frac{E}{\omega B}\sin\omega t \qquad (۹-۲۷)$$

$$\therefore\; y(t)=\frac{E}{\omega B}\left[۱+\omega t-\cos\omega t\right]\;;\quad z(t)=\frac{E}{\omega B}\sin\omega t \qquad (۹-۲۹)$$

و بنابراین، با تعریف $\beta\equiv E/B\omega$ داریم $z=\beta\sin\omega t \;\;;\;\; \left[y-\beta(1+\omega t)\right]=-\beta\cos\omega t$. با حذف سینوس و کسینوس بین این دو به‌دست می‌آید

$$\left[y-\beta(۱+\omega t)\right]^۲+z^۲=\beta^۲ \qquad (۹-۳۰)$$

که معادله‌ی دایره‌ای به شعاع β و به مرکز $z_۰=۰$ و $y_۰=\beta(1+\omega t)$ است. شکل مسیر در شکل (۱۹-۹) دیده می‌شود.



۴- کار نیروی مغناطیسی: یک جنبه‌ی قانون نیروی مغناطیسی، رابطه‌ی (۲-۹)، سزاوار توجه ویژه است: $\mathbf{F}_B$ همواره به $\mathbf{v}$ وبه $\mathbf{B}$ عمود است و بنابراین، نمی‌تواند سرعت v (و در نتیجه انرژی جنبشی) ذره را تغییر دهد. نیروی مغناطیسی نمی‌تواند سرعت ذره را کم یا زیاد کند. پس، **نیروی مغناطیسی کار انجام نمی‌دهد**. اگر بار Q به اندازه‌ی $d\mathbf{l}=\mathbf{v}dt$ جابه جا شود، کار انجام یافته عبارت است از

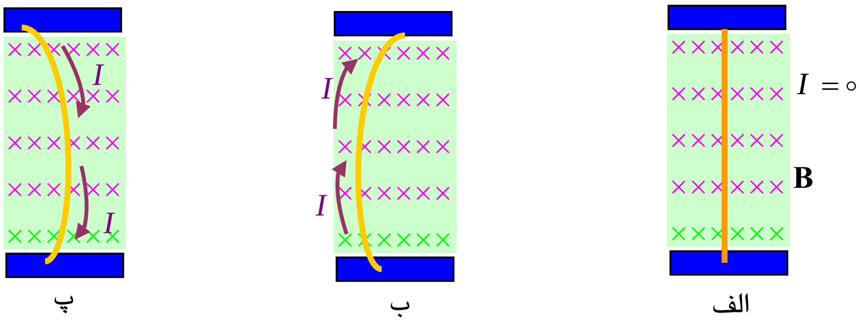
$$dW_B=\mathbf{F}_B\cdot d\mathbf{l}=Q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}dt=۰ \qquad (۹-۳۱)$$

همان‌گونه که در مثال‌های بالا دیدیم، نیروی مغناطیسی می‌تواند **جهت** حرکت ذره را تغییر دهد، اما سرعت آن را تغییر نمی‌دهد. صفر بودن کار نیروی مغناطیسی نتیجه‌ی مستقیم قانون نیروی لورنتس است. در بندرگاه‌ها و جاهای دیگر برای جابه‌جایی بارهای سنگین از جرثقیل‌های مغناطیسی استفاده می‌شود. در این وضعیت‌ها به یقین کار انجام می‌گیرد. اما اگر کار نیروی مغناطیسی صفر است، چه عاملی کار انجام می‌دهد؟ موتور جرثقیل سوخت مصرف می‌کند. و بخشی از سوخت را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کند تا میدان مغناطیسی ایجاد کند. انرژی الکتریکی (مصرف سوخت) عاملی است که کار انجام می‌دهد. در شتاب دهنده‌های ذرات باریکه‌ی ذره‌های باردار را تا سرعت‌های نزدیک سرعت نور شتاب می‌دهند، ذرات باردار در حلقه‌های بزرگ گردانیده می‌شوند. در این کار از نیروی مغناطیسی برای تغییر جهت حرکت این ذره‌ها استفاده‌ی فراوان می‌شود. این آهن رباها از نوع ابر رسانا هستند و در دماهای بسیار پایین حدود ۲ درجه‌ی کلوین کار می‌کنند. در شتاب دهنده‌ی LHC چندین هزار تا از این آهن‌ربا ها به کار رفته است.

۵- نیروی مغناطیسی وارد به سیم حامل جریان الکتریکی

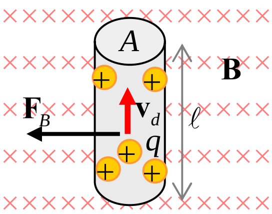
اگر بار الکتریکی در میدان مغناطیسی حرکت کند، به آن نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_B$ وارد می‌شود. جریان الکتریکی در نتیجه‌ی حرکت

مجموعه‌ای بار الکتریکی به وجود می‌آید (این بیان چندان درست نیست. سرعت بارها در سیم بسیار کند است در حالی که جریان در سیم با سرعت نور انتقال پیدا می‌کند. اما برای بحث کنونی ما این مسئله مهم نیست و در آینده چگونگی انتقال سریع جریان را بررسی خواهیم کرد. فعلا می‌پذیریم که جریان در سیم بر اثر جابه‌جایی بار الکتریکی است.) اگر سیم حامل جریان الکتریکی در میدان مغناطیسی قرار گیرد، به سیم حامل جریان نیروی مغناطیسی وارد می‌شود. در شکل (۱-۹) این پدیده را نشان دادیم. اینک دو باره آن را بررسی می کنیم و نیروی وارد به طولی از سیم را حساب می کنیم. اثر نیروی مغناطیسی بر روی سیم حامل جریان را می‌توان به صورت زیر نشان داد. سیم راست و درازی را برابر شکل (۲۰-۹) از دو قطب مغناطیسی



شکل ۲۰-۹ نیروی مغناطیسی وارد به سیم حامل جریان

آویزان کنید. فرض کنید در ناحیه‌ی بین دو قطب، میدان مغناطیسی به سوی درون صفحه است. اگر از سیم جریان نگذرد (شکل ۲۰-۹ الف) البته به سیم هم نیروی مغناطیسی وارد نمی‌شود. اگر جریان در سیم از پایین به بالا باشد، سیم به سمت چپ خمیده می‌شود (شکل ۲۰- ۹ب) و چنانچه جهت جریان از بالا به پایین باشد (شکل ۲۰-۹ پ) سیم به سمت راست خمیده می‌شود. برای این که نیروی مغناطیسی وارد به سیم را حساب کنیم، قطعه‌ای از سیم به طول ℓ و سطح مقطع A را برابر شکل (۲۱-۹) در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی به سوی درون صفحه است. بارها با سرعت سوق میانگین $\mathbf{v}_d$ حرکت می‌کنند. اگر تعداد بارها در واحد حجم را n بنامیم، آنگاه تعداد کل بار موجود در این قطعه سیم $Q_{\text{total}} = q(nA\ell)$ است. نیروی مغناطیسی کل وارد به این قطعه سیم عبارت است از



شکل ۲۱-۹ نیروی مغناطیسی وارد به سیم جریان

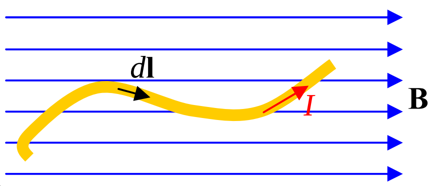
$$\mathbf{F}_B = Q_{total}\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = qnA\ell(\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \qquad (۹-۳۲)$$

در این رابطه $I = nqv_d A$ و $\mathbf{l}$ بردار طول به‌اندازه‌ی ℓ در جهت جریان الکتریک اند. برای یافتن نیروی مغناطیسی وارد به سیمی با شکل دلخواه، نیروهایی را که به اجزاء سیم وارد می‌شوند با هم جمع می‌کنیم. طول جزء کوچکی از سیم را، همانند شکل (۲۲-۹) ، $d\mathbf{l}$ بنامید. نیروی مغناطیسی وارد به این جزء عبارت است از

$$d\mathbf{F}_B = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B} \qquad (۹-۳۳)$$

بنابراین، نیروی کل برابر است با

$$\mathbf{F}_B = I\int_a^b (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \qquad (۹-۳٤)$$

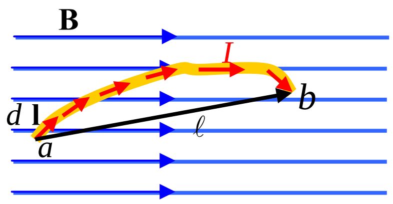


شکل ۲۲-۹ سیم حامل جریان در میدان **B**

در این انتگرال a و b نقاط انتهایی سیم اند. برای مثال سیم خمیده‌ی شکل (۲۳-۹) را در نظر بگیرید که در میدان مغناطیسی

یکنواخت $\mathbf{B}$ قرار دارد و از آن جریان I می گذرد. نیروی مغناطیسی وارد به آن از رابطه‌ی (۹-۳٤) به‌دست می‌آید و برابر

$$F_B = I\left(\int_a^b d\mathbf{l}\right)\times\mathbf{B} = I\ \mathbf{l}\times\mathbf{B} \qquad (۹-۳٥)$$

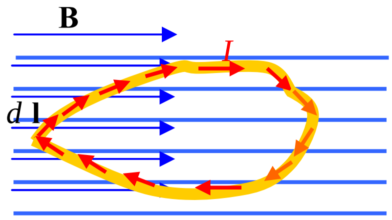


شکل ۹-۲۳ سیم خمیده حامل جریان I

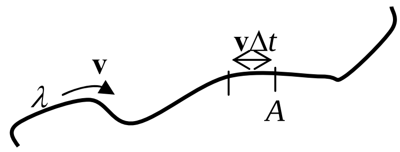
است که در آن $\mathbf{l}$ طول برداری است که از a به سوی b است. اگر سیم حلقه‌ی بسته‌ای با شکل دلخواه تشکیل دهد، مانند شکل (۹-۲٤)، ه نیروی وارد به حلقه

$$\mathbf{F}_B = I\left(\oint d\,\mathbf{l}\right)\times\mathbf{B} \qquad (۹-۳٦)$$

می‌شود. چون مجموعه‌ی جزء طول‌های $d\mathbf{l}$ یک چند ضلعی بسته می‌سازند، جمع بردارهای متناظرشان صفر می‌شود، یعنی $\oint d\mathbf{l} = 0$. بنابراین، نیروی مغناطیسی وارد به حلقه‌ی حامل جریان صفر است: $\mathbf{F}_B = 0$.



شکل ۹-۲۴ حلقه ی بسته حامل جریان I در میدان یکنواخت



شکل ۹-۲۵ عبور چگالی بار خطی از یک نقطه سیم

نکته: تاکنون در این بخش جریان الکتریکی را یک کمیت عددی در نظر گرفتیم. اگر چه این کار معمول است اما درست نیست. چگالی بارخطی λ با سرعت $\mathbf{v}$ در سیم حرکت می‌کند، و در آن جریان الکتریکی تولید می‌کند. اندازه‌ی جریان

$$I = \lambda v \qquad (۹-۳۷)$$

است. چون سرعت یک کمیت برداری است، طبیعی است که بپذیریم، جریان هم یک کمیت برداری است. اندازه‌ی آن در یک سیم با رابطه‌ی (۹-۳۷) داده شده است، اما جهت آن به شکل سیم بستگی دارد. بار موجود در جزء طول $v\ \Delta t$ سیم شکل (۹-۲٥) برابر $\lambda v\ \Delta t$ است و در زمان Δt از نقطه‌ی A می گذرد. در واقع، جریان در هر نقطه یک **بردار** است و داریم

$$\mathbf{I} = \lambda\,\mathbf{v} \qquad (۹-۳۸)$$

اما از آن جایی که مسیر جریان را شکل سیم تعیین می‌کند، بیشتر وقت‌ها سرشت برداری جریان به طور روشن نشان داده نمی‌شود. این کوتاهی را ما هم انجام دادیم. اگر بخواهیم آنچه را که گفتیم، درست‌تر بیان کنیم باید نیروی مغناطیسی وارد به طولی از سیم را به جای رابطه‌ی (۹-۳٤) به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{F}_B = \int(\lambda\,dl)(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \int(\mathbf{I}\times\mathbf{B})\,dl \qquad (۹-۳۹)$$

هرگاه $\mathbf{I}$ و $d\mathbf{l}$ هر دو در یک راستا باشند، می‌توان رابطه (۹-۳۹) را به صورت زیر هم نوشت

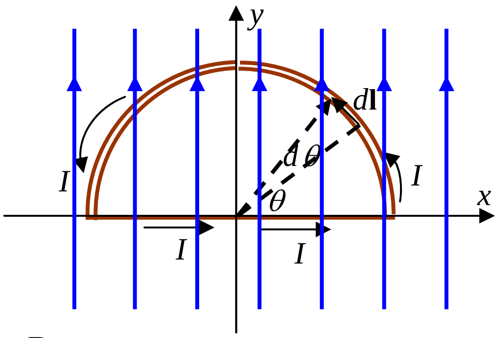
$$\mathbf{F}_B = \int I\,(d\mathbf{l}\times\mathbf{B}) \qquad (۹-٤۰)$$

معمولا اندازه‌ی جریان در طول سیم مقدار ثابتی است. در این صورت می‌توان I را از زیر انتگرال خارج کرد:

$$\mathbf{F}_B = I\int(d\mathbf{l}\times\mathbf{B}) \qquad (۹-٤۱)$$

مثال ۵-۹ نیروی مغناطیسی و نیم حلقه‌ی حامل جریان: نیم حلقه‌ای از یک سیم نیم‌دایره و سیم دیگری که قطر آن است تشکیل شده است و در صفحه‌ی xy قرار دارد. از سیم جریان پادساعتگرد I می‌گذرد. سیم در میدان مغناطیسی یکنواختی

قرار که برابر شکل (۲٦-۹) در راستای $+y$ است. نیروی مغناطیسی که به قسمت نیم‌دایره و قسمت خط راست حلقه وارد می‌شود، کدام اند؟



شکل ۹-۲۶ نیم حلقه ی جریان در میدان **B**

حل: میدان مغناطیسی را $\mathbf{B}=B\hat{\mathbf{j}}$ بنامید و نیروهای وارد به قسمت خط راست و نیم‌دایره‌ی سیم را به ترتیب با $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ نشان دهید. با استفاده از رابطه‌ی (۳٤-۹) نیروی وارد به قسمت خط راست عبارت است از

$$\mathbf{F}_1=I\,(2R\hat{\mathbf{i}})\times(B\hat{\mathbf{j}})=2IRB\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۹-٤۲)$$

که در آن $\hat{\mathbf{k}}$ بردار یکه‌ای به سوی بیرون از صفحه است. برای یافتن $\mathbf{F}_2$ نخست توجه کنید که جزء طول $d\mathbf{l}$ از نیم‌دایره را می‌توان به‌صورت $d\mathbf{l}=dl\,\hat{\boldsymbol{\theta}}=R\,d\theta\left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)$ نوشت. نیروی وارد به این جزء طول

$$d\mathbf{F}_2=I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B}=IR\,d\theta(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}})\times(B\hat{\mathbf{j}})=-IRB\,\sin\theta\,d\theta\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۹-٤۳)$$

است. پس، دیده می‌شود که $d\mathbf{F}_2$ به سوی درون صفحه است. اگر از این رابطه بر روی نیم‌دایره انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{F}_2=-IBR\,\hat{\mathbf{k}}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=-2IBR\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۹-٤٤)$$

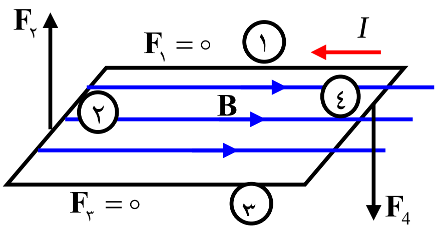
بنابراین، نیروی کل وارد به حلقه‌ی سیم عبارت است از

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=(2IRB\,\hat{\mathbf{k}})+(-2IRB\,\hat{\mathbf{k}})=0 \qquad (۹-٤٥)$$

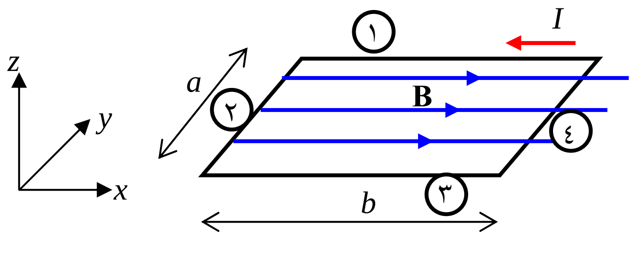
این نتیجه نشان می‌دهد که نیروی مغناطیسی وارد به سیم بسته‌ی حامل جریان صفر است.

۶- گشتاور وارد به حلقه‌ی جریان

شکل (۲۷-۹ الف) وضعیتی را نشان می‌دهد که حلقه‌ی مستطیل شکلی در صفحه‌ی xy قرار دارد. از حلقه جریان I می‌گذرد. فرض کنید حلقه در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}=B\,\hat{\mathbf{i}}$ (موازی صفحه‌ی حلقه) قرار دارد. روشن است که نیروی مغناطیسی وارد به ضلع‌های۱ و ۳ صفر است چون بردار های طول $\mathbf{l}_1=-b\,\hat{\mathbf{i}}$ و $\mathbf{l}_3=b\,\hat{\mathbf{i}}$ با میدان B موازی اند. بنابراین، $d\mathbf{l}\times\mathbf{B}=0$ است.



شکل ۹-۲۷ ب : نیروهای وارد بر حلقه‌ی جریان



شکل ۹-۲۷ الف: حلقه ی جریان در میدان **B**

نیروی مغناطیسی وارد به ضلع‌های ۲ و ٤ غیر صفر و برابر

$$\mathbf{F}_2=I\,(-a\,\hat{\mathbf{j}})\times(B\,\hat{\mathbf{i}})=IaB\,\hat{\mathbf{k}} \quad , \quad \mathbf{F}_4=I\,(a\,\hat{\mathbf{j}})\times(B\,\hat{\mathbf{i}})=-IaB\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۹-٤٦)$$

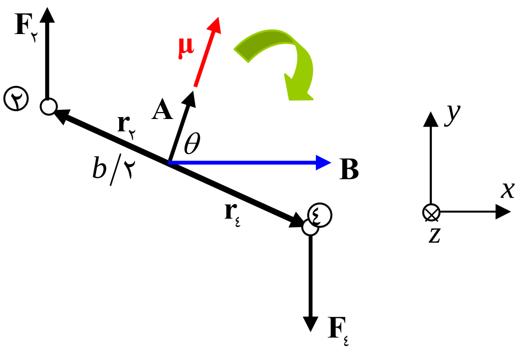
اند. نیروی $\mathbf{F}_2$ به سوی بیرون از صفحه و نیروی $\mathbf{F}_4$ به درون صفحه اند. نیروی کل وارد به حلقه، همان گونه که انتظارش را داریم ، صفر است

$$\mathbf{F}_{tot}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3+\mathbf{F}_4=0 \qquad (9-47)$$

اگرچه نیروی کل وارد به حلقه صفر است اما نیروهای $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_4$ گشتاوری ایجاد می‌کنند که حلقه حول را محور y می‌چرخاند (شکل ۲۸-۹ را ببینید). گشتاور این دو نیرو نسبت به مرکز حلقه عبارت است از

$$\boldsymbol{\tau}=(-\frac{b}{2}\hat{\mathbf{i}})\times\mathbf{F}_2+(\frac{b}{2}\hat{\mathbf{i}})\times\mathbf{F}_4=(-\frac{b}{2}\hat{\mathbf{i}})\times(IaB\,\hat{\mathbf{k}})+(\frac{b}{2}\hat{\mathbf{i}})\times(-IaB\,\hat{\mathbf{k}})$$
$$=\left(\frac{IabB}{2}+\frac{IabB}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}=IabB\,\hat{\mathbf{j}}=IAB\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (9-48)$$

که در آن $A\equiv ab$ مساحت حلقه است. علامت مثبت گشتاور نشان می‌دهد که چرخش حلقه حول محور y، ساعتگرد است.



شکل ۲۸-۹ چرخش حلقه ی مستطیل شکل

اگر بردار سطح $\mathbf{A}\equiv A\,\hat{\mathbf{n}}$ را معرفی کنیم که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح حلقه است و جهت مثبتش با قاعده‌ی انگشتان دست راست تعریف می‌شود (در مورد مسئله‌ی ما $\hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{k}}$ است) آنگاه می‌توان رابطه‌ی (۴۸-۹) را به صورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{\tau}=I\,\mathbf{A}\times\mathbf{B} \qquad (9-49)$$

توجه کنید که وقتی گشتاور بیشینه می‌شود که $\mathbf{B}$ موازی صفحه (یا عمود بر $\mathbf{A}$) باشد. در حالت عمومی‌تر شکل (۲۸-۹) حلقه یا بردار سطح، $\mathbf{A}$، با میدان مغناطیسی زاویه‌ی θ می‌سازد. در این حالت بازوی گشتاور را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{r}_2=\frac{b}{2}\left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right)=-\mathbf{r}_4 \qquad (9-50)$$

و گشتاور کل وارد به حلقه را می‌توان به صورت زیر حساب کرد

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2+\mathbf{r}_4\times\mathbf{F}_4=2\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2=2\cdot\frac{b}{2}\left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(IaB\,\hat{\mathbf{k}}\right)=IabB\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}=I\mathbf{A}\times\mathbf{B} \qquad (9-51)$$

اگر حلقه شامل N دور باشد، اندازه‌ی گشتاور

$$\tau=NIAB\sin\theta \qquad (9-52)$$

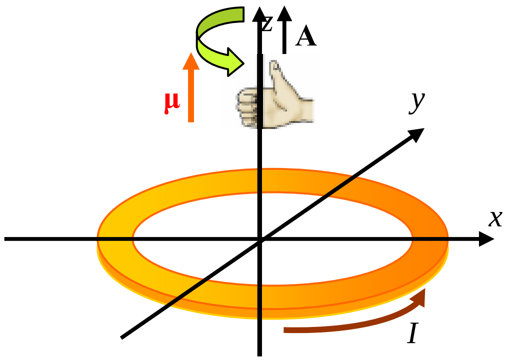
خواهد شد. کمیت $NI\mathbf{A}$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی، $\boldsymbol{\mu}$ ، نامیده می شود:

$$\boldsymbol{\mu}\equiv NI\mathbf{A} \qquad (9-53)$$

جهت $\boldsymbol{\mu}$ مانند جهت بردار سطح $\mathbf{A}$ (عمود بر سطح حلقه) است و با قاعده‌ی انگشت‌های دست راست، برابر شکل (۲۹) تعیین می‌شود. یکای گشتاور دوقطبی مغناطیسی، $\boldsymbol{\mu}$، در دستگاه یکاهای SI آمپر- متر به توان دو (A.m^2) است. با توجه به رابطه‌ی (۵۳-۹) می‌توان گشتاور $\boldsymbol{\mu}$ را که به حلقه‌ی حامل جریان وارد می‌شود، به صورت زیر باز نویسی کرد

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B} \qquad (9-54)$$

رابطه‌ی (۵۴-۹) شبیه گشتاور وارد به دو قطبی الکتریک $\mathbf{p}$ در میدان الکتریک $\mathbf{E}$ است و دیدیم که برابر $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}$ بود. با توجه به این که انرژی پتانسیل دو قطبی الکتریکی در میدان $\mathbf{E}$ برابر $U=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$ است، رابطه‌ی مشابه‌ای هم برای همتای مغناطیسی آن می‌توان انتظار داشت. این مقدار انرژی است که عامل خارجی هزینه می‌کند تا دوقطبی مغناطیسی را از زاویه‌ی



شکل ۹-۲۹ قاعده‌ی دست راست برای تعیین جهت **μ**

$\theta_\circ$ به زاویه‌ی θ بچرخاند. کاری که عامل خارجیب رابر

$$\begin{aligned} W_{\text{Ext}} &= \int_{\theta_\circ}^{\theta} \tau\, d\theta' = \int_{\theta_\circ}^{\theta} (\mu B \sin\theta')\, d\theta' \\ &= \mu B(\cos\theta_\circ - \cos\theta) \\ &= \Delta U = U - U_\circ \end{aligned} \qquad (۹-۵۵)$$

است. در اینجا هم $W_{\text{Ext}} = -W_B$ است. W_B کار میدان مغناطیسی است.

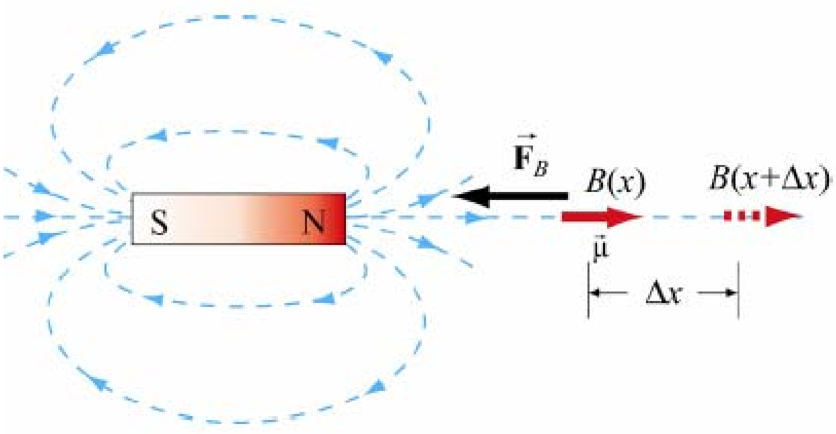
با گزینه‌ی $U_\circ = \circ$ برای $\theta_\circ = \pi/۲$، اگر یک دو قطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی خارجی **B** قرار گیرد، انرژی پتانسیل آن

$$U = -\mu B\cos\theta = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} \qquad (۹-۵٦)$$

خواهد شد. سامانه هنگامی در ترازمندی پایدار قرار می‌گیرد که **μ** و **B** موازی هم باشند. در این صورت انرژی کمینه خواهد شد: $U_{\min} = -\mu B$. اگر **μ** و **B** پادموازی باشند، انرژی دوقطبی بیشینه مقدار $U_{\min} = +\mu B$ خود را خواهد داشت و سامانه ناپایدار می شود.

۹-۷ دو قطبی مغناطیسی در میدان نایکنواخت

در بخش ٦-۹ دیدیم که اگر حلقه‌ی حامل جریان (دوقطبی مغناطیسی) در میدان مغناطیسی یکنواخت باشد، به آن نیروی مغناطیسی وارد نمی‌شود. اگر میدان نایکنواخت باشد چه پیش می‌آید؟ در این صورت نیروی مغناطیسی وارد به دوقطبی صفر



شکل ۹-۳۰ دو قطبی مغناطیسی در مجاورت آهن‌ربای میله‌ای

نخواهد شد. وضعیتی همانند شکل (۳۰-۹) را در نظر بگیرید که دو قطبی کوچک **μ** در راستای محور آهن‌ربای میله‌ای قرار دارد. میدان مغناطیسی آهن‌ربا در فضا نایکنواخت است و بنابراین، نیروی خالص غیر صفر به دوقطبی وارد می‌شود. برای حرکت دادن دوقطبی به سمت راست، به نیروی خارجی $\mathbf{F}_{ext}$ نیاز است. اندازه‌ی این نیروی خارجی را می‌توان به صورت زیر حساب کرد. فرض کنید دوقطبی به اندازه‌ی Δx به سوی راست جابه‌جا شود. در این صورت با توجه به رابطه‌ی (۵٦-۹) می‌توان نوشت

$$F_{ext}\Delta x = W_{ext} = \Delta U = -\mu B(x+\Delta x) + \mu B(x) = -\mu\left[B(x+\Delta x) - B(x)\right] \qquad (۹-۵۷)$$

برای Δx کوچک نیروی $\mathbf{F}_{ext}$ را می‌توان از

$$F_{\rm ext} = -\mu\frac{\left[B(x+\Delta x) - B(x)\right]}{\Delta x} = -\mu\frac{dB}{dx} \qquad (۹-۵۸)$$

به‌دست آورد. مقدار بالا کمیتی مثبت است ؛ چون $dB/dx < ۰$ است (یعنی میدان مغناطیسی با افزایش x کاهش می‌یابد). این دقیقا نیرویی است که به نیروی ربایشی آهن‌ربا چیره می‌شود. پس داریم

$$F_B = \mu\frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx}(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}) \qquad (۹-۵۹)$$

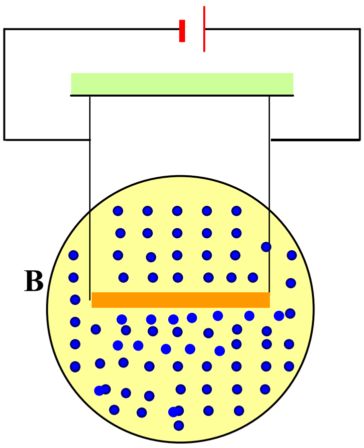
در حالت کلی، نیروی مغناطیسی که از سوی میدان مغناطیسی نایکنواخت $\mathbf{B}$ به دو قطبی $\boldsymbol{\mu}$ وارد می‌شود برابر

$$\mathbf{F}_B = \nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}) \qquad (۹-۶۰)$$

است.

مثال ۶-۹ جهت جریان در میله: میله‌ی رسانایی با چگالی جرم $\lambda\,\mathrm{kg/m}$ با دو سیم از سقف آویزان است و برابر شکل (۳۱-۹) در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ قرار دارد. جهت میدان $\mathbf{B}$ بر صفحه عمود و به سوی بیرون از آن است. برای این که کشش در سیم‌ها صفر باشد، جهت جریان در میله چگونه باید باشد؟

حل: برای این که کشش در سیم‌ها صفر باشد، نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_B = I\,\mathbf{l}\times\mathbf{B}$ که به میله وارد می‌شود باید نیروی گرانش رو به پایین $\mathbf{F}_g = -mg\,\hat{\mathbf{k}}$ را خنثی کند. برای این که $\mathbf{F}_B$ در راستای $+z$ باشد، باید $\mathbf{l} = -l\,\hat{\mathbf{j}}$ باشد؛ یعنی جهت جریان باید به سمت چپ باشد. بنابراین



شکل ۳۱-۹ میله آویزان در میدان یکنواخت

$$\mathbf{F}_B = I\,\mathbf{l}\times\mathbf{B} = I(-l\,\hat{\mathbf{j}})\times(B\,\hat{\mathbf{i}}) = -IlB(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}) = +I\,lB\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۹-۶۱)$$

اندازه‌ی جریان را می‌توان از $I\,lB = mg$ به‌دست آورد.

$$I = \frac{mg}{l\,B} = \frac{\lambda g}{B} \qquad (۹-۶۲)$$

مثال ۷-۹ ذره‌ی A با بار q و جرم m_A و ذره‌ی B با بار $۲q$ و جرم m_B با اختلاف پتانسیل ΔV از حالت سکون شتاب داده می‌شوند و سپس به وسیله‌ی میدان مغناطیسی یکنواختی در مسیر نیم‌دایره منحرف می‌شوند. شعاع مسیر ذره‌ها به ترتیب R و $۲R$ اند. میدان مغناطیسی بر سرعت ذره‌ها عمود است. نسبت جرم ذره ها رابیابید.

حل: ذره‌ها در اثر شتاب انرژی جنبشی به‌دست می‌آورند. مقدار این انرژی جنبشی و بنابراین، سرعت ذره‌ها عبارت است از

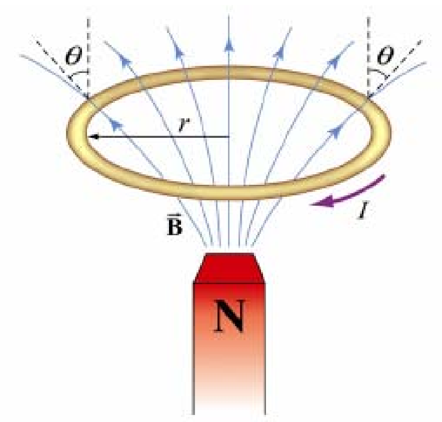
$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} = q\,\Delta V \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{۲q\,\Delta V}{m}} \qquad (۹-۶۳)$$

نیروی مغناطیسی وارد به ذره‌ها شعاعی و درون سو است و نیروی مرکزگرا را به وجود می‌آورد. در نتیجه، ذره‌ها در مسیرهای نیم دایره حرکت می‌کنند. داریم

$$\frac{mv^{2}}{r}=qvB \;\Rightarrow\; r=\frac{mv}{qB}=\frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2q\,\Delta V}{m}}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m\,\Delta V}{q}} \qquad (۹-٦٤)$$

که نشان می‌دهد r با $(m/q)^{1/2}$ متناسب است. نسبت جرم‌ها عبارت است از

$$\frac{r_A}{r_B}=\frac{(m_A/q_A)^{1/2}}{(m_B/q_B)^{1/2}} \;\Rightarrow\; \frac{R}{2R}=\frac{(m_A/q_A)^{1/2}}{(m_B/q_B)^{1/2}} \;\Rightarrow\Rightarrow\; \frac{m_A}{m_B}=\frac{1}{8} \qquad (۹-٦٥)$$



شکل ۹-۳۲ حلقه ی حامل جریان در میدان مغناطیسی آهن ربا

مثال ۹-۸ حلقه در میدان B: از حلقه‌ی دایره‌ای به شعاع r جریان ساعتگرد I می‌گذرد. آهنربای میله‌ای برابر شکل (۹-۳۲) در زیر حلقه و در راستای محور تقارن آن قرار دارد. میدان مغناطیسی در محل حلقه با خط عمود زاویه‌ی θ می‌سازد. به حلقه چه نیروی مغناطیسی وارد می‌شود؟

حل: نیروی مغناطیسی وارد به جزء کوچک $I\,d\mathbf{l}$ از حلقه‌ی حامل جریان عبارت است از $d\mathbf{F}_B=I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B}$ که در آن $\mathbf{B}$ میدان مغناطیسی آهن‌ربا است. اگر برابر شکل (۹-۳۳) از مختصات استوانه‌ای $(\hat{\mathbf{r}},\hat{\boldsymbol{\varphi}},\hat{\mathbf{z}})$ استفاده کنیم، خواهیم داشت

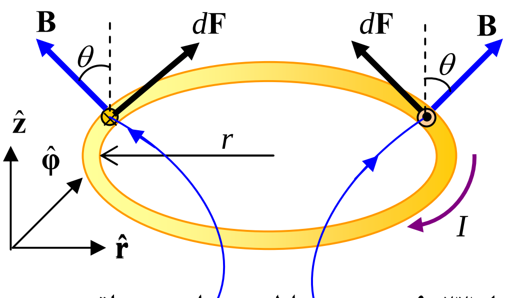
$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_B &= I\,(-dl\,\hat{\boldsymbol{\varphi}})\times(B\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}+B\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}) \\ &= (IB\,dl)\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}-(IB\,dl)\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \qquad (۹-٦٦)$$

به خاطر وجود تقارن محوری، مولفه‌های شعاعی نیرو حذف می‌شوند و تنها مولفه‌ی z باقی می‌ماند. بنابراین، نیروی کل وارد به حلقه به صورت زیر درمی‌آید

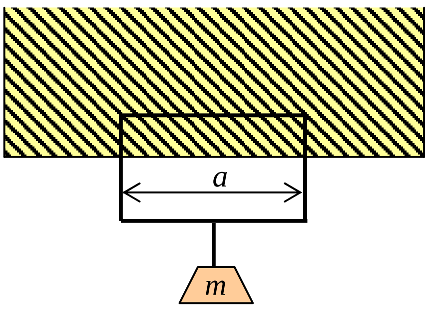
$$\mathbf{F}_B=(IB\sin\theta)\hat{\mathbf{z}}\oint dl\;=(2\pi rIB\sin\theta)\hat{\mathbf{z}} \qquad (۹-٦٧)$$

نیرو در جهت $+z$ و بنابراین ربایشی است.

مثال ۹-۹ حلقه‌ی معلق [۲] : جرم m از حلقه‌ی مستطیل شکلی آویزان است. برابر شکل (۹-۳٤) یک بخش حلقه در میدان یکنواخت $\mathbf{B}$ قرار دارد. جهت میدان به سوی درون صفحه است وبه قسمت هاشورخورده ی فضا محدود است. به ازای چه جریانی در حلقه، نیروی مغناطیسی رو به بالا نیروی گرانش رو به پایین را حذف می کند؟



شکل ۹-۳۳ نیروی مغناطیسی وارد به حلقه ی [۱]



شکل ۹-۳۴ حلقه در میدان

---

[۱] برگرفته از: David J. griffiths, An Introduction to Electrodynamics, 2nd Ed. Prentice Hall,1989

حل: برای این که در سیم‌های افقی $\mathbf{I}\times\mathbf{B}$ به سوی بالا باشد، جریان در حلقه باید ساعتگرد باشد. این را می‌توان با قاعده‌ی انگشتان دست راست فهمید. بنابراین، $F_B = IBa$ است که در آن a طول مستطیل است. نیروی مغناطیسی در دو سیم عمودی حلقه یکدیگر را حذف می‌کنند. برای این که نیروی مغناطیسی F_B نیروی گرانش را حذف کند، باید داشته باشیم

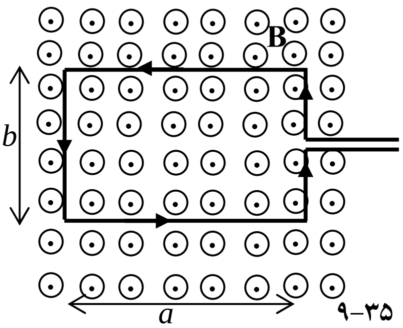
$$IBa = mg \;\Rightarrow\; I = \frac{mg}{Ba} \qquad (۹-٦٨)$$

توجه کنید که اگر جریان در حلقه بیش از این مقدار باشد، نیروی مغناطیسی بر نیروی گرانش چیره می‌شود و حلقه را به بالا می‌کشد. وقتی همه‌ی حلقه در میدان مغناطیسی قرار گیرد، نیروی مغناطیسی که به سیم‌های افقی پایین وبالا وارد می‌شوند، باهم برابر و در جهت عکس هم می‌شوند. در نتیجه، نیروی مغناطیسی برآیند صفر می‌شود و حلقه در اثر نیروی گرانش سقوط می‌کند. با خارج شدن سیم افقی پایینی از میدان مغناطیسی، نیروی مغناطیسی وارد به سیم افقی بالا، حلقه را به بالا می‌کشد و در نتیجه، حلقه حرکتی نوسانی در امتداد عمودی پیدا می‌کند.

مثال ۱۰-۹ از حلقه‌ی مستطیل به طول a و به عرض b جریان I می‌گذرد. حلقه برابر شکل (۳۵-۹) در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ قرار دارد. میدان $\mathbf{B}$ بر صفحه‌ی حلقه عمود و جهت آن بیرون از صفحه است. گشتاور وارد به حلقه را به‌دست آورید.

حل ۱- نیروهای لورنتس وارد به هر ضلع حلقه را در نظر بگیرید. نیرویی که به سیم سمت چپ وارد می‌شود IbB است. جهت آن به سوی چپ است. به سیم سمت راست هم نیروی IbB وارد می‌شود. جهت آن به سوی راست است. .نیروی وارد به سیم بالایی IaB و رو به بالاست، در حالی‌که نیروی وارد به سیم پایین IaB و رو به پایین است. مجموع این نیروها، گشتاوری به حلقه وارد نمی‌کنند.

حل ۲- جهت گشتاور مغناطیسی $\boldsymbol{\mu}$ حلقه بر صفحه‌ی حلقه عمود است. میدان $\mathbf{B}$ هم بر این صفحه عمود است. بنابراین داریم: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B} = ۰$



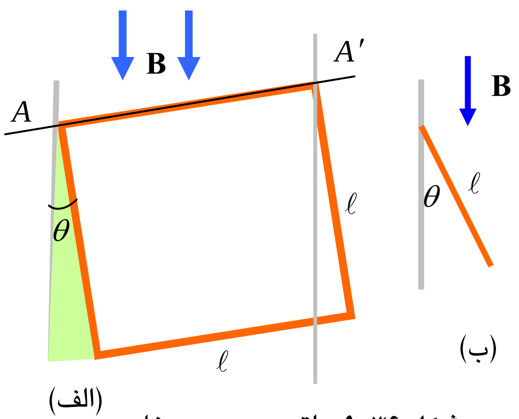
شکل ۳۵-۹

مثال ۱۱-۹ حلقه‌ی سیم مربع شکل به ضلع ℓ برابر شکل (۳٦-۹) در میدان مغناطیسی یکنواختی به شدت B قرار دارد. جهت میدان قائم و رو به پایین است. از حلقه جریان I می‌گذرد. حلقه حول ضلع افقی (AA') می‌تواند بچرخد.

(الف): اندازه‌ی گشتاور دوقطبی وارد به این حلقه را برحسب کمیت‌های داده شده حساب کنید.

(ب): برای این که حلقه در فضا معلق باشد جهت جریان در سیم چگونه باید باشد (اگر از بالا به حلقه نگاه کنید، آیا جهت جریان باید ساعتگرد باشد یا پادساعتگرد)؟

حل: **(الف)** می‌دانیم که گشتاور $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}$ است و گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه $\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} = I\,\ell^{۲}\mathbf{n}$ است. $\mathbf{n}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح حلقه است. بنابراین، داریم: $\tau = \mu B\sin(۹۰-\theta) = I\,\ell^{۲}B\cos\theta$

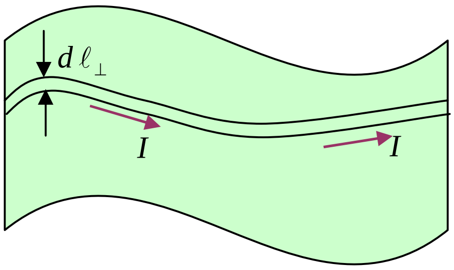


شکل ۳۶-۹ حلقه‌ی مربع چرخان

(**ب**): نیروی وزن میله رو به پایین است. نیروی مغناطیسی که به ضلع پایینی حلقه وارد می‌شود، باید رو به بالا باشد. در نتیجه، اگر از بالا به حلقه نگاه کنیم جریان باید ساعتگرد باشد.

۸-۹ چگالی جریان

۱-۸ چگالی جریان سطحی: در رابطه‌ی (۳۸-۹) جریان گذرنده از یک سیم را با $\mathbf{I} \equiv \lambda \mathbf{v}$ تعریف کردیم که در آن λ چگالی بار خطی موجود در سیم است. اگر بار الکتریکی به جای حرکت در یک سیم، در روی سطح جریان یابد، برای توصیف آن از **چگالی جریان سطحی**، $\mathbf{k}$ ، استفاده و به صورت زیر تعریف می شود:



شکل ۳۷-۹ چگالی جریان سطحی

در روی سطح "روبان" باریکی با پهنای بسیار اندک $d\ell_\perp$ را برابر شکل (۳۷-۹) به موازات جریان الکتریکی در نظر بگیرید. اگر جریان در این روبان $d\mathbf{I}$ باشد، چگالی جریان سطی عبارت است از

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{I}}{d\ell_\perp} \qquad (۹-۶۹)$$

به بیان دیگر، K *جریان در واحد طولِ عمود بر شارش جریان است*. اگرچگالی بارهای متحرک سطحی σ باشد و طول روبان را d فرض کنیم، مقدار بار موجود در روبان $dq = \sigma d\ell_\perp (d)$ است. اگر سرعت حرکت این بارها $\mathbf{v}$ باشد، آنگاه داریم $d\mathbf{I} = dq/dt = \sigma d\ell_\perp (\mathbf{v}dt)/dt = \sigma d\ell_\perp \mathbf{v}$ ودر نتیجه

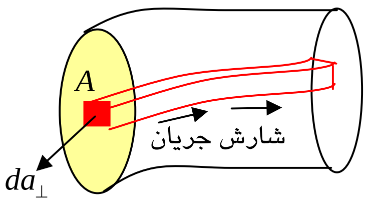
$$\mathbf{K} = \frac{(\sigma d\ell_\perp)\mathbf{v}}{d\ell_\perp} = \sigma \mathbf{v} \qquad (۹-۷۰)$$

در حالت عمومی، هم σ و هم $\mathbf{v}$ از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر در روی سطح، می‌توانند تغییر کنند. در نتیجه، $\mathbf{K}$ نیز ممکن است در نقاط مختلف سطح متفاوت باشد. اگر جریان سطحی در میدان مغناطیسی قرار گیرد به آن نیروی مغناطیسی وارد خواهد شد. این نیرو از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$F_B = \int (\sigma da)(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) da \qquad (۹-۷۱)$$

نکته: همان‌گونه که خواهیم دید، میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ در گذار از یک جریان سطحی ناپیوسته است. درست مثل میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ که در گذار از یک سطح باردار گسسته است. بنابراین، هنگام استفاده از رابطه‌ی (۷۱-۹) باید هوشیار بود و از میدان میانگین استفاده کرد.♣

۲-۸ چگالی جریان حجمی: اگر شارش بار در فضای سه بعدی انجام گیرد، آن را با چگالی جریان حجمی $\mathbf{J}$ نشان می‌دهیم. با توجه به شکل (۳۸-۹) می‌توان $\mathbf{J}$ را تعریف کرد. فرض کنید جریان $\mathbf{I}$ از سطح مقطع A می‌گذرد و در حجم لوله‌ای با شکل دلخواه توزیع می‌شود. لوله‌ای با سطح مقطع بسیار کوچک $da_\perp$ را در نظر بگیرید که برابر شکل (۳۸-۹) به موازات شارش جریان قرار دارد. اگر جریان درون این لوله $d\mathbf{I}$ باشد، آنگاه چگالی جریان حجمی عبارت است از



شکل ۳۸-۹ چگالی جریان حجمی

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{da_\perp} \qquad (۹-۷۲)$$

به بیان دیگر، J جریان در واحد سطح عمود بر شارش بار است. اگر چگالی بارهای متحرک درون لوله ρ و سرعت بارها $\mathbf{v}$ باشد، بار موجود در لوله‌ای به طول d برابر $dq = \rho da_{\perp} d = \rho da_{\perp}(\mathbf{v}dt)$ و $d\mathbf{I} = dq/dt = \rho da_{\perp}\mathbf{v}dt/dt = \rho da_{\perp}\mathbf{v}$ اند:

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} \tag{۹-۷۳}$$

پس، نیروی مغناطیسی وارد به جریان حجمی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_B = \int(\rho d\tau)(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \int(\mathbf{J}\times\mathbf{B})d\tau \tag{۹-۷۴}$$

مثال ۱۲- در هر یک از حالت‌های زیر چگالی جریان $\mathbf{J}$ را حساب کنید.

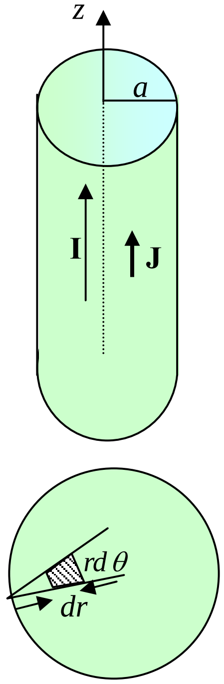
(الف): جریان کل I در راستای محور $+z$ در سیم درازی با سطح مقطع دایره‌ای به شعاع a برقرار است. جریان به طور یکنواخت در سیم توزیع شده است.

(ب): جریان کل I در راستای محور $+z$ در سیم درازی با سطح مقطع دایره‌ای به شعاع a برقرار است. جریان با وارون فاصله‌ی r از محور سیم متناسب است.

(پ): استوانه‌ی دراز نارسانایی به شعاع R وبا چگالی بار $\rho_\circ$ که با سرعت $\mathbf{v} = v_\circ\hat{\mathbf{z}}$ حرکت می‌کند. محور استوانه در راستای محور z است.

(ت): قرصی به شعاع a و ضخامت h با چگالی بار ρ_0 که در صفحه‌ی xy قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای $\omega\hat{\mathbf{z}}$ می‌چرخد.

(ج): کره‌ای به شعاع a با بار کل Q که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. کره در مبداء مختصات قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z می‌چرخد.



شکل ۹-۳۹

حل: **(الف)** جریان در سیم به طور یکنواخت توزیع شده است. بنابراین در درون سیم چگالی جریان یکنواخت (و در بیرون صفر) است. داریم

$$I = |\mathbf{J}|\pi a^{۲} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{cases} \dfrac{I}{\pi a^{۲}}\hat{\mathbf{z}}\ ; & r < a \\ \circ\ ; & r > a \end{cases} \tag{۹-۷۵}$$

(ب): این بار جریان در درون سیم، با فاصله از محورسیم متناسب است (و در بیرون سیم صفر است) . بنابراین، $J = \alpha/r$ است. با توجه به شکل (۹-۳۹) داریم

$$I = \int J da_{\perp} = \int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{a}\frac{\alpha}{r} r dr d\theta = ۲\pi\alpha a \Rightarrow \alpha = I/۲\pi a \tag{۹-۷۶}$$

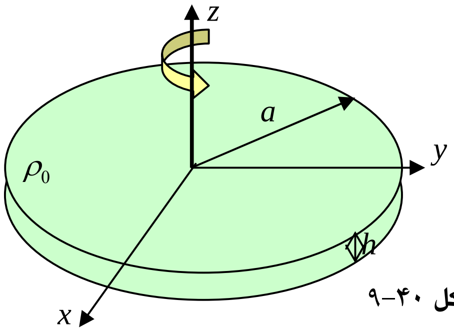
و بنابراین

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \dfrac{I}{۲\pi a r}\hat{\mathbf{z}}\ ; & r < a \\ \circ\ ; & r > a \end{cases} \tag{۹-۷۷}$$

(پ): چگالی جریان حاصل ضرب چگالی بار و سرعت آن است. پس

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \rho_\circ\mathbf{v} = \rho_\circ v_\circ\hat{\mathbf{z}} & ;\ r < R \\ \circ & ;\ r > R \end{cases} \tag{۹-۷۸}$$

(ت): هنوز هم چگالی جریان حاصل‌ضرب چگالی بار و سرعت است. این جا، البته، سرعت به مکان بستگی دارد و برای محاسبه‌ی آن به یاد بیاورید که $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. بنابراین، می‌بینیم که v در راستای z مولفه‌ای ندارد. به بیان دیگر، سرعت مستقل از z است. پس، آنچه که باقی می‌ماند عبارت است از



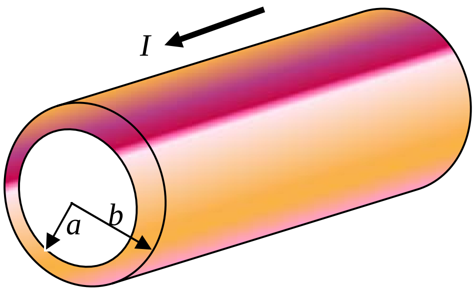
شکل ۴۰-۹

$$\mathbf{J}=\rho_0\mathbf{v}=\begin{cases}\rho_0\omega r\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,; & r<R \quad , \quad -h/2<z<h/2\\ 0; & r>R\end{cases} \qquad (۹-۷۹)$$

(ج): این وضعیت همانند حالت (ت) است. در راستای محور z سرعت مولفه ندارد؛ چون $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times(x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}})$ است. اگر این رابطه را برحسب متغیرهای کروی بنویسیم خواهیم داشت $\mathbf{v}=r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ و بنابراین،

$$\mathbf{J}=\rho_\circ\mathbf{v}=\frac{۳Q}{۴\pi a^۳}\mathbf{v}=\begin{cases}\dfrac{۳Q\,\omega r\sin\theta}{۴\pi a^۳}\hat{\boldsymbol{\varphi}} & ; \quad r<a\\ \circ & ; \quad r>a\end{cases} \qquad (۹-۸۰)$$

مثال ۱۳- ۹ جریان در سطح پوسته‌ی استوانه‌ای: شکل (۴۱-۹) پوسته‌ی استوانه‌ای رسانایی را نشان می‌دهد که شعاع داخلی آن a و شعاع بیرونی اش b است. جریان I به طور نایکنواخت بر روی سطح مقطع پوسته توزیع شده است و با دور شدن از سطح بیرونی به طور نمایی افت پیدا می‌کند. به بیان دیگر، چگالی جریان در پوسته به‌صورت $J=J_0e^{(r^2-b^2)/\delta^2}$ است. کمیت δ مقدار ثابتی است که "*ژرفای پوسته*"[*] نام دارد و در مقایسه با ضخامت $(b-a)$ پوسته بسیار کوچک است. ثابت $J_\circ$ را حساب کنید.



شکل ۴۱-۹ چگالی جریان متغیر در پوسته‌ی استوانه ای رسانا

حل: کافی است از چگالی جریان انتگرال بگیریم و آن را مساوی جریان I قرار دهیم. داریم

$$\begin{aligned}I&=\int Jda_\perp=\int_{\theta=\circ}^{۲\pi}\int_{r=a}^{b}J_\circ e^{(r^۲-b^۲)/\delta^۲}rdrd\theta\\ &=۲\pi\int_{r=a}^{b}J_\circ e^{(r^۲-b^۲)/\delta^۲}rdr\end{aligned} \qquad (۹-۸۱)$$

با تغییر متغیر $u=(r^۲-b^۲)/\delta^۲\Rightarrow du=۲rdr/\delta^۲$ داریم

$$\begin{aligned}I&=J_\circ\pi\delta^۲\int_{u=(a^۲-b^۲)/\delta^۲}^{\circ}e^udu=J_\circ\pi\delta^۲e^u\Big|_{u=(a^۲-b^۲)/\delta^۲}^{\circ}\\ &=J_\circ\pi\delta^۲\left(۱-\underbrace{e^{(a^۲-b^۲)/\delta^۲}}_{\approx\cdot\,;\delta\ll(b-a)}\right)\approx J_\circ\pi\delta^۲ \;\Rightarrow\; J_\circ=\frac{I}{\pi\delta^۲}\end{aligned} \qquad (۹-۸۲)$$

در مثال های بالا دیدیم که جریان گذرنده از سطح S را می‌توان به صورت زیر نوشت

[*] skin depth

$$I=\int J\,da_{\perp}=\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۹–۸۳)$$

ضرب داخلی $\mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}$ مولفه‌ی مناسب $d\mathbf{a}$ را برمی‌گزیند. به بیان دیگر،

$\mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}=da\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J}=da\times$ (مولفه‌ی عمود بر da چگالی جریان) =

(مقدار بار که در واحد زمان از سطح da به *بیرون* نشت می کند) =

به ویژه، با توجه به قضیه‌ی دیورژانس، می‌توان دید که بارکل که در واحد زمان از حجم V خارج می‌شود (حجمی که سطح S آن را دربر دارد) عبارت است از

$$\oint \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}=\int_V (\nabla\cdot\mathbf{J})d\tau \qquad (۹–۸٤)$$

بنابراین $\int(\nabla\cdot\mathbf{J})d\tau$ آهنگ برون شاری بار از حجم V است.

چون بار الکتریکی پایسته است، مقدار باری که از سطح به بیرون نشت می کند، با کاهش بار در درون حجم باید برابر باشد:

$$\int_V (\nabla\cdot\mathbf{J})d\tau=-\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau=-\int_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)d\tau \qquad (۹–۸٥)$$

علامت منها به این معنی است که برون شاری بار، سبب کاهش بار در درون حجم V می‌شود. چون رابطه‌ی (۸٥–۹) برای هر حجمی درست است، نتیجه می‌گیریم که

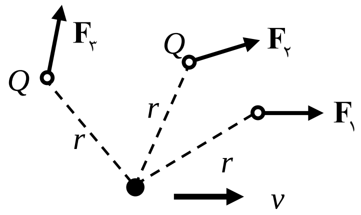
$$\nabla\cdot\mathbf{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (۹–۸٦)$$

رابطه‌ی (۸٦–۹) **معادله‌ی پیوستگی** است؛ رابطه‌های (۸٥–۹) و (۸٦–۹) به ترتیب شکل‌های انتگرالی و دیفرانسیلی قانون پایستگی بار الکتریکی‌اند. دقیق‌ترین گواه تجربی برای پایستگی بار، پایداری الکترون است. علت این که الکترون ذره‌ی پایدار است این است که پایستگی بار از واپاشی آن جلوگیری می‌کند. ذرات فقط به ذره‌های سبک‌تر از خودشان می‌توانند واپاشیده شوند. ذره‌های سبک‌تر از الکترون عبارتند از نوترینو، فوتون و گراویتون. اما این ذره‌ها بار الکتریکی ندارند. اگر الکترون به این ذره‌ها واپاشیده شود، بار الکتریکی الکترون ناپدید می‌شود. بنابراین، پایستگی بار به پایداری الکترون می‌انجامد. پس، اگر نقض پایستگی بار الکتریکی ممکن بود، فرایند (فوتون) + (نوترینو) $\rightarrow$ (الکترون) هم شدنی می‌بود. اما یک چنین فرایندی هرگز دیده نشده است.

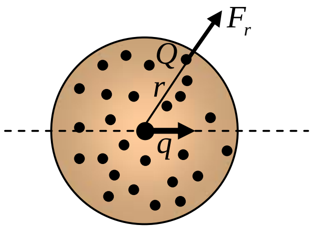
۹–۹ اندازه‌گیری بار متحرک

شاید این بخش را می‌بایست در آغاز همین فصل می‌گنجاندیم. پرسشی که در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم این است که چگونه می‌توان بار الکتریکی ذره‌ی متحرک را اندازه گرفت؟ اندازه‌ی بار الکتریکی را فقط با بررسی اثرهای آن می‌توان به‌دست آورد. مقدار بار ساکن q را می‌توان با اندازه‌گیری نیرویی که به باز آزمون Q در فاصله‌ی معین وارد می‌کند، به‌دست آورد. این اندازه‌گیری بر اساس قانون کولمب شدنی است. اگر باری را که می‌خواهیم اندازه بگیریم، حرکت کند، در فضا جهت معینی پدید می‌آید که جهت لحظه‌ای حرکت است. ممکن است که نیروی وارد به بار آزمون Q نه تنها به فاصله‌ی Q از بار متحرک، به جهت حرکت بار q هم بستگی داشته باشد. در این صورت، نیروهای متفاوتی را بر روی بار آزمون مشاهده خواهیم کرد. اگر این نیروهای متفاوت را در قانون کولمب قرار دهیم، برای بار Q مقدارهای گوناگون به‌دست خواهیم آورد. از این گذشته، حالا دیگر نمی‌توان اطمینان داشت که جهت نیرو در راستای $\mathbf{r}$ است. ممکن است جهت نیرویی که بار متحرک q به بار آزمون Q

وارد می‌کند همانند شکل (۴۲-۹) باشد.



شکل ۴۲-۹ نیروی بار متحرک بر بار آزمون



شکل ۴۳-۹

برای این که امکان این وضعیت را در نظر بگیریم، q را می‌توان با میانگین گیری از نیروها در همه‌ی جهت‌ها، تعریف کرد. فرض کنید بارهای آزمون کوچک اند و بر روی سطح کره‌ای به شعاع r قرار دارند (شکل ۴۳-۹). در لحظه‌ای که بار متحرک از مرکز کره می‌گذرد، مولفه‌ی شعاعی نیرو را بر روی هر یک از بارهای آزمون اندازه می‌گیریم. مقدار میانگین این نیروها را در محاسبه‌ی بار q به کار می‌بریم. اما این کاری است که در زمان t برای محاسبه‌ی انتگرال سطح میدان الکتریکی بر روی کره انجام می‌دهیم: در اینجا بارهای آزمون در حال سکون اند و بنا به تعریف، نیرو در واحد بار Q، میدان الکتریکی را در آن نقطه به‌دست می‌دهد. این روش برای تعیین مقدار بار متحرک به قانون گاوس نزدیک‌تر از قانون کولمب است (توجه کنید که این تنها راه ممکن نیست، می‌توانستیم بار آزمون را در مسیر بار متحرک و در پیشاپیش آن بگذاریم. بارهایی که این‌گونه تعریف می‌شوند، ویژگی‌های ساده‌ای نخواهند داشت که مورد نظر ماست). تعریف مقدار بار ذره‌ی متحرک به روش بالا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

مقدار بار الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا عبارت است از انتگرال سطح میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ بر روی سطح S که آن ناحیه را دربر دارد. سطح S در چارچوب خاص F ثابت است. میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در هر نقطه‌ی (x,y,z) و در زمان t با اندازه‌گیری نیروی وارد بر بار آزمون (که در چارچوب F در حال سکون است) در چارچوب F تعیین می‌شود. انتگرال سطح باید در زمان معین t تعیین بشود. این بدان معنی است که اندزه‌ی میدان باید در همه‌ی نقاط روی سطح S به طور همزمان اندازه‌گیری شود. انتگرال سطح بر روی S و در زمان t را با

$$\int_{S(t)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۹-۸۷)$$

تعریف کنید. به این ترتیب می‌توانیم مقدار بار الکتریکی در درون S را با حاصلضرب این انتگرال در $\varepsilon_\circ$ تعریف کنیم

$$q=\varepsilon_\circ\int_{S(t)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۹-۸۸)$$

البته مقدار بار نباید به شکل و اندازه‌ی سطح S بستگی داشته باشد. برای بار ساکن، تعریف (۸۸-۹) بیان قانون گاوس است و به شکل و اندازه‌ی سطح S هم بستگی ندارد. اما از کجا بدانیم که برای بار متحرک هم این چنین است؟ خوش‌بختانه برای بار متحرک هم مقدار q مستقل از شکل و اندازه‌ی سطح S است. می‌توانیم آن را به عنوان یک واقعیت تجربی بپذیریم. این ویژگی بنیادی میدان الکتریکی بار متحرک، اجازه می‌دهد که مقدار بار را با رابطه‌ی (۸۸-۹) تعریف کنیم. به بیان دیگر، قانون گاوس برای میدان بارهای متحرک هم درست است: شار گذرنده از دو سطح که بارهای متحرک را دربردارند، اگر همزمان اندازه‌گیری شوند، یکسان است.

در گزاره‌ی بالا مفهوم ناوردایی بار الکتریکی نهفته است. حرکت تاثیری در مقدار بار الکتریکی ندارد. اگر اندازه‌ی بار الکتریکی با حرکت تغییر می‌کرد، اتمها و مولکول‌ها نمی‌توانستند از نظر باری خنثی باشند. گواه تجربی بی بروبرگردی وجود دارد و نشان می‌دهد که بار الکتریکی کل یک سامانه در اثر حرکت حامل‌های بار آن، تغییر نمی‌کند. این واقعیت بسیار چشم‌گیری است و ما چنان به آن خو گرفته‌ایم که فراموش می‌کنیم به اهمیت بنیادی آن بیندیشیم. ما در فصل ۱ از بی بار بودن مولکول

هیدروژن نام بردیم و نتیجه گرفتیم که اندازه‌ی بار الکتریکی پروتون و الکترون برابر است. اینک اتم هیلیوم را در نظر بگیرید. اتم هیلیوم دو پروتون و دو الکترون دارد. اینها همان بارهایی هستند که مولکول هیدروژن را می‌سازند. حرکت الکترون‌ها و پروتون‌ها در هیلیوم بسیار متفاوت از وضعیت آنها در مولکول هیدروژن است. به ویژه پروتون‌ها که در مولکول هیدروژن در فاصله‌ی ۰٫۷ آنگستروم از هم به اهستگی دور هم می‌گردیدند، اینک در هسته‌ی اتم هیلیوم پیوند محکمی دارند و با انرژی جنبشی حدود یک میلیون الکترون ولت حرکت می‌کنند. اگر حرکت تاثیری در مقدار بار الکتریکی می‌داشت، بار الکتریکی پروتون ها و الکترون‌های اتم هیلیوم دقیقا همانند مولکول هیدروژن یکدیگر را حذف نمی‌کردند. دقت تعیین بی باری اتم هیلیوم به همان دقتی است که برای مولکول هیدروژن به‌دست آمده است.

گواه دیگری را طیف نوری ایزوتوپ‌های یک عنصر به‌دست می‌دهد. جرم هسته‌ی ایزوتوپ‌ها متفاوت است اما بار هسته‌ی آنها برابر است. حرکت پروتون‌ها در دو هسته‌ی ایزوتوپ متفاوت است، اما طیف نوری ایزوتوپ‌های متفاوت یک عنصر نشانی از اختلاف بار هسته‌ها نیست.

جرم این ویژگی ناوردایی* را ندارد. می‌دانیم که انرژی یک ذره بر اثر حرکت با ضریب

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-v^{2}/c^{2}\right)}} \qquad (9\text{-}89)$$

تغییر می‌کند. اگر اجزاء سازنده‌ی یک ذره‌ی مرکب حرکت کنند، افزایش انرژی آنها به‌صورت افزایش جرم ذره‌ی مرکب ظاهر می‌شود (اگر چه جرم اجزاء سازنده‌ی ذره تغییر نمی‌کند). این وضعیت هرگز در مورد بار دیده نشده است. جرم‌نگاری دوترون یونیزه (با دو پروتون، دو نوترون و یک الکترون) و هیلیوم یونیزه (باز هم با دو پروتون، دو نوترون و یک الکترون) به روشنی اختلاف جرم آنها را نشان می‌دهد. این دو عنصر ساختار کاملا متفاوت دارند، اجزاء سازنده‌ی آنها در درونشان با سرعت‌های کاملا متفاوت درهم می‌لولند. اختلاف انرژی آنها در تفاوت جرمی قابل اندازه‌گیری ظاهر می‌شود، اما با دقت بسیار زیادی، اختلاف قابل اندازه‌گیری در بار دو یون دیده نمی‌شود.

ناوردایی بار اهمیت ویژه‌ای به کوانتش بار◊ می‌دهد. مقدار بار الکتریکی همه‌ی ذره‌های بنیادی باردار از یک نوع، برابر اند. مقدار بار همه‌ی الکترون‌ها برابر اند. حالا می‌بینیم که این برابری دقیق نه تنها برای بارهایی برقرار است که نسبت به هم ساکن اند، بلکه برای هر حالت حرکت نسبی آنها هم برقرار است.

آزمایش‌هایی که در بالا توصیف کردیم، به همراه آزمایش‌های بسیار دیگر نشان می‌دهند که مقدار انتگرال سطح قانون گاوس، $\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$، *فقط به تعداد و انواع بارهای موجود در درون سطح S بستگی دارد و مستقل از نوع حرکت این بارهاست*. بنابه اصل نسبیت، اگر این گزاره در یک چارچوب لخت درست باشد، باید در هر چارچوب لخت دیگر هم درست باشد. پس، اگر F' چارچوب دیگری باشد که نسبت به چارچوب F حرکت می‌کند و S' سطح بسته‌ای در F' باشد که در زمان t' همان مقدار بار را دربر دارد که سطح S در زمان t دارد، باید داشته باشیم

$$\int_{S(t)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_{S'(t')} \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{a}' \qquad (9\text{-}90)$$

میدان $\mathbf{E}'$ البته در چارچوب F' اندازه‌گیری می‌شود، یعنی $\mathbf{E}'$ با نیرویی که به بار آزمون ساکن در F' وارد می‌شود، سنجیده می‌شود. تمایز بین t و t' را نباید فراموش کرد. می‌دانیم که دو رویداد هم‌زمان در چارچوب F لازم نیست که در چارچوب F'

* charge invariance
◊ charge quantization

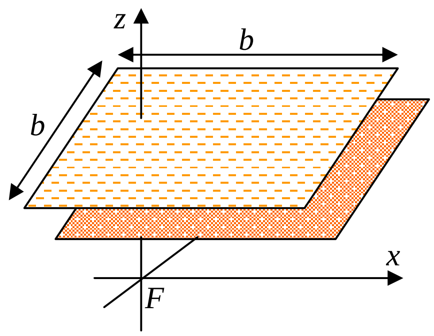
همزمان باشند. هر یک از انتگرال‌های سطح در رابطه‌ی (۹۰-۹) باید در یک لحظه در چارچوب خودشان محاسبه شوند. اگر بارها در مرز S یا S' باشند، باید دقت کرد و مطمئن بود که در زمان t مقدار بار موجود در درون S همان مقداری است که در زمان t' در درون سطح S'است.

رابطه‌ی (۹۰-۹) گزاره‌ای برای ناوردایی نسبیتی بار الکتریکی است. سطح گاوس را می‌توانیم در هر چارچوب لختی برگزینیم؛ انتگرال سطح به عددی می‌انجامد که مستقل از چارچوب است و در هر چارچوبی همان مقدار را خواهد داشت.

نکته: ناوردایی بار با پایستگی بار فرق دارد. پایستگی بار را در بخش ۸-۹ با رابطه‌ی (۸٦-۹) بیان کردیم. *پایستگی بار* به این معنی است که اگر سطح بسته‌ای شامل مقداری بار را در یک چارچوب در نظر بگیریم و هیچ ذره‌ی بارداری از مرزهای این سطح نگذرند، بار کل درون سطح ثابت باقی می‌ماند. *ناوردایی بار* به این معنی است که اگر به این مقدار بار از چارچوب‌های مختلف نگاه کنیم، همواره یک مقدار برای آن به‌دست خواهیم آورد. انرژی هم پایسته است، اما کمیت ناوردای نسبیتی نیست. بار هم پایسته است و هم ناوردای نسبیتی است. در واژگان نسبیت، انرژی یک مولفه‌ی یک چاربردار است، اما بار یک کمیت اسکالر، یک عدد، نسبت به تبدیل‌های لورنتس است. پیامدهای این واقعیت فراوان است و سرشت میدان بارهای متحرک را کاملا تعیین می‌کند.♣

۱۰-۹ میدان الکتریکی در چارچوب‌های متفاوت

اگر بار الکتریکی تحت تبدیل‌های لورنتس پایسته بماند، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ باید به شکل خاصی تبدیل بشود. تبدیل میدان به این معنی است که اگر ناظری در چارچوب F میدان الکتریکی را در زمان t و در مکان (x,y,z) اندازه بگیرد و مقداری برای آن به‌دست بیاورد، ناظر دیگری در چارچوب F' چه مقداری را برای $\mathbf{E}$ در همان مکان و زمان به‌دست خواهد آورد؟ برای گروه خاصی از میدان‌ها می‌توانیم پاسخ این پرسش را در سامانه‌های ساده با استفاده از قانون گاوس بیابیم.



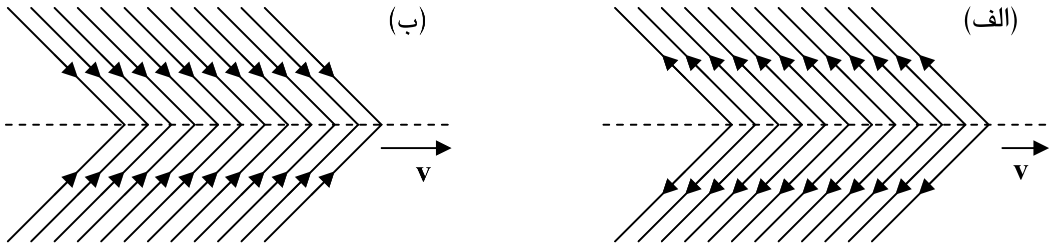
شکل ٤٤-۹ دو صفحه‌ی باردار ساکن در F

فرض کنید دو صفحه‌ی باردار با چگالی بار سطحی $+\sigma$ و $-\sigma$ در چارچوب F در حال سکون اند. صفحه‌ها را مربع‌های با ضلع b در نظر بگیرید و فرض کنید که جدایی آنها در مقایسه با ابعادشان بسیار کوچک است. آنها در شکل (٤٤-۹) نشان داده شده اند. صفحه‌های باردار در صفحه‌ی xy اند. در چارچوب F، میدان الکتریکی در فضای بین این دو صفحه $\sigma/\varepsilon_{\circ}$ است. حالا ناظر F' را در نظر بگیرید که با سرعت $\mathbf{v}$ به سوی چپ حرکت می‌کند و به صفحه‌های باردار نزدیک می‌شود. برای این ناظر، صفحه‌های "مربع" دیگر به شکل مربع نخواهد بود. بعد x' آنها کوچک خواهد شد و از b به $b\sqrt{1-\beta^2}$ کاهش خواهد یافت. $\beta \equiv v/c$ است. بار کل ناورداست و ناظر F' همان مقدار بار بر روی صفحه‌ها خواهد دید که ناظر ساکن F می‌بیند. پس، چگالی بار که ناظر F' اندازه می‌گیرد، بزرگ‌تر از چگالی بار σ است که ناظر F بر روی صفحه‌ها می‌بیند. در واقع، در چارچوب F' چگالی بار $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ برابر چگالی باری است که ناظر F اندازه می‌گیرد.

اگر همه‌ی دانش ما در باره‌ی میدان بار متحرک در رابطه‌ی (۹۰-۹) گنجانده شده باشد، در باره‌ی میدان الکتریکی که ناظر F' اندازه می‌گیرد چه می‌توانیم بگوییم؟

با اطمینان می‌توانیم بگوییم که میدان الکتریکی در بیرون صفحه‌ها صفر است و در فضای بین صفحه‌ها (دستکم برای حالتی

که صفحه‌ها تا بینهایت گسترده اند) یکنواخت است. میدان یک صفحه‌ی بینهایت گسترده نمی‌تواند به فاصله تا صفحه و مکان در امتداد صفحه بستگی داشته باشد، چون در این سامانه چیزی وجود ندارد که مکان را در روی صفحه متمایز کند. همه‌ی نقاط صفحه‌ی بینهایت گسترده همارز اند. تنها چیزی که فعلا می‌دانیم این است که خطهای میدان یک صفحه‌ی باردار متحرک با بار مثبت شاید همانند شکل (۴۵−۹ الف) باشد. میدان یک صفحه‌ی تنها با بار منفی هم شاید مانند شکل (۴۵−۹ ب) باشد. برنهی میدان‌های این دو، هنوز هم در بیرون صفحه‌ها صفر و در فضای بینشان یکنواخت خواهد بود

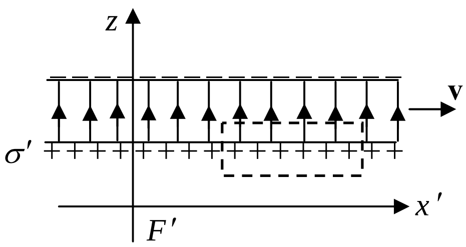


شکل ۴۵−۹ خطهای میدان صفحه‌ی متحرک با بار مثبت (سمت راست) و صفحه‌ی با بار منفی (چپ)

در واقع، میدان رویه‌ی باردار متحرک برعکس خطهای میدان فرضی در شکل بالا، در صفحه‌ی خودش بر رویه عمود است. این را به زودی نشان خواهیم داد.

اگر قانون گاوس را برای سطحی که در چارچوب F' ساکن است، به کار ببریم (شکل ۴۶−۹ را ببینید) خواهیم داشت

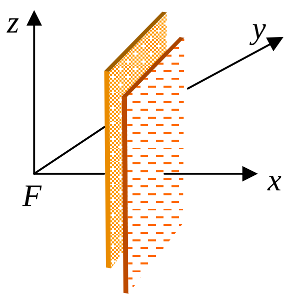
$$E'_z = \frac{\sigma'}{\varepsilon_\circ} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}E_z \quad \Rightarrow \quad E'_z = \gamma E_z \qquad (۹−۹۱)$$



شکل ۴۶−۹ سطح گاوس ساکن در F'

اینک وضعیت دیگری را در نظر بگیرید که صفحه‌های باردار همانند شکل (۴۷−۹) بر محور x عمود اند. میدان این صفحه‌ها از دید ناظر ساکن F برابر $\sigma/\varepsilon_\circ$ و در جهت محور x است. در این وضعیت، ناظر F' هم چگالی بار صفحه‌ها را σ می‌بینند. صفحه‌ها منقبض نشده اند، فقط فاصله‌ی بین صفحه‌ها انقباض یافته است. اما فاصله‌ی بین صفحه‌ها در تعیین میدان بین آنها نقشی ندارد. اگر قانون گاوس را به جعبه‌ای که در چارچوب F' ساکن است، به کار ببریم، می‌بینیم که این بار

$$E'_x = \frac{\sigma'}{\varepsilon_\circ} = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} = E_x \qquad (۹−۹۲)$$



شکل ۴۷−۹ صفحه‌های باردار متحرک

است. این همه برای آرایش ساده‌ی بارها درست است. اما آیا نتیجه‌ی این بررسی فقط در این مورد ساده برقرار است یا این که عمومیت دارد؟ پاسخ این پرسش در ژرفای معنی *میدان* نهفته است. اگر قرار است میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در یک نقطه‌ی فضا−زمان معنی یگانه داشته باشد، نمود $\mathbf{E}$ در چارچوب دیگری نمی‌تواند به سرشت چشمه‌ی تولید کننده‌ی میدان $\mathbf{E}$ بستگی داشته باشد. به بیان دیگر، وقتی ناظر F میدان را در همسایگی خود و در زمان معینی اندازه گرفت، تنها با استفاده از این اندازه‌گیری، باید بتواند پیش‌بینی کند که میدان در همان همسایگی و در همان زمان در چارچوب دیگری چگونه خواهد بود. اگر این چنین نمی‌بود، میدان هم مفهومی بیهوده می‌شد.

همین که نظریه‌ی میدان با تجربه هم‌خوانی دارد، گواه درستی گزاره‌ی بالاست.

اینک می‌توانیم نتیجه‌گیری‌های رابطه‌های (۹-۹۱) و (۹-۹۲) را که برای حالت خاص صفحه‌های باردار موازی به‌دست آوردیم، برای هر توزیع باری که نسبت به چارچوب F در حال سکون است، تعمیم دهیم. اگر ناظری در چارچوب F میدان E_z را در جهت z اندازه بگیرد، ناظری در چارچوب F' میدان را در همان نقطه‌ی فضا- زمان با $E'_z=\gamma E_z$ گزارش خواهد کرد. یعنی عددی به دست خواهد آورد که با ضریب γ بزرگ‌تر از عددی است که ناظر F از اندازه‌گیری E_z به‌دست می‌دهد. از سوی دیگر، اگر اندازه‌گیری F از میدان در راستای x (راستای حرکت F' نسبت به F) به E_x بیانجامد، ناظر F' هم مقدار E'_x را که برای میدان در راستای x گزارش می‌کند که با E_x برابر است. روشن است که جهت‌های y و z هم‌ارزند، یعنی هر دو بر نسبت به سرعت $\mathbf{v}$ عرضی اند (بر سرعت عمود اند) و هر چیزی که در باره‌ی E'_z گفته شد، برای E'_y هم درست است.

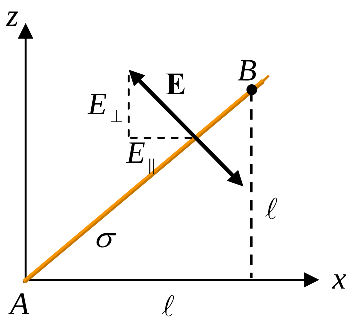
جهت میدان $\mathbf{E}$ در چارچوب F هر چه باشد، می‌توان آن را برنهی میدان‌ها در جهت‌های x، y و z پنداشت و از تبدیل هر یک از آنها بردار میدان $\mathbf{E}'$ را در چارچوب F' پیش‌بینی کرد.

بگذارید گفتار بالا را به زبانی بازگوییم که برای حرکت در هر جهتی مناسب باشد: بارهای ساکن در چارچوب F اند، چشمه‌ی میدان $\mathbf{E}$ اند. فرض کنید چارچوب F' نسبت به چارچوب F با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. در نقطه‌ای دلخواه در F میدان $\mathbf{E}$ را به دو مولفه‌ی طولی $E_\parallel$ و عرضی $E_\perp$ تجزیه کنید. مولفه‌ی طولی میدان، $E_\parallel$، موازی $\mathbf{v}$ و مولفه‌ی عرضی، $E_\perp$، آن بر $\mathbf{v}$ عمود است. در همان نقطه‌ی فضا- زمان و در چارچوب F'، میدان $\mathbf{E}'$ را به دو مولفه‌ی $E'_\parallel$ موازی با $\mathbf{v}$ و $E'_\perp$ عمود بر $\mathbf{v}$ تجزیه کنید. برای بارهایی که درچارچوب F ساکن هستند، داریم

$$E'_\parallel = E_\parallel \qquad , \qquad E'_\perp = \gamma E_\perp \tag{۹-۹۳}$$

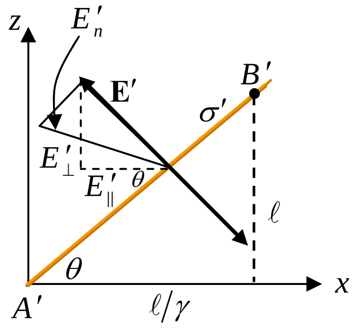
نتیجه‌ی بالا فقط برای بارهایی درست است که در چارچوب F ساکن اند. در فصل ۱۰ خواهیم دید که اگر بارها در چارچوب F حرکت کنند، پیش‌بینی میدان الکتریکی در چارچوب F' به آگاهی در باره‌ی دو میدان، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی، نیاز دارد. با این حال، نتیجه‌ای را که در این بخش یافتیم، سودمند است. اگر چارچوب لختی یافتیم که بارها در آن چارچوب ساکن اند، می‌توانیم از آن استفاده کنیم و میدان بار نقطه‌ای را که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، به‌دست آوریم.

مثال ۹-۱۴ صفحه‌ی کج: صفحه‌ی بارداری با چگالی بار یکنواخت σ در چارچوب F ساکن است. صفحه‌ی باردار نسبت به صفحه‌های xy و yz زاویه‌ی 45° دارد (شکل (۹-۴۸) را ببینید). میدان الکتریکی این صفحه‌ی باردار ساکن بر خود صفحه باردار عمود است. در چارچوب F' که نسبت به چارچوب F با سرعت $0{,}6c$ در جهت محور x ها حرکت می‌کند، این چیدمان چگونه توصیف می‌شود؟ یعنی بار سطحی σ' و جهت و اندازه‌ی میدان الکتریکی را در F' به‌دست آورید. مولفه‌ی عمود بر صفحه‌ی باردار میدان را در F' حساب کنید و درستی قانون گاوس را بیازمایید.



شکل ۹-۴۸ صفحه‌ی باردار در F

حل: وضعیت در چارچوب F' در شکل (۹-۴۹) نشان داده شده است. نخست چگالی بار سطحی σ' را حساب می‌کنیم. ضریب γ متناظر با $v=0{,}6c$ برابر $\gamma=5/4$ است. در نتیجه، وقتی از چارچوب F به F' می‌رویم، فاصله‌های طولی با ضریب $4/5$ کاهش می‌یابند. پس، فاصله‌ی بین نقاط A' و B' در چارچوب F' کوتاه‌تر از فاصله‌ی فاصله‌ی بین نقاط A و B در F است. بنابراین، با طول ℓ در شکل (۹-۴۸) فاصله‌ی بین A و B در F برابر $\sqrt{2}\ell$ است، در



شکل ۹-۴۸ صفحه‌ی باردار F'

حالی که فاصله‌ی بین نقاط A' و B' در چارچوب F' برابر $\ell\sqrt{۱+(۴/۵)^۲}$ است. چون بار ناورداست، همان مقدار بار بین A' و B' وجود دارد که بین A و B است. بنابراین،

$$\sigma'\sqrt{۱+(۴/۵)^۲}=\sigma\sqrt{۲} \;\Rightarrow\; \sigma'=(۱,۱۰۴۳)\sigma \qquad (۹-۹۴)$$

حالا میدان $\mathbf{E}'$ را حساب می‌کنیم. اندازه‌ی میدان $\mathbf{E}$ در چارچوب F برابر $\sigma/۲\varepsilon_۰$ است. جهت آن با محورها زاویه‌ی ۴۵° می‌سازد. شکل (۹-۴۷) را ببینید. معادله‌های (۹-۹۳) مولفه‌ی میدان را در چارچوب F' به‌دست می‌دهند. داریم

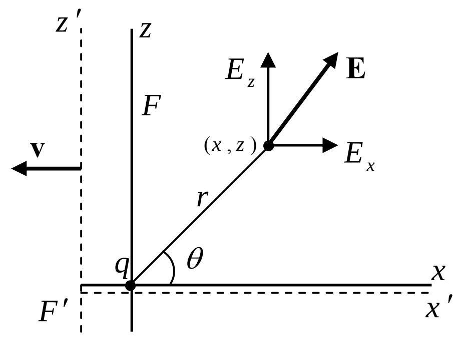
$$E'_\parallel=E_\parallel=E/\sqrt{۲} \qquad ; \qquad E'_\perp=\gamma E_\perp=\lambda E/\sqrt{۲} \qquad (۹-۹۵)$$

$\mathbf{E}'$ در شکل (۹-۴۸) نشان داده شده است. اندازه‌ی آن $E'=\left(E/\sqrt{۲}\right)\sqrt{۱+(۵/۴)^۲}=(۱,۱۳۱۹)E$ است. زاویه‌ی آن رو به بالاست و شیب خط میدان $E'_\perp/E'_\parallel=\gamma$ است. صفحه‌ی باردار هم به سوی بالا زاویه پیدا کرده است و شیب آن $\ell/(\ell/\gamma)=\gamma$ شده است. بنابراین، زاویه‌ی θ در شکل (۹-۴۸) برابر $\tan^{-۱}\gamma=۵۱,۳۴^\circ$ است. این بدان معنی است که $\mathbf{E}'$ با صفحه‌ی باردار زاویه‌ی ۲θ می‌سازد. به بیان دیگر، $\mathbf{E}'$ نسبت به خط عمود بر صفحه‌ی باردار $۲\theta-۹۰^\circ\approx ۱۲,۶۸^\circ$ دارد. مولفه‌ی عمود بر صفحه‌ی میدان E' عبارت است از

$$E'_n=E'\cos ۱۲,۶۸^\circ=(۱,۱۳۱۹E)\cos ۱۲,۶۸^\circ=(۱,۱۰۴۳)E \qquad (۹-۹۶)$$

می‌بینیم که مقدار E'_n/E با مقدار σ'/σ برابر است. چون $E=\sigma/۲\varepsilon_۰$ است، هر دو طرف این رابطه را می‌توان در ۱,۱۰۴۳ ضرب کرد و گفت $E'_n=\sigma'/۲\varepsilon_۰$ است. یعنی، هنوز هم قانون گاوس برقرار است. در چارچوب F' میدان مولفه‌ای هم موازی صفحه‌ی باردار دارد (این یکی در چارچوب F وجود نداشت)، اما تاثیری در شار گذرنده از سطح گاوس ندارد. می‌توانید با حل مسئله برحسب γ نشان دهید که هم‌خوانی عددها تصادفی نیست. (نگاه کنید به مسئله‌ی ....).

۹-۱۱ میدان ذره‌ی باردار نقطه‌ای که با سرعت ثابت حرکت می‌کند



شکل ۹-۴۹ میدان الکتریکی بارنقطه‌ای ساکن در F

بار نقطه‌ای q در مرکز چارچوب F در حال سکون است. اندازه‌ی میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ آن در هر نقطه برابر $q/۴\pi\varepsilon_۰ r^۲$ و جهت میدان شعاعی و به سوی بیرون است. در شکل (۹-۴۹) مولفه‌های میدان در صفحه‌ی xz دیده می‌شوند و در نقطه‌ی (x,z) برابر

$$E_x=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\cos\theta=\frac{qx}{۴\pi\varepsilon_۰\left(x^۲+z^۲\right)^{۳/۲}} \qquad (۹-۹۷)$$

$$E_y=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\sin\theta=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_۰\left(x^۲+z^۲\right)^{۳/۲}} \qquad (۹-۹۸)$$

حالا چارچوب F' را در نظر بگیرید که نسبت به چارچوب F با سرعت v در جهت $-\hat{\mathbf{x}}$ حرکت می‌کند. فرض کنید مبداء این دو چارچوب در زمان $t=۰$ برهم منطبق بوده‌اند (این فرض فقط برای سادگی است). پدیده‌ی انطباق دو مبداء را رویداد A بنامید. پس، مختصات رویداد A درچارچوب F عبارت است از $(x_A,y_A,z_A,t_A)=(۰,۰,۰,۰)$ و در چارچوب F' به صورت

$(x'_A, y'_A, z'_A, t'_A) = (0,0,0,0)$ است. رویداد B مکان فضازمان نقطه‌ی دیگری است که در چارچوب F آن را (x, y, z, t) و در چارچوب F' آن را (x', y', z', t') خواهیم نامید.

اگر چارچوب F' با سرعت $\mathbf{v}$ در راستای $+\hat{\mathbf{x}}$ نسبت به چارچوب F حرکت کند، تبدیل‌های لورنتس بین مختصات این دو چارچوب به قرار زیر است

$$x' = \gamma x - \gamma\beta ct, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma t - \frac{\gamma\beta x}{c} \tag{۹-۹۹}$$

در مثال ما چارچوب F' در جهت $-\hat{\mathbf{x}}$ با سرعت v نسبت به چارچوب F حرکت می‌کند. برای یافتن ارتباط بین مختصات یک رویداد در این چارچوب، می‌توان دو کار انجام داد. یا باید علامت β را عوض کنیم و یا در رابطه‌ی (۹-۹۹) جای کمیت‌های پرایم‌دار را عوض کنیم. چون می‌خواهیم x و z را برحسب x' و z' بنویسیم، گزینه‌ی دوم را برمی‌گزینیم. داریم

$$x = \gamma x' - \gamma\beta ct', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \gamma t' - \frac{\gamma\beta x'}{c} \tag{۹-۱۰۰}$$

در چارچوب F' مولفه‌های x و z میدان با رابطه‌های (۹-۹۱) و (۹-۹۲) داده شده اند. همین مولفه‌ها در چارچوب F با رابطه های (۹-۹۷) و (۹-۹۸) داده شده‌اند. اگر این دو معادله را با استفاده از تبدیل‌های (۹-۱۰۰) در چارچوب F' بنویسیم، خواهیم داشت

$$E'_x = \frac{q(\gamma x')}{4\pi\varepsilon_0\left[(\gamma x')^2 + z'^2\right]^{3/2}} = E_x \qquad , \qquad E'_z = \frac{\gamma(qz')}{4\pi\varepsilon_0\left[(\gamma x')^2 + z'^2\right]^{3/2}} = \gamma E_z \tag{۹-۱۰۱}$$

توجه کنید که $E'_z/E'_x = z'/x'$ است و نشان می‌دهد که زاویه‌ی بردار $\mathbf{E}'$ با محور x'، با زاویه‌ای که بردار شعاعی $\mathbf{r}'$ با محور x' می‌سازد، برابر است. بنابراین، جهت بردار $\mathbf{E}'$ برون‌سو و در راستای خطی است که از مکان لحظه‌ای بار q رسم می‌شود. اندکی درنگ کنید و بر این نتیجه‌گیری بیندیشید: اگر بار q در زمان t' (t' زمانی است که در چارچوب پرایم‌دار اندازه گرفته می‌شود، فرض کنید t' درست ساعت ۱۲ ظهر در چارچوب F' است) از مبداء مختصات چارچوب F' بگذرد، هر ناظری در هر نقطه‌ی چارچوب F' خواهد گفت که میدان الکتریکی در ساعت۱۲ ظهر در پیرامون او در راستای شعاعی نسبت به مبداء مختصات است. آیا این به معنی آن است که اطلاعات آنی انتقال پیدا می‌کند؟ چگونه ممکن است ناظری که ۱۰ کیلومتر دورتر از بار است، می‌داند که در آن لحظه بار q در کجا قرار دارد؟ البته این گونه نیست و چنین برداشتی هم نادرست است. توجه کنید که بار q با *سرعت یکنواخت* در حرکت دایمی بوده است و با برنامه‌ای از پیش تعیین شده می‌بایست در ساعت ۱۲ ظهر از مبداء می‌گذشت. این آگاهی پیشاپیش وجود داشت. اگر مایلید در قالب علت و معلول بیندیشید، در اینجا *تاریخچه‌ی گذشته‌ی* ذره است که میدان مشاهده شده را تعیین می‌کند. اگر برنامه‌ی حرکت بار از پیش تعیین شده نباشد (مثلا ذره حرکت کند و سپس بایستد و دوبار حرکت کند)، چه پیش می‌آید؟

شدت میدان الکتریکی در چارچوب F' را می‌توان از $E'^2_x + E'^2_z = E'^2$ به‌دست آورد

$$E'^2 = E'^2_x + E'^2_z = \frac{\gamma^2 q^2\left(x'^2 + z'^2\right)}{(4\pi\varepsilon_0)^2\left[(\gamma x')^2 + z'^2\right]^3} + \frac{q^2\left(x'^2 + z'^2\right)}{(4\pi\varepsilon_0)^2\gamma^4\left[x'^2 + z'^2 - \beta^2 z'^2\right]^3}$$

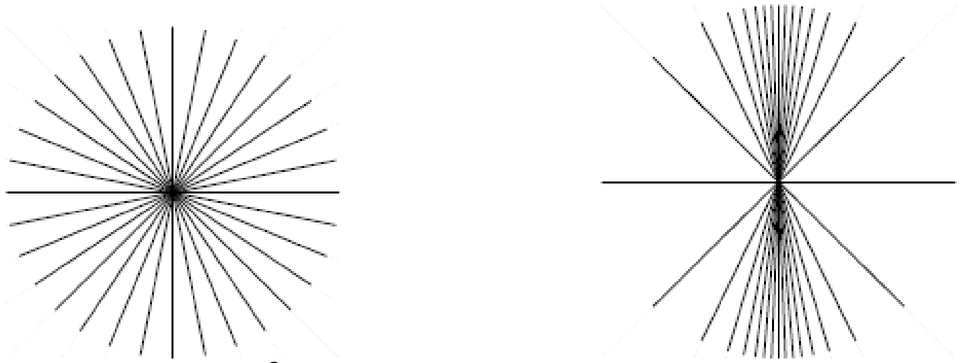
$$= \frac{q^2\left(1-\beta^2\right)^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2\left(x'^2 + z'^2\right)^2\left(1 - \frac{\beta^2 z'^2}{x'^2 + z'^2}\right)^3} \tag{۹-۱۰۲}$$

فاصله‌ی بار q در لحظه‌ای که از مبداء مختصات می‌گذرد تا نقطه‌ی (x',z') را $r'=\left(x'^{2}+z'^{2}\right)^{1/2}$ بنامید. زاویه‌ی بین این بردار شعاعی و بردار سرعت بار q را با θ' نشان دهید. توجه کنید که بار q در چارچوب F' در جهت مثبت x' حرکت می‌کند. چون $z'=r'\sin\theta'$ است، شدت میدان را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}r'^{2}}\frac{1-\beta^{2}}{\left(1-\beta^{2}\sin^{2}\theta'\right)^{3/2}} \qquad (9-103)$$

نه مبداء مختصات و نه صفحه‌ی $x'z'$ برتری خاصی نسبت به مبداء دیگرکه بر روی محور x'است یا صفحه‌ی دیگری که یک بعد آن را محور x' تشکیل می‌دهد، ندارد. بنابراین، به طور کلی می‌توان گفت که میدان الکتریکی بار الکتریکی که در حرکت یکنواخت است،در هر لحظه‌ی زمانی در راستای شعاعی از مکان لحظه‌ای بار است. اندازه‌ی این میدان با رابطه‌ی (۹-۱۰۳) داده شده است. θ' زاویه‌ی بین جهت حرکت بار و بردار شعاعی از مکان لحظه‌ای بار تا نقطه‌ای است که میدان در آنجا مشاهده می‌شود.

در سرعت‌های کم ($\beta^{2}\ll$)، اندازه‌ی میدان به $E'\approx q/r'^{2}$ کاهش می‌یابد وبه تقریب برای همه‌ی زمان‌ها یکسان است. این میدانی است که بار نقطه‌ای q ساکن درچارچوب F' تولید می‌کند. اگر β^{2} کوچک نباشد، شدت میدان در فاصله‌ی a از بار، در راستای عمود بر حرکت بار، قوی‌تر از شدت میدان در راستای حرکت می‌شود. در شکل (۹-۵۰) این وضعیت را برای باری که در راستای x' با $\beta=0$ حرکت می‌کند، نشان داده‌ایم. شدت میدان را با چگالی خط‌های میدان نشان داده‌ایم. برای مقایسه، در سمت چپ این شکل خط‌های میدان یک بار ساکن هم نشان داده شده است. همان‌گونه که از شکل پیداست، خط‌های میدان در



شکل ۹-۵۰ مقایسه‌ی خط‌های میدان بار ساکن و باری که با سرعت $\beta=0$ به سمت راست در حال حرکت است.

راستای حرکت بار ضعیف‌تر از خط‌های میدان بار ساکن است، اما خط‌های میدان بار متحرک در راستای عمود بر جهت حرکت قوی‌تر از خط‌های میدان بار ساکن است. این مشاهده با رابطه‌ی (۹-۱۰۳) سازگار است. برای نمونه، به‌ازای $\theta'=0$ داریم

$$E'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}r'^{2}}\left(1-\beta^{2}\right)=\frac{1}{\gamma^{2}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}r'^{2}}<\frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}r'^{2}} \qquad (9-104)$$

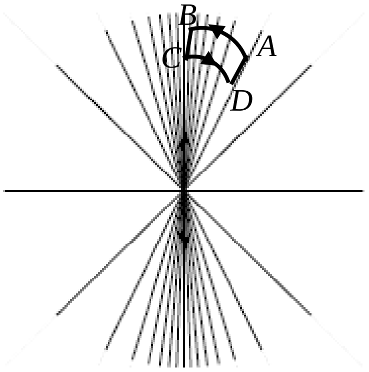
و به‌ازای $\theta'=\pi/2$ به‌دست می‌آید

$$E'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}r'^{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}}=\gamma\frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}r'^{2}}>\frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}r'^{2}} \qquad (9-105)$$

میدان الکتریکی بار متحرک بسیار چشم‌گیر است. این میدان، تقارن کروی ندارد، چون در چارچوب F' همه‌ی جهت‌ها هم‌ارز نیستند، بلکه جهت حرکت بار متمایز است و تقارن کروی را شکانده است. با این حال، میدان نسبت به صفحه‌ای که بر جهت

حرکت بار عمود است و از بار می‌گذرد، تقارن دارد. این جمله‌ی آخری کافی است که نشان دهیم میدان صفحه‌ی بارداری که در صفحه‌ی خودش حرکت می‌کند، در جهت عمود بر صفحه است.

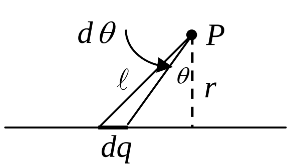
سرانجام، اگر باریکه‌ی پیوسته‌ای از بارهای متحرک با چگالی بار خطی λ داشته باشیم، میدان الکتریکی چگونه خواهد بود؟ از قانون گاوس می‌دانیم که میدان به‌صورت $\lambda/۲\pi\varepsilon_\circ r$ است. تا جایی که به میدان الکتریکی مربوط است، مهم نیست که بارها حرکت طولی دارند یا نه. اما چندان روشن نیست که جمع میدان‌های (نامتقارن کروی شکل (۵۰-۹)) تک بارها به ازای هر مقدار β برابر $\lambda/۲\pi\varepsilon_\circ r$ است. در مثال زیر درستی آن را نشان می‌دهیم.



شکل ۵۱-۹ میدان الکتریکی بار متحرک

هم‌چنین توجه کنید که هیچ نوع توزیع بار ساکنی نمی‌تواند میدانی همانند شکل (۵۱-۹) تولید کند. در این میدان انتگرال خط $\mathbf{E}'$ برروی مسیر بسته صفر **نیست**. برای مثال، مسیر بسته‌ی $ABCD$ را در نظر بگیرید، میدان الکتریکی بر بخش‌های دایره‌ای این مسیر عمود است و سهمی در انتگرال $\oint \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{s}$ ندارند. میدان در بخش شعاعی در امتداد BC قوی‌تر از راستای AD است و در نتیجه، $\oint \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{s} \neq ۰$ است. اما نباید فراموش کرد که $\mathbf{E}'$ میدان **الکتروستاتیک** نیست. بنابراین، نباید هم انتظار داشت که $\oint \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{s}$ صفر باشد. میدان $\mathbf{E}'$ در هر نقطه‌ی واقع در چارچوب F' در اثر حرکت بار چشمه، با زمان تغییر می‌کند.

مثال ۱۵-۹ میدان E بارهای متحرک: باریکه‌ی پیوسته‌ای از بارهای نقطه‌ای در امتداد محور x با سرعت v حرکت می‌کنند. باریکه از $-\infty$ تا $+\infty$ ادامه دارد. فرض کنید در چارچوب آزمایشگاه، چگالی بار در واحد طول λ است. با استفاده از سطح گاوس استوانه‌ای می‌دانیم که در فاصله‌ی r از محور x میدان برابر $E = \lambda/۲\pi\varepsilon_\circ r$ است. با استفاده از معادله‌ی (۱۰۳-۹) این نتیجه را دوباره به‌دست آورید و بر روی همه‌ی بارهای متحرک از ان انتگرال بگیرید.



شکل ۵۲-۹ میدان بار متحرک

حل: برای این که میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P حساب کنیم، بار جزیی dq را همانند شکل (۵۲-۹) در نظر بگیرید. زاویه‌ی θ در اینجا، متمم زاویه‌ی θ در شکل (۴۹-۹) است. پس، میدان جزء بار dq در نقطه‌ی P عبارت است از

$$dE = \frac{dq}{۴\pi\varepsilon_\circ \ell^۲}\frac{۱-\beta^۲}{\left(۱-\beta^۲\cos^۲\theta\right)^{۳/۲}} \qquad (۱۰۶-۹)$$

که در آن $\ell = r/\cos\theta$ است. طول بخش کوچک شامل dq برابر $d\left(r\tan\theta\right) = r\,d\theta/\cos^۲\theta$ است. در نتیجه، بار $dq = \lambda\left(r d\theta/\cos^۲\theta\right)$ است. بنابه تقارن، فقط مولفه‌ی عمود بر باریکه‌ی میدان صفر است. پس

$$E = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\frac{dq}{۴\pi\varepsilon_\circ \ell^۲}\frac{۱-\beta^۲}{\left(۱-\beta^۲\cos^۲\theta\right)^{۳/۲}}\cos\theta = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\frac{\lambda\left(r\,d\theta/\cos^۲\theta\right)}{\left(r/\cos\theta\right)^۲}\frac{۱-\beta^۲}{\left(۱-\beta^۲\cos^۲\theta\right)^{۳/۲}}\cos\theta$$

$$= \frac{\lambda\left(۱-\beta^۲\right)}{۴\pi\varepsilon_\circ r}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\frac{\cos\theta\, d\theta}{\left(۱-\beta^۲\cos^۲\theta\right)^{۳/۲}} \qquad (۱۰۷-۹)$$

پاسخ این انتگرال (از یک کامپیوتر یا از جدول انتگرال‌ها استفاده کنید) به صورت زیر است

$$\frac{\lambda\left(1-\beta^{2}\right)}{4\pi\varepsilon_{\circ}r}\frac{\sin\theta}{\left(1-\beta^{2}\right)\sqrt{1-\beta^{2}\cos^{2}\theta}}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\lambda\left(1-\beta^{2}\right)}{4\pi\varepsilon_{\circ}r}\frac{2}{\left(1-\beta^{2}\right)}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_{\circ}r} \qquad (۹-۱۰۸)$$

۹-۱۲ نیرویی که بر بار آزمون متحرک وارد می‌شود

با استفاده از معادله‌ی (۱۰۳-۹) می‌توان نیروی وارد به بار ساکن را در میدان یک بار متحرک حساب کرد. به بار آزمونی که که در میدان بار دیگری حرکت می‌کند، چه نیرویی وارد می‌شود؟

نخست، حالتی را در نظر بگیرید که بار تولید کننده‌ی میدان (بار چشمه) ساکن است و بار آزمون در این میدان حرکت می‌کند. در فصل ۲ به این وضعیت اشاره شد. در آنجا گفتیم که اگر بار آزمون q درمیدان بار ساکن قرار گیرد، به آن نیروی $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ وارد می‌شود. وجود میدان الکتریکی در مکان بار آزمون مستقل از خود بار آزمون است. در الکتروستاتیک، فقط لازم است که بارهای چشمه ساکن باشند. قانون نیروی $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ برای بار آزمون ساکن یا متحرکت یکسان است. می‌خواهیم درستی این گزاره را نشان دهیم. بار آزمون ممکن است الکترونی باشد که بین صفحه‌های باردار اسیلوسکوپ حرکت می‌کند یا ذره‌ی آلفا باشد که در میدان کولمبی هسته‌ی اتم حرکت می‌کند. در هر دو حالت، همواره می‌توان چارچوبی را یافت که در آن چارچوب چشمه‌ی تولید کننده‌ی میدان در حال سکون است. ما این چارچوب را *چارچوب آزمایشگاه* خواهیم نامید. فرض کنید در چارچوب ازمایشگاه در زمان t و در مکان (x,y,z) ذره‌ای با بار q در میدان الکتروستاتیک با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. چه نیرویی به این بار وارد می‌شود؟

نیرو آهنگ تغییر تکانه است. بنابراین، پرسش ما به راستی یافتن آهنگ تغییر تکانه‌ی ذره، $d\mathbf{p}/dt$ در زمان t و در مکان (x,y,z) در چارچوب آزمایشگاه F است. بگذارید این وضعیت را از چارچوبی بررسی کنیم که در زمان مورد نظر با ذره حرکت می‌کند. این چارچوب را F' بنامید. ذره در چارچوب F' در حال سکون است. بار دیگری که میدان را به‌وجود آورده است، در چارچوب F' در حال حرکت است. این وضعیتی است که می‌دانیم چگونه با آن کنار بیاییم. مقدار بار q در چارچوب F' همان است که در چارچوب F است؛ چون بار الکتریکی ناورداست. نیروی وارد به بار ساکن q در F' برابر $q\mathbf{E}'$ است. $\mathbf{E}'$ میدانی است که در چارچوب F' دیده می‌شود (در این چارچوب، میدان را بار متحرک تولید کرده است). از رابطه‌های (۹۳-۹) می‌دانیم که چگونه می‌توان $\mathbf{E}'$ را با دانستن $\mathbf{E}$ حساب کرد. پس، با دانستن $\mathbf{E}$ می‌توانیم آهنگ تغییر تکانه‌ی ذره را در چارچوب F' به‌دست آورد. بیان هم‌ارز برای مسئله‌ی ما این است که هنگام رفتن از یک چارچوب لخت به چارچوب لخت دیگر، آهنگ تغییر تکانه چگونه تبدیل می‌شود؟

جزییات پاسخ به این پرسش در پیوست مربوط به نسبیت این کتاب آمده است. در راستای *موازی* حرکت نسبی دو چارچوب، مولفه‌ی نیرو در چارچوب متحرک با مولفه‌ی نیرو در چارچوب ساکن ذره *یکسان* است. مولفه‌ی نیرو در راستای عمود بر سرعت نسبی دو چارچوب، در چارچوب متحرک همواره با ضریب $1/\gamma$ کوچک‌تر از مقدار آن در چارچوب سکون ذره است. اگر از نمادهای $\|$ و $\perp$ به ترتیب، برای موازی سرعت نسبی بودن و عمود بر سرعت نسبی بودن دو چارچوب F و F' استفاده کنیم، گفتار بالا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\frac{dp_{\|}}{dt}=\frac{dp'_{\|}}{dt'} \qquad , \qquad \frac{dp_{\perp}}{dt}=\frac{1}{\gamma}\frac{dp'_{\perp}}{dt'} \qquad (۹-۱۰۹)$$

توجه کنید که در این رابطه‌ها بین کمیت‌های دو چارچوب F و F' تقارن وجود ندارد. چارچوب سکون ذره (که در اینجا

چارچوب F' است) چارچوب خاصی است و اندازه‌ی مولفه‌ی عرضی نیرو بزرگ‌تر از مقدار آن در چارچوب متحرک F است.
معادله‌های (۱۰۹-۹) قانون‌های تبدیل مولفه‌های نیروست. با این قانون‌ها و قانون‌های تبدیل میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در معادله‌های (۹۳-۹)، اینک می‌توانیم به ذره‌ی بارداری برگردیم که در میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ حرکت می‌کند.
نخست مولفه‌ی $E_\parallel$ (مولفه‌ی میدان که با جهت لحظه‌ای حرکت ذره‌ی باردار موازی است) میدان $\mathbf{E}$ را در نظر بگیرید. آن را به چارچوبی مانند F' ببرید که در آن لحظه به همراه ذره حرکت می‌کند. در این چارچوب (که چارچوب سکون ذره است) مولفه‌ی طولی میدان الکتریکی، $E'_\parallel$ است و بنا به رابطه‌ی (۹۳-۹)، $E'_\parallel = E_\parallel$ است. پس، نیروی $dp'_\parallel/dt'$ عبارت است از

$$\frac{dp'_\parallel}{dt'} = qE'_\parallel = qE_\parallel \tag{۱۱۰-۹}$$

ناظری که در چارچوب F مولفه‌ی طولی نیرو را اندازه می‌گیری، آهنگ تغییر تکانه، $dp_\parallel/dt$، را به‌دست می‌آورد. بر اساس رابطه‌ی (۱۰۹-۹) ، $dp_\parallel/dt = dp'_\parallel/dt'$ است. بنابراین، در چارچوب F مقدار اندازه‌گیری شده‌ی مولفه‌ی طولی نیرو برابر

$$\frac{dp_\parallel}{dt} = \frac{dp'_\parallel}{dt'} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_\parallel}{dt} = qE_\parallel \tag{۱۱۱-۹}$$

است. نکته در این است که با گذشت زمان، ذره در چارچوب F' در حال سکون باقی **نمی‌ماند**، بلکه بر اثر میدان $\mathbf{E}'$ شتاب پیدا خواهد کرد و سرعت $\mathbf{v}'$ (سرعت ذره در چارچوب لخت لحظه‌ای) به تدریج افزایش پیدا می‌کند. با این حال، چون شتابی که ذره پیدا می‌کند، شتاب لحظه‌ای است، فقط مقدارهای جزیی v' حضور دارند و شرایط محدود کننده‌ی رابطه‌های (۱۰۹-۹) برآورده می‌شوند.
حالا مولفه‌ی $E_\perp$ (مولفه‌ی عرضی میدان در چارچوب F) را در نظر بگیرید. قاعده‌ی تبدیل آن بین دو چارچوب، $E'_\perp = \gamma E_\perp$ است. بنابراین، داریم

$$\frac{dp'_\perp}{dt'} = qE'_\perp = q\gamma E_\perp \tag{۱۱۲-۹}$$

حال اگر این نیرو را به چارچوب F ببریم، γ حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$\frac{dp_\perp}{dt} = \frac{۱}{\gamma}\frac{dp'_\perp}{dt'} = \frac{۱}{\gamma}\left(\gamma q E_\perp\right) \;\Rightarrow\; \frac{dp_\perp}{dt} = qE_\perp \tag{۱۱۳-۹}$$

دو معادله‌ی (۱۱۱-۹) و (۱۱۳-۹) پیام ساده‌ای دارند: نیروی وارد به ذره‌ی بارداری که در چارچوب F و در میدان $\mathbf{E}$ در آن چارچوب، حرکت می‌کند، $q\mathbf{E}$ است و *به سرعت ذره بستگی ندارد*.
این نتیجه‌گیری باید برای شما آشنا باشد. پیش‌تر، در فصل ۲ گفته بودیم که نیروی وارد به بار آزمون در حال حرکت $q\mathbf{E}$ است. اینک آن را ثابت کردیم. می‌توانیم از آن به عنوان یک واقعیت تجربی نام ببریم. درستی این نتیجه‌گیری برای الکترون تا سرعت‌های خیلی نزدیک به سرعت نور (تا حد $\gamma = ۱۰^{۴}$) آزموده شده است. از این دیدگاه، این قانون بسیار چشم‌گیر است و نتیجه‌ی مستقیم ناوردایی بار الکتریکی است.

مثال ۱۶-۹ الکترون در اسیلوسکوپ: میدان الکتریکی بین صفحه‌های یک اسیلوسکوپ (خازن تخت) در چارچوب آزمایشگاه E است. الکترونی با سرعت $v_\circ$ و موازی با صفحه‌های اسیلوسکوپ به این ناحیه وارد می‌شود. اگر طول صفحه‌ها ℓ باشد، هنگام خروج الکترون از صفحه‌های اسیلوسکوپ، تکانه‌ی عرضی و انحراف عرضی الکترون چقدر اند؟ این مسئله را نخست در چارچوب آزمایشگاه حل کنید و سپس در چارچوب لختی آن را حل کنید که چارچوب الکترون در هنگام وارد شدن به ناحیه‌ی

بین صفحه‌های اسیلوسکوپ (خازن تخت) است. می‌توانید فرض کنید که حرکت عرضی الکترون غیر نسبیتی است.
حل: در چارچوب ازمایشگاه F : جهت حرکت اولیه‌ی الکترون را راستای x برگزینید. در چارچوب آزمایشگاه F مولفه‌ی x تکانه $p_x = \gamma m v_\circ$ است که در آن $\gamma = ۱\big/\sqrt{۱-v_\circ^۲/c^۲}$ است. چون در راستای x نیرویی وجود ندارد، تکانه‌ی p_x تغییر نمی‌کند. مدت زمانی را که الکترون در بین صفحه‌ها سپری می‌کند $t = \ell/v_\circ$ است. اندازه‌ی نیروی عرضی مقدار ثابت eE است و با آهنگ تغییر تکانه‌ی عرضی برابر است. بنابراین، تکانه‌ی عرضی نهایی الکترون عبارت است از

$$p_y = (eE)t = \frac{eE\,\ell}{v_\circ} \qquad (۹-۱۱۴)$$

چون $p_y = \gamma m v_y$ است، در هنگام خروج الکترون از فضای بین صفحه‌ها، سرعت عرضی آن عبارت است از

$$v_y = \frac{p_y}{\gamma m} = \frac{eE\,\ell}{\gamma m v_\circ} \qquad (۹-۱۱۵)$$

(توجه کنید که γ با سرعت کل ذره حساب می‌شود که در اینجا اساسا $v_\circ$ است. برای محاسبه‌ی γ **نباید** از v_y استفاده کنید.)
چون نیروی عرضی مقدار ثابتی است و ما فرض می‌کنیم که سرعت عرضی نانسبیتی است، شتاب عرضی هم مقدار ثابتی است. پس، سرعت عرضی میانگین نصف مقداری است که در رابطه‌ی (۱۱۵-۹) برای v_y به‌دست آوردیم: $\bar{v}_y = eE\,\ell/۲\gamma m v_\circ$.
مسافت عرضی که ذره می‌پیماید، عبارت است از

$$y = \bar{v}_y t = \frac{eE\,\ell}{۲\gamma m v_\circ}\frac{\ell}{v_\circ} = \frac{eE\,\ell^۲}{۲\gamma m v_\circ^۲} \qquad (۹-۱۱۶)$$

در چارچوب سکون اولیه‌ی الکترون، F': اگرچه الکترون به تدریج در راستای عرضی از این چارچوب شتاب خواهد یافت، ما هنوز آن را چارچوب الکترون خواهیم نامید.) در این چارچوب صفحه‌های اسیلوسکوپ با سرعت $v_\circ$ به سوی چپ حرکت می‌کنند و طول صفحه‌ها انقباض یافته و برابر ℓ/γ است. پس، زمانی را که الکترون بین صفحه‌ها سپری می‌کند (در واقع این زمانی است که طول می‌کشد تا صفحه‌ها از بالا و از زیر الکترون بگذرند) برابر است با

$$t' = \frac{\ell/\gamma}{v_\circ} = \frac{t}{\gamma} \qquad (۹-۱۱۷)$$

میدان الکتریکی در این چارچوب γ برابر میدان در چارچوب آزمایشگاه است. بنابراین، $E' = \gamma E$ است. پس، تکانه‌ی عرضی که الکترون به‌دست می‌آورد

$$p'_y = eE't' = e(\gamma E)\frac{t}{\gamma} = eEt = \frac{eE\,\ell}{v_\circ} \qquad (۹-۱۱۸)$$

است. این مقدار با نتیجه‌ای که در چارچوب آزمایشگاه یافتیم یکی است. این گونه هم باید باشد، چون تبدیل لورنتس در راستای x نباید تاثیری بر تکانه‌ی عرضی داشته باشد.
در چارچوب F' الکترون نانسبیتی است، بنابراین، v'_y نهایی برابر $v'_y = p'_y/m = eE\,\ell/mv_\circ$ است (توجه کنید که این مقدار γ برابر سرعت نهایی v_y در چارچوب آزمایشگاه است). پس، سرعت عرضی میانگین $\bar{v}'_y = v'_y/۲ = eE\,\ell/۲mv_\circ$ است. در نتیجه، فاصله‌ی عرضی کل

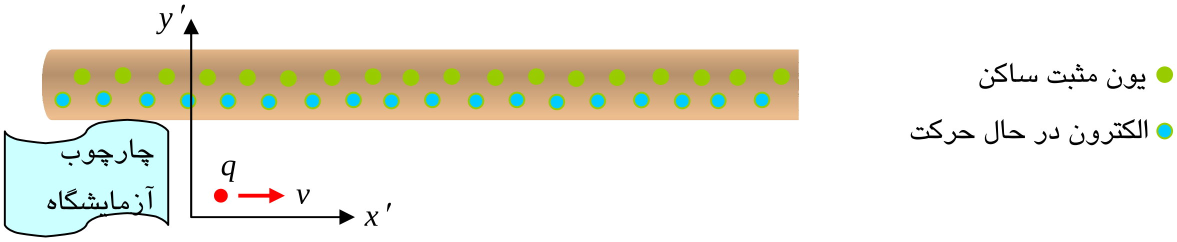
$$y' = \bar{v}'_y t' = \frac{eE\,\ell}{۲mv_\circ}\frac{\ell}{\gamma v_\circ} = \frac{eE\,\ell^۲}{۲\gamma m v_\circ^۲} \qquad (۹-۱۱۹)$$

است و با مقدار y در چارچوب آزمایشگاه یکسان است. انتظار این یافته را داشتیم، چون تبدیل لورنتس در راستای افقی

تاثیری بر فاصله‌های عرضی ندارد.
اگر می‌خواستید از رابطه‌ی سینماتیک $y = at^2/2$ در هر دو چارچوب استفاده کنید، باز هم به نتیجه‌ی $y' = y$ می‌رسیدید؛ چون در چارچوب F' الکترون زمان t' با ضریب γ کوتاه‌تر از زمان در چارچوب آزمایشگاه است، اما شتاب با ضریب γ^2 بزرگ‌تر است.

۹-۱۳ برهم‌کنش بین دو ذره‌ی درحال حرکت

وقتی بار الکتریکی حرکت می‌کند، ممکن است به آن نیروی وابسته به سرعت وارد بشود. نیروی وابسته به سرعت به میدان مغناطیسی مربوط است. چشمه‌ی میدان مغناطیسی جریان‌های الکتریکی اند، یعنی بارهای دیگری که در حال حرکت اند.
آزمایش اورستد نشان داد که جریان‌های الکتریکی بر آهنرباها تاثیر می‌گذارند، اما در زمان اورستد سرشت مغناطیس کاملا ناشناخته بود. آمپر و دیگران برهم‌کنش جریان‌های الکتریکی را بررسی کردند. یک نمونه‌ی برهم‌کنش بین جریان‌های الکتریکی ربایش بین دو سیم حامل جریان‌های همسو است که در آغاز همین فصل به آن پرداختیم. آمپر با بررسی مواد مغناطیسی به این نتیجه رسید که مواد مغناطیسی شامل جریان‌های چرخشی دایمی اند. با پیشنهاد آمپر می‌توان انحراف عقربه‌ی مغناطیسی را در همسایگی سیم حامل جریان به صورت برهم‌کنش بین جریان گذرنده از سیم و جریان‌های میکروسکوپیکی دائمی عقربه توصیف کرد.
برهم‌کنش مغناطیسی جریان‌های الکتریکی را می‌توان نتیجه‌ی مستقیم قانون کولمب دانست. اگر اصول نسبیت درست باشند و بار الکتریکی ناوردا باشد و قانون کولمب برقرار باشد، اثرهایی که آنها را "مغناطیسی" می‌نامیم باید رخ بدهند. در این بخش می‌خوایم همین گزاره را نشان دهیم. با بررسی برهم‌کنش الکتریکی بین دو بار متحرک این اثرها ظاهر خواهند شد. این پدیده را با یک سامانه‌ی ساده نشان خواهیم داد.
در چارچوب آزمایشگاه با مختصات فضایی x, y, z یک سیم مسی بینهایت درازی را در نظر بگیرید. یون‌های مثبت در سیم ساکن اند و الکترون‌های با بار منفی با سرعت v_0 به سوی راست حرکت می‌کنند. در شکل (۹-۵۳) ما یون‌ها و الکترون‌ها را به صورت توزیع خطی نشان داده‌ایم. اندازه‌ی چگالی بار خطی یون‌های مثبت و الکترون‌های منفی را λ_0 C/m بنامید. بنابراین، در هر طول ℓ سیم و در هر زمان تعداد پروتون‌ها و الکترون‌های سیم برابرند و بار خالص سیم صفر است. اگر سطح گاوسی به شکل استوانه‌ی هم‌محور با سیم در نظر بگیریم، قانون گاوس می‌گوید که شاری از آن نمی‌گذرد، چون بار کل محصور در درون سطح گاوس صفر است. پس، میدان الکتریکی در همه‌ی نقاط بیرون سیم باید صفر باشد. به بار آزمونی که در همسایگی این سیم در حال سکون است، نیرویی وارد نمی‌شود.



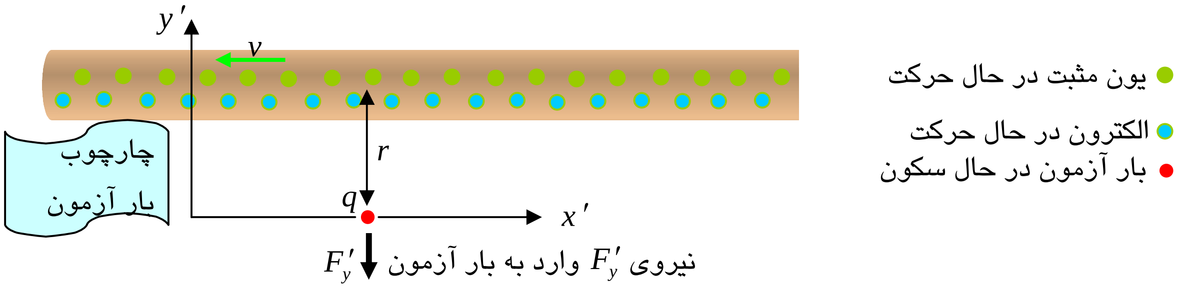
شکل ۹-۵۳ یون‌ها و الکترون‌های سیم مسی در چارچوب آزمایشگاه. در این چارچوب سرعت بار آزمون v است.

فرض کنید در چارچوب آزمایشگاه بار آزمون q ساکن نیست، بلکه در جهت محور x با سرعت v حرکت می‌کند. حالا وضعیت

را در چارچوب F' با محورهای y', x' در نظر بگیرید که به همراه بار آزمون حرکت می‌کند. در این چارچوب، بار آزمون در حال سکون است، اما سیم مسی به دو دلیل دگرگون شده است: یون‌های مثبت در این چارچوب نزدیک به هم به نظر می‌رسند و الکترون‌ها دورتر از یکدیگر اند. این دگرگونی در سیم به این دلیل پدید می‌آید که چارچوب آزمایشگاه (که یون‌های در آن ساکن بودند) حالا با سرعت v حرکت می‌کند و فاصله‌ی بین یون‌ها در چارچوب بار آزمون با ضریب $1/\gamma$ یا $\sqrt{1-v^2/c^2}$ انقباض پیدا می‌کند. بنابراین، چگالی بارهای مثبت در این چارچوب افزایش می‌یابد و به مقدار $\gamma\lambda_0$ می‌رسد.

محاسبه‌ی چگالی بارهای الکترون اندکی طولانی‌تر است، چون الکترون‌ها در چارچوب آزمایشگاه با سرعت v_0 در حرکت بودند و در نتیجه، چگالی خطی آنها در چارچوب ازمایشگاه (که $-\lambda_0$) است به سبب انقباض لورنتس، پیشاپیش افزایش پیدا کرده است. در چارچوب خود الکترون‌ها چگالی بارهای منفی می‌بایستی $-\lambda_0/\gamma_0$ می‌بود (γ_0 ضریب لورنتس مربوط به v_0 است).

برای این که چگالی بارهای منفی را در چارچوب همراه بار آزمون حساب کنیم، حالا باید سرعت الکترون‌ها (v_0') را در



شکل ۹-۵۴ یون‌ها و الکترون‌های سیم مسی در چارچوب بار ازمون. در این چارچوب بار آزمون ساکن است، اما یون‌های مثبت با سرعت v به سوی چپ حرکت می‌کنند و سرعت الکترون‌ها v_0' است.

چارچوب همراه بار آزمون به‌دست بیاوریم. برای این کار باید سرعت‌های $-v$ و v_0 را با استفاده از قاعده‌ی جمع سرعت‌های نسبیتی جمع کنیم (پیوست نسبیت را در پایان کتاب ببینید). با نامگذاری‌های $\beta_0'=v_0'/c$ و $\beta_0=v_0/c$ و $\beta=v/c$ داریم

$$\beta_0'=\frac{\beta_0-\beta}{1-\beta\beta_0} \qquad (۹-۱۲۰)$$

ضریب لورنتس متناظر با این سرعت $-\gamma_0'$ را با اندک محاسبه می‌توانید از رابطه‌ی (۹-۱۲۰) حساب کنید. مقدار آن

$$\gamma_0'\equiv\left(1-\beta_0'^2\right)^{-1/2}=\gamma\gamma_0\left(1-\beta\beta_0\right) \qquad (۹-۱۲۱)$$

است. وقتی چگالی بار الکترون‌ها را از چارچوب بار آزمون اندازه می‌گیریم،چگالی بار، نسبت به چارچوب سکون خود الکترون، با این ضریب افزایش پیدا می‌کند. چگالی بار خطی در چارچوب بار آزمون از دو بخش تشکیل شده است: چگالی بار یون‌های مثبت و چگالی بار الکترون‌های منفی. این دو در چارچوب آزمایشگاه از نظر اندازه برابر بودند، اما حالا هر یک به گونه‌ی متفاوتی تغییر کرده است. اگر چگالی بار کل را در چارچوب بار آزمون λ' بنامیم، خواهیم داشت

$$\lambda'=\gamma\lambda_0-\tfrac{\lambda_0}{\gamma_0}\gamma\gamma_0\left(1-\beta\beta_0\right)=\lambda\beta\beta_{0\lambda_0} \qquad (۹-۱۲۲)$$

γ ضریب گذار به چارچوب بار آزمون است. λ_0 چگالی بارهای مثبت در چارچوب سکون یون‌ها (چارچوب آزمایشگاه) است. $-\lambda_0/\gamma_0$ چگالی بارهای منفی در چارچوب سکون الکترون‌هاست (توجه کنید که چارچوب آزمایشگاه، چارچوب سکون الکترون نیست، در این چارچوب الکترون با سرعت v_0 حرکت می‌کند). $\gamma_0'\equiv\left(1-\beta\beta_0\right)$ ضریب لورنتس برای بردن چکالی بار الکترون به چارچوب بار آزمون است.

می‌بینیم که چگالی بار کل سیم (در چارچوب بار آزمون) مثبت است. بنابراین، قانون گاوس می‌گوید این سیم بینهایت دراز در پیرامون خود میدان الکتریکی شعاعی E'_r تولید می‌کند (از دید چارچوب بار آزمون). اندازه‌ی میدان عبارت است از

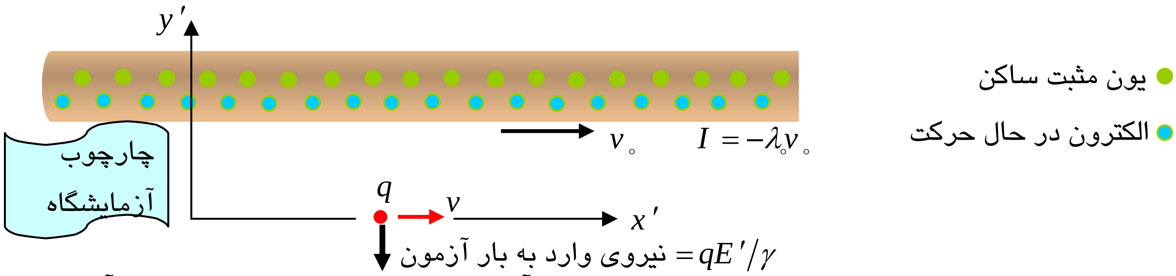
$$E'_r = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r'} \qquad (۹-۱۲۳)$$

جهت این میدان در مکان بار آزمون q به‌سوی $-y'$ است. شکل (۵۴-۹) را ببینید. بنابراین، به بار آزمون نیروی

$$F'_y = qE'_y = -\frac{q\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r'} \qquad (۹-۱۲۴)$$

وارد خواهد شد.

حالا برگردیم به چارچوب آزمایشگاه. این وضعیت در شکل (۵۵-۹) نشان داده شده است. اندازه‌ی نیروی وارد به بار آزمون q در این چارچوب چقدر است؟ اگر اندازه‌ی آن در چارچوب سکون بار آزمون qE'_y باشد، بنا به رابطه‌ی (۱۰۹-۹) آزمایشگر ساکن در چارچوب آزمایشگاه مقدار اندازه‌گیری خود را با ضریب $1/\gamma$ کوچکتر گزارش خواهد کرد. چون $r' = r$ است، در



شکل ۵۵-۹ یون‌ها و الکترون‌های سیم مسی در چارچوب آزمایشگاه. در این چارچوب سرعت بار آزمون v است. یون‌ها در حال سکون و الکترون‌ها با سرعت v_0 حرکت می‌کنند و جریان $I = -\lambda_0 v_0$ تولید می‌کنند.

نیرویی که در چارچوب آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود و بر بار آزمون در حال حرکت وارد می‌شود، عبارت است از

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma} = -\frac{q\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (۹-۱۲۵)$$

اما $-\lambda_0 v_0$ یا $-\lambda_0\beta_0 c$ جریان کل است در سیم است که در چارچوب آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود، چون مقدار باری است که در واحد زمان از هر نقطه‌ی سیم شارش می‌کند. نتیجه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F_y = \frac{qv_x I}{2\pi\varepsilon_0 rc^2} \qquad (۹-۱۲۶)$$

این نیرو در جهت $-\hat{\mathbf{y}}$ است. پس، در چارچوب آزمایشگاه به بار آزمون متحرک، نیرویی در راستای y وارد می‌شود. این نیرو با جریان موجود در سیم و سرعت بار آزمون در راستای x متناسب است. چون در چارچوب آزمایشگاه میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ صفر است، این نیرو را میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ به وجود می‌آورد. با استفاده از قانون نیروی لورنتس، میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ متناظر با نیروی وارد به بار آزمون بالا را می‌توان حساب کرد

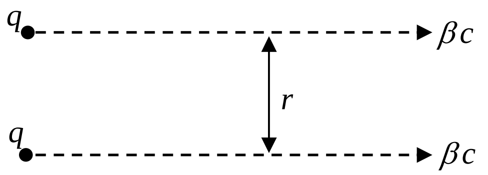
با توجه به شکل (۵۳-۹)، بار آزمون q در چارچوب آزمایشگاه در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. بنابراین، $\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{x}}$ است. اندازه‌ی نیروی وارد به بار آزمون را در رابطه‌ی (۱۲۶-۹) حساب کردیم؛ جهت آن در راستای $-\hat{\mathbf{y}}$ است. پس،

$$\mathbf{F} = -\frac{qvI}{2\pi\varepsilon_0 rc^2}\hat{\mathbf{y}} \qquad (۹-۱۲۷)$$

چون میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ صفر است، از برابری رابطه‌ی (۱۲۷-۹) با قانون نیروی لورنتس به‌دست می‌آید

$$\mathbf{F}=q\left[\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right]=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}=-\frac{qvI}{2\pi\varepsilon_\circ rc^2}\hat{\mathbf{y}}\qquad\Rightarrow\qquad\boxed{\mathbf{B}=\frac{I}{2\pi\varepsilon_\circ rc^2}\hat{\mathbf{z}}}\tag{۹-۱۲۸}$$

مثال۱۷-۹ نیروی بین دو پروتون درحال حرکت: دو پروتون به فاصله‌ی r از یکدیگرموازی هم حرکت می‌کنند. سرعت هر دو در چارچوب آزمایشگاه βc است. شکل (۵۶-۹) را ببینید. بنا به رابطه‌ی (۱۰۳-۹) در مکان لحظه‌ای یک پروتون، میدان الکتریکی پروتون دیگر (در چارچوب آزمایشگاه) $\gamma e/4\pi\varepsilon_\circ r^2$ است (e بار الکتریکی پروتون است). اما نیرویی که در چارچوب آزمایشگاه به پروتون وارد می‌شود، برابر $\gamma e^2/4\pi\varepsilon_\circ r^2$ **نیست**. درستی این گزاره را نشان دهید. برای این کار، نخست نیروی وارد به پروتون را در چارچوب سکون آن حساب کنید و سپس نتیجه را به چارچوب آزمایشگاه ببرید. نشان دهید که اگر یک میدان مغناطیسی با اندازه‌ی β/c برابر میدان الکتریکی وجود داشته باشد، می‌توان تناقض بالا را توضیح داد.



شکل ۵۶-۹ دو پروتون متحرک موازی

حل: در چارچوب سکون پروتون‌ها نیروی رانشی بین آنها $e^2/4\pi\varepsilon_\circ r^2$ است. بنابراین، در چارچوب آزمایشگاه نیرو برابر $(1/\gamma)\left(e^2/4\pi\varepsilon_\circ r^2\right)$ است. به یاد بیاورید که نیرو همیشه در چارچوب سکون ذره بزرگ‌تر است. این نیروی کل **صحیح** در چارچوب آزمایشگاه است. اما نیروی الکتریکی رانشی $e\mathbf{E}$ در چارچوب آزمایشگاه $\gamma e^2/4\pi\varepsilon_\circ r^2$است، چون رابطه‌ی(۱۰۳-۹) می‌گوید، میدان الکتریکی بار متحرک در راستای عرضی در چارچوب آزمایشگاه، γ برابر بزرگ‌تر از میدانی است که در چارچوب سکون ذره اندازه‌گیری می‌شود (در چارچوب سکون ذره میدان در همه‌ی جهت‌ها یکسان و برابر $e/4\pi\varepsilon_\circ r^2$ است). بنابراین، به نظر می‌رسد که باید نیروی ربایشی دیگری وجود داشته باشد که بخشی از نیروی رانشی $\gamma e^2/4\pi\varepsilon_\circ r^2$ را حذف می‌کند و آن را به مقدار $(1/\gamma)\left(e^2/4\pi\varepsilon_\circ r^2\right)$ کاهش می‌دهد. اندازه‌ی این نیروی ربایشی باید (با استفاده از $1/\gamma^2=1-\beta^2$) برابر

$$\frac{\gamma e^2}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}-\frac{e^2}{\gamma 4\pi\varepsilon_\circ r^2}=\gamma\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}=\gamma\beta^2\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}=e\left(\beta c\right)\left(\frac{\beta}{c}\frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\right)\tag{۹-۱۲۹}$$

باشد. دلیل این که نیرو را به صورت بالا نوشتیم این است که بتوانیم آن را همانند نیروی مغناطیسی $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ توصیف کنیم. اگر اندازه‌ی میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را $(\beta/c)\left(\gamma e/4\pi\varepsilon_\circ r^2\right)$ بنامیم، می‌بینیم که اندازه‌ی آن β/c برابر مقدار میدان الکتریکی در چارچوب آزمایشگاه است. اگر میدان مغناطیسی در مکان پروتون بالایی (پایینی) به سوی بیرون از صفحه (به سوی صفحه) باشد، جهت بردار حاصل از ضرب برداری $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ ربایشی بودن نیروی آن را به درستی نشان می‌دهد. هر پروتون در مکان پروتون دیگر یک میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورد. واقعیت این که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی با ضریب β/cبه یکدیگر مربوط اند، با تبدیل‌های لورنتس سازگار است.

نکته‌ی۱: میدان الکتریکی عرضی یک بار الکتریکی متحرک در چارچوب سکون بار با ضریب γ کوچک‌تر از همان میدان در چارچوب آزمایشگاه یا در هر چارچوب است. نیروی عرضی که به یک بار وارد می‌شود، در چارچوب سکون بار γ برابر همان نیرو در چارچوب آزمایشگاه یا در هر چارچوب دیگر است.

نکته‌ی۲: شاید بگویید که یکی از پروتون‌ها در میدان $\mathbf{B}$ پروتون دیگر "حرکت نمی‌کند"، چون میدان $\mathbf{B}$ پروتون دیگر به همراه و "در کنار پروتون اولی حرکت می‌کند" و در نتیجه، پروتون نسبت به میدان $\mathbf{B}$پیرامون خود در حال سکون است. این برداشت نادرست است. در قانون نیروی لورنتس $\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ که تعریف بنیادی میدان $\mathbf{B}$ است، $\mathbf{B}$ میدان مغناطیسی در مکان بار q در یک لحظه‌ی زمانی است و هر دوی مکان و زمان در همان چارچوبی اندازه‌گیری می‌شوند که نیروی وارد به q اندازه-گیری

می‌شود. در آن لحظه، چشمه‌ی میدان چگار می‌کند، بی‌ربط است.

پیوست: حل کامل مثال ۲-۹

مثال ۲-۹ : ذره‌ای با بار q در مبداء مختصات در حال سکون است. میدان‌های الکتریکی $\mathbf{E}=E\,\hat{\mathbf{z}}$ و مغناطیسی $\mathbf{B}=B\,\hat{\mathbf{z}}$ همه جای فضا را انباشته اند. ذره از مبداء مختصات رها می‌شود، مسیر آن را بیابید.

حل: به طور کیفی انتظار داریم مسیر ذره چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟ ذره از سکون حرکتش را آغاز می‌کند. بنابراین، در آغاز فقط میدان الکتریکی به ذره نیرو وارد می‌کند و در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ به آن شتاب می‌دهد. وقتی ذره سرعتی غیر صفر به‌دست می‌آورد، میدان مغناطیسی سبب می‌شود که مسیر ذره به سوی $\hat{\mathbf{y}}$ منحرف بشود. با افزایش سرعت ذره، انحراف آن هم بر اثر نیروی مغناطیسی افزایش پیدا می‌کند تا این که جهتش به سوی $-\hat{\mathbf{z}}$ برگردد. در این حالت، میدان الکتریکی با حرکت آن مخالفت کند و از سرعت آن می‌کاهد. در نتیجه، از انحراف ذره هم کاسته می‌شود. سرانجام ذره به حالت سکون درمی‌آید، اثر میدان مغناطیسی از بین می‌رود و دوباره میدان الکتریکی در راستای $\hat{\mathbf{z}}$ به آن شتاب می‌دهد و مسیر دوباره خود را تکرار می‌کند. بنابراین، می‌توان انتظار داشت که مسیر ویژگی دوره‌ای از خود نشان بدهد. هم‌چنین می‌دانیم که مکان ذره در راستای محور x هیچ‌گاه تغییر نخواهد کرد: $x(t)=\dot{x}(t)=\ddot{x}(t)=0$. حالا بگذارید به طور کمی مسئله را حل کنیم.

نقطه‌ی آغاز ما $\mathbf{F}=q\,\mathbf{E}+q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}=m\mathbf{a}$ است. مکان ذره را $\mathbf{r}(t)=(0,y(t),z(t))$ بنامید.بردارهای سرعت و شتاب آن عبارتند از

$$\mathbf{v}(t)=(0,\dot{y}(t),\dot{z}(t)) \qquad (۱)$$

$$\mathbf{a}(t)=(0,\ddot{y}(t),\ddot{z}(t)) \qquad (۲)$$

وابستگی زمانی را به طور صریح نخواهیم نوشت تا معادله‌ها شکل جمع و جورتری داشته باشند. داریم

$$\mathbf{F}=q(0,0,E)+q(0,\dot{y},\dot{z})\times(B,0,0)=m(0,\ddot{y},\ddot{z}) \;\Rightarrow\; qB\dot{z}\,\hat{\mathbf{y}}+(qE-qB\dot{y})\hat{\mathbf{z}}=m\ddot{y}\hat{\mathbf{y}}+m\ddot{z}\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۳)$$

تنها راهی که این رابطه برقرار باشد این است که جمله‌های $\hat{\mathbf{y}}$ در دو طرف معادله با هم برابر باشند و جمله‌های $\hat{\mathbf{z}}$ هم به طور جداگانه در دو طرف معادله‌ی بالا برابر باشند. بنابراین، باید داشته باشیم

$$qB\dot{z}=m\ddot{y} \qquad (٤)$$

$$qE-qB\dot{y}=m\ddot{z} \qquad (٥)$$

برای حل این جفت معادله‌های دیفرانسیل، از معادله‌ی (٥) نسبت به زمان مشتق بگیرید و نتیجه را در معادله‌ی (٤) برای $\ddot{y}$ جایگزین کنید. به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dt}(٥):\; -qB\ddot{y}=m\dddot{z} \;\Rightarrow\; \ddot{y}=-\frac{m\dddot{z}}{qB} \quad\Rightarrow\quad (٤)\;\Rightarrow\; qB\dot{z}=m\left(-\frac{m\dddot{z}}{qB}\right) \qquad (٦)$$

پاسخ آزمونی به صورت $z=Ae^{\beta t}$ برگزینید. اگر بتوانیم β را چنان بیابیم که در معادله‌ی دیفرانسیل (٦) صدق کند، نشان داده‌ایم که $z=Ae^{\beta t}$ پاسخ معادله است. پاسخ آزمون را در معادله‌ی (٦) جایگزین کنید. به‌دست می‌آید

$$\frac{d^3}{dt^3}Ae^{\beta t}+\frac{q^2B^2}{m^2}\frac{d}{dt}Ae^{\beta t}=0 \;\Rightarrow\; Ae^{\beta t}\left(\beta^3+\beta\frac{q^2B^2}{m^2}\right)=0 \;\Rightarrow\; \beta=0,\;\beta=\pm i\,\frac{qB}{m} \qquad (٧)$$

سه پاسخ برای β به‌دست آمد. بنابراین، عمومی‌ترین پاسخ معادله‌ی (٧) عبارت است از

$$z(t)=Be^{iqBt/m}+Ce^{-iqBt/m}+De^{0\cdot t} \qquad (٨)$$

از قاعده‌ی اولر $e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$ استفاده کنید و $Be^{iqBt/m}+Ce^{-iqBt/m}$ را به شکل زیباتری بنویسید:

$$Be^{iqBt/m}+Ce^{-iqBt/m}=B\cos(qBt/m)+iB\sin(qBt/m)+C\cos(-qBt/m)+i\sin(-qBt/m) \qquad (۹)$$

چون $\cos(-x)=\cos(x)$ و $\sin(-x)=-\sin(x)$ اند، معادله‌ی (۹) را می‌توانیم به صورت زیر دربیاوریم

$$(B+C)\cos(qBt/m)+i(B-C)\sin(qBt/m) \qquad (۱۰)$$

اگر $B+C\equiv C_1$ و $i(B-C)\equiv C_2$ بنامیم، آنگاه معادله‌ی (۸) به صوریت زیر درمی‌آید

$$z(t)=C_1\cos(qBt/m)+C_2\sin(qBt/m)+D \qquad (۱۱)$$

حالا بگذارید $y(t)$ را حساب بکنیم. از معادله‌های (۵) و (۱۱) داریم

$$qE-qB\dot{y}=m\ddot{z} \quad\Rightarrow\quad E-B\dot{y}=-\frac{qB^2}{m}\left[C_1\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)+C_2\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\right] \qquad (۱۲)$$

از دو طرف این رابطه نسبت به زمان انتگرال بگیرید:

$$\int\dot{y}dt=\int\left\{\frac{qB}{m}\left[C_1\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)+C_2\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\right]+\frac{E}{B}\right\}dt$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=C_1\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)-C_2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)+\frac{E}{B}t+C_3 \qquad (۱۳)$$

سرانجام، از شرط‌های اولیه‌ی $y(0)=0$، $z(0)=0$، $\dot{y}(0)=0$ و $\dot{z}(0)=0$ استفاده کنید و مقدارهای ثابت C_1,C_2,C_3 و D را به‌دست آورید:

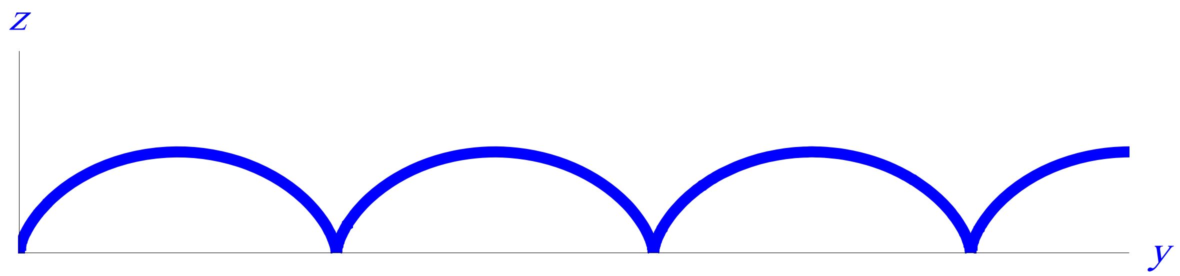
$$y(0)=0 \;\Rightarrow\; C_2=C_3 \qquad ; \qquad z(0)=0 \;\Rightarrow\; C_1=-D$$

$$\dot{y}(0)=0 \;\Rightarrow\; C_1=-\frac{mE}{qB^2} \qquad ; \qquad \dot{z}(0)=0 \;\Rightarrow\; C_2=0 \qquad (۱٤)$$

و در نتیجه،

$$\mathbf{r}(t)=\left(0,\frac{E}{B}t-\frac{mE}{qB^2}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right),\frac{mE}{qB^2}\left[1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right]\right) \qquad (۱۵)$$

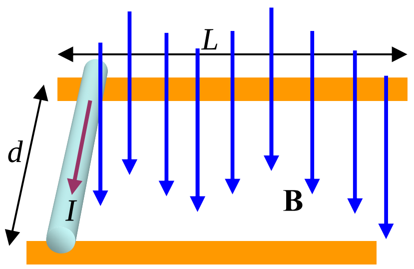
نمودار مسیر در شکل (۹-۵۷) رسم شده است.



شکل ۹-۵۹ مسیر سیکلوئیدی بار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

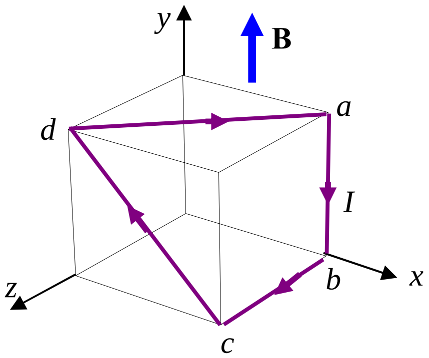
مسئله‌ها

۹-۱ مسیر مارپیچ: ذره‌ای با بار q و جرم سکون m با سرعت $\mathbf{v}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}=B_\circ\hat{\mathbf{z}}$ حرکت می‌کند. فرض کنید در آغاز حرکت، بردار سرعت $\mathbf{v}$ یک مولفه در جهت عمود بر میدان $\mathbf{B}$ و یک مولفه‌ی موازی با میدان $\mathbf{B}$ دارد. نشان دهید که ذره در روی یک مارپیچ حرکت می‌کند. در مدت یک دور چرخش بر روی مارپیچ، ذره چه مسافتی را در امتداد محور مارپیچ می‌پیماید؟



شکل ۹-۶۰ میله‌ی غلتنده

۹-۲ میله‌ی غلتنده: میله‌ای به جرم m و به شعاع R روی دو ریل موازی قرار دارد. میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ بر میله و ریل‌ها عمود است. فاصله‌ی ریل‌ها از یکدیگر d و طولشان L است. از میله جریان I می‌گذرد. جهت جریان در شکل (۹-۶۰) نشان داده شده است، می‌گذرد. میله بدون لغزش بر روی ریل‌ها می‌غلتد. اگر میله از حالت سکون شروع به غلتیدن بکند، سرعت آن را در هنگام ترک ریل‌ها به‌دست آورید.



شکل ۹-۶۱ سیم دور مکعب

۹-۳ سیم دور مکعب: مکعبی به ضلع a را در نظر بگیرید. چهار سیم راست ab، bc، cd و da یک حلقه‌ی بسته می‌سازند. جریان I در جهتی که در شکل (۹-۶۱) دیده می‌شود در حلقه شارش می‌کند. جهت $+\hat{\mathbf{y}}$ یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ در وجود دارد. اندازه و جهت نیروی مغناطیسی که به هر یک از سیم‌های ab، bc، cd و da وارد می‌شود چیست؟

MORE PROBLEMS TO BE ADDED

۱۰ چشمه‌ی میدان مغناطیسی

پیش‌گفتار جابه‌جایی بارهای الکتریکی جریان الکتریکی به‌وجود می‌آورد. جریان‌های الکتریکی میدان‌های مغناطیسی تولید می‌کنند. میدان های مغناطیسی برآمده از جریان‌های **پایا** به زمان وابسته نیستند و نظریه‌ای که آن‌ها را توصیف می کند مغنطوستاتیک* نام دارد. در این فصل به شیوه‌ی محاسبه‌ی میدان‌های مغناطیسی حاصل از جریان‌های **پایا** خواهیم پرداخت. منظور از جریان پایا، جریانی است که همیشه و همواره برقرار است، اندازه‌ی آن کم یا زیاد نمی شود و مسیرش تغییر نمی‌کند. به بیان دیگر، مقدار باری که در واحد زمان از یک نقطه‌ی فضا می‌گذرد، هم اکنون و یک ساعت دیگر و یک سال پیش همگی یکسان است. روشن است که در عمل به راستی جریان پایا وجود ندارد. با وجود این، نظریه‌ای که پرورانده می‌شود، به خوبی از عهده ی توصیف جریان‌هایی برمی‌آید که در هر ثانیه ٦۰ بار تغییر می‌کند. بنابراین، تا هنگامی که افت و خیزهای جریان کُند باشند، این نظریه در واقع تقریب خوبی از واقعیت است.

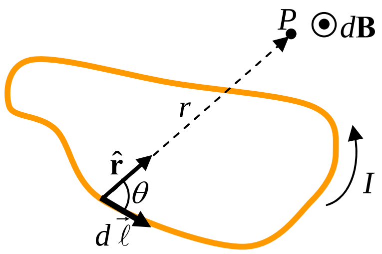
توجه کنید که حرکت یک بار نقطه‌ای نمی‌تواند جریان پایا به‌وجود بیاورد، چون در یک لحظه از نقطه‌ای می گذرد و در آن نقطه جریانی به وجود می آورد، اما در لحظه‌ای بعدی، دیگر در آن نقطه جریان وجود ندارد.

هنگامی که در سیم رسانا جریان پایا برقرار می‌شود، مقدار جریان، I، باید در تمام طول سیم یکسان باشد، اگر چنین نباشد، بارهای الکتریکی باید در جایی انباشته شوند؛ در چنین حالتی نمی‌توان برای مدت نامحدودی جریان را در سیم برقرار نگه داشت. پس در مغنطوستاتیک چگالی بار الکتریکی مستقل از زمان و $\partial\rho/\partial t = ۰$ است ومعادله ی پیوستگی، رابطه‌ی (۸٦-۹)، به‌صورت زیر در می آید

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{J} = ۰ \qquad (۱۰-۱)$$

۱۰-۱ میدان معناطیسی جریان پایا: قانون بیو- ساوار◊

سیم رسانای شکل (۱۰-۱) را در نظر بگیرید. از این سیم جریان پایای I می‌گذرد. هر جزء $d\vec{\ell}$ سیم یک چشمه‌ی جریان کوچک است و در نقطه‌ی P میدان جزیی $d\mathbf{B}$ ایجاد می‌کند. با جمع این میدان‌های جزیی، می‌توان میدانی را که جریان I در نقطه‌ی P به‌وجود می‌آورد حساب کرد. هر جزء سیم را می‌توان یک کمیت برداری پنداشت که مقدارش با طول جزء سیم برابر و جهتش همسو با جهت جریان در آن نقطه است. بنابراین، چشمه‌ی جریان جزیی $d\mathbf{I}$ را می‌توان به‌صورت $d\mathbf{I} \equiv I\, d\vec{\ell}$ تعریف کرد.



شکل ۱-۱۰ جزء جریان و جزء میدان

قانون بیو- ساوار رابطه‌ی بین چشمه‌ی جریان و جزء میدان را به‌دست می‌دهد. ما بدون این که بکوشیم این قانون را ثابت کنیم، آن را به‌صورت یک اصل (مانند قانون کولمب) می‌پذیریم. قانون بیو- ساوار به صورت زیر بیان می شود

$$d\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\frac{d\mathbf{I}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^۲}dl \qquad (۱۰-۱)$$

---
* Magnetostatics
◊ Biot-Savart law

در این رابطه، r فاصله‌ی چشمه‌ی جریان تا نقطه‌ی میدان است و $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه در راستای r است. $\mu_\circ$ **تراوایی*** فضای تهی است و مقدارش در سامانه‌ی یکاهای SI برابر

$$\mu_\circ = ٤\pi \times ١٠^{-٧}\ \mathrm{T\times m/A} = ٤\pi \times ١٠^{-٧}\ \mathrm{N/A^٢} \qquad (١٠-٢)$$

است. یکای $\mu_\circ$ به گونه‌ای است که، بنابه قانون نیروی مغناطیسی، میدان مغناطیسی با یکای نیوتون برمتر- آمپر یا تسلا (T) بیان شود. روشن است که $١\mathrm{T} = ١\mathrm{N/(A\times m)}$ است. مقدار $\mu_\circ$ یک عدد دقیق است و ثابت تجربی نیست. این عدد برای تعریف آمپر استفاده می‌شود و آمپر هم برای تعریف کولمب به کار می رود. یکای میدان مغناطیسی در سامانه‌ی یکاهای cgs گاوس نام دارد. $١\mathrm{T} = ١٠^٤\ \mathrm{gauss}$ است. میدان مغناطیسی زمین در حدود نیم گاوس است. میدان‌های مغناطیسی قوی آزمایشگاهی حدود 1٠٠٠٠ گاوس اند.

به همانندی چشمگیر بین قانون بنیادی بیو- ساوار، رابطه‌ی (١-١٠) و قانون کولمب برای بار جزیی dq توجه کنید:

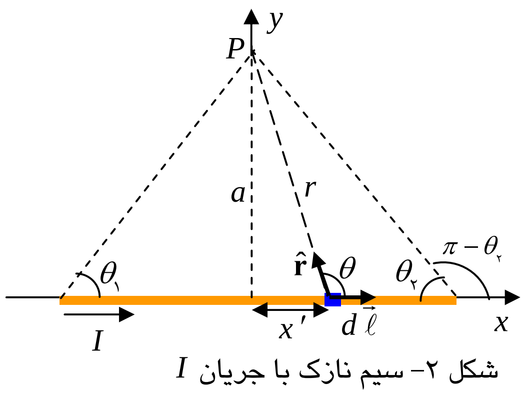
$$d\mathbf{E} = \frac{١}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{dq}{r^٢}\hat{\mathbf{r}} \qquad (١٠-٣)$$

برای این که میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P حساب کنیم، باید این جزء میدان‌ها را باهم جمع کنیم. این کار لازم می‌دارد که بر روی چشمه‌ی جریان انتگرال بگیریم. خواهیم داشت

$$\mathbf{B}(P) = \int d\mathbf{B} = \int \frac{\mathbf{I}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^٢}dl = \frac{\mu_\circ}{٤\pi} I \int \frac{d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^٢} \qquad (١٠-٤)$$

رابطه‌ی (٤-١٠) یک انتگرال برداری است و بنابراین، در اساس، سه انتگرال برای سه مولفه‌ی بردار $\mathbf{B}$ است. سرشت برداری آن در ضرب خارجی $Id\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}$ نهفته است. کلید استفاده از قانون بیو- ساوار آموختن محاسبه‌ی این ضرب خارجی و سپس انتگرال‌گیری از آن است. در مثال‌های زیر کاربرد این قانون و روش محاسبه‌ی رابطه‌ی (٤-١٠) برای برخی حالت‌ها نشان داده شده است.

مثال ١- ١٠ میدان مغناطیسی سیم راست محدود: سیم راست و نازکی برابر شکل (٢-١٠) در راستای محور x قرار دارد و جریان پایای I از آن می گذرد. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی a از سیم به‌دست آورید. (اثرهای رابط ها در دوانتهای سیم را نادیده بگیرید)



شکل ٢- سیم نازک با جریان I

حل: نخست جزء طول $d\vec{\ell} = +dx'\mathbf{i}$ در نظر بگیرید که جریان I از آن می‌گذرد. مختصات مکان این جزء جریان $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{i}}$ است. حال نقطه‌ی میدان را در نظر بگیرید. آن را با زیرنویس "P" نشان خواهیم داد. مختصات نقطه‌ی میدان در $(x\,,y) = (\circ, a)$ است. بردار مکان آن $\mathbf{r}_P = a\hat{\mathbf{j}}$ است. بنابراین، بردار نسبی بین چشمه‌ی جریان و نقطه‌ی میدان $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}'$ است. پس، در این مثال $\mathbf{r} = a\hat{\mathbf{j}} - x'\hat{\mathbf{i}}$ است. اندازه‌ی بردار $\mathbf{r}$ ، فاصله‌ی بین چشمه‌ی جریان و نقطه‌ی P، برابر $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{a^٢ + x'^٢}$ است. با توجه به شکل (٢-١٠) بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ از چشمه تا نقطه‌ی میدان عبارت است از

* permeability

$$\hat{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{a\,\hat{\mathbf{j}}-x'\,\hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{a^{2}+x'^{2}}}=\sin(\pi-\theta)\,\hat{\mathbf{j}}+\cos(\pi-\theta)\,\hat{\mathbf{i}}=\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}-\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱۰-۵)$$

حالا می‌توان ضرب خارجی $d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}$ را حساب کرد. داریم

$$d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}=(+dx'\,\hat{\mathbf{i}})\times(\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}-\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}})=(dx'\sin\theta)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۶)$$

بنابراین، میدان مغناطیسی حاصل از چشمه‌ی جریان جزیی $Id\vec{\ell}$ عبارت است از

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^{2}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx'\sin\theta}{r^{2}}\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۷)$$

که نشان می‌دهد جهت میدان در نقطه‌ی P در راستای $\hat{\mathbf{k}}+$ یا به سوی بیرون از صفحه است. متغیرهای r و θ و x' مستقل ازهم نیستند و بهتر است x' و r را برحسب θ بازنویسی کنیم. با توجه به شکل (۲-۱۰) داریم:

$$r=\frac{a}{\sin(\pi-\theta)}=a\csc\theta \quad , \quad x'=a\cot(\pi-\theta)=-a\cot(\theta)\Rightarrow dx'=a\csc^{2}\theta\,d\theta \qquad (۱۰-۸)$$

که اگر در رابطه ی (۷-۱۰) قرار دهیم به‌دست می‌آید

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(a\csc^{2}\theta\,d\theta)\sin\theta}{(a\csc\theta)^{2}}\,\hat{\mathbf{k}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta\,d\theta\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۹)$$

برای این که میدان مغناطیسی کل را بیابیم، باید از رابطه‌ی (۹-۱۰) انتگرال بگیریم. حدود انتگرال باید همه‌ی سیم حامل جریان را دربر داشته باشد. یعنی، زاویه ی θ از θ_1 تا $\pi-\theta_2$ تغییر می کند. پس:

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_2}\sin\theta\,d\theta\,\hat{\mathbf{k}}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\cos(\pi-\theta_2)-\cos\theta_1\right]\hat{\mathbf{k}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\theta_2+\cos\theta_1\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۱۰)$$

جمله‌ی اول شامل θ_2 سهم قسمتی از سیم است که در راستای $x+$ محور افقی قرار دارد و جمله‌ی دوم (شامل θ_1) سهم آن بخش از سیم است که در امتداد $x-$ قرار دارد. این دو جمله باهم جمع می شوند!

حالت‌های خاص: (۱) اگر نقطه‌ی P روی نیمساز سیم باشد، وضعیت متقارن خواهیم داشت و $\theta_2=\theta_1$ است. اگر طول سیم $2L$ باشد، آنگاه $\cos\theta_1=L/\sqrt{L^{2}+a^{2}}$ است و اندازه‌ی میدان عبارت است از

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{L}{\sqrt{L^{2}+a^{2}}} \qquad (۱۰-۱۱)$$

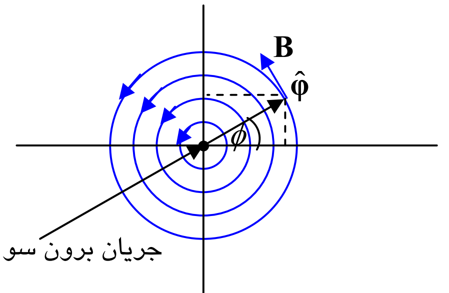
(۲) **سیم بینهایت دراز**: $L\to\infty$

در این حالت $(\theta_1,\theta_2)\to(0,0)$ میل می‌کنند و از رابطه‌ی (۱۰-۱۰) خواهیم داشت:

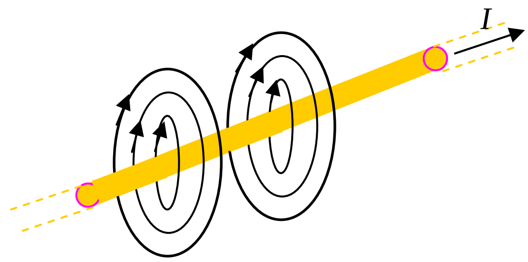
$$\mathbf{B}_{\infty}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۱۲)$$

جهت میدان در نقطه‌ی P بیرون از صفحه است. اگر نقطه‌ی P را در زیر سیم برمی گزیدیم، جهت میدان $\mathbf{B}$ در آن نقطه به سوی **درون** صفحه می شد. در حد $L\to\infty$، سامانه تقارن استوانه‌ای دارد و خط‌های میدان مغناطیسی همانند شکل (۳-۱۰) دایره‌ای اند. در حالت کلی و برای سیم دراز، جهت میدان بنا به قاعده‌ی انگشت‌های دست راست، حول سیم می‌چرخد. این رفتار در شکل (۴-۱۰) نشان داده شده است. اگر انگشت شست راست در جهت جریان باشد، چرخش چهار انگشت دیگر دست راست جهت میدان مغناطیسی را نشان می دهد.

در چارچوب مختصات استوانه‌ای (r,ϕ,z) رابطه‌ی بین بردارهای یکه به‌صورت $\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}}=\hat{\mathbf{z}}$ است و اگر جهت جریان در



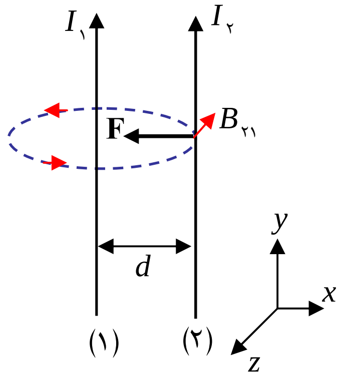
شکل ۴– ۱۰ جهت میدان مغناطیسی سیم بینهایت دراز



شکل ۳– ۱۰خط های میدان مغناطیسی سیم بینهایت

راستای $+z$ باشد، بنا به قانون بیو– ساوار، میدان در جهت $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ خواهد بود.
اینک می توان نیروی ربایش بین دو سیم دراز و موازی را که به فاصله‌ی d از هم قرار دارند، حساب کرد.

مثال ۲– ۱۰ نیروی ربایش بین دو سیم دراز: از سیم‌های موازی و دراز (۱) و (۲) در شکل (۵–۱۰) به ترتیب جریان‌های هم‌سوی I_1 و I_2 می گذرد. فاصله‌ی سیم ها از هم d است. نیروی ربایش در واحد طول را بین دو سیم حساب کنید.



شکل ۵– ۱۰ دو سیم موازی

حل: میدان سیم (۱) در جایگاه سیم (۲) از رابطه‌ی (۱۲–۱۰) به‌دست می‌آید و برابر $\mathbf{B}_{21} = \mu_\circ I_1(-\hat{\mathbf{k}})/2\pi a$ است. بنا به قاعده‌ی انگشت‌های دست راست، جهت این میدان در مکان سیم (۲) به سوی درون صفحه است. از قانون نیروی مغناطیسی، رابطه ی (۳۳–۹) داریم

$$d\mathbf{F}_{21} = I_2 d\vec{\ell}_2 \times \mathbf{B}_{21} = I_2 d\ell_2\,\hat{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}_{21} = (I_2 d\ell_2 \hat{\mathbf{j}}) \times \frac{\mu_\circ I_1}{2\pi a}(-\hat{\mathbf{k}})$$

$$= -\frac{\mu_\circ I_1 I_2 d\ell_2}{2\pi a}\,\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱۰–۱۳)$$

اگر از این رابطه انتگرال بگیریم نیروی کل وارد به سیم (۲) به‌دست می‌آید

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi a}\,\hat{\mathbf{i}}\int d\ell_2 \qquad (۱۰–۱۴)$$

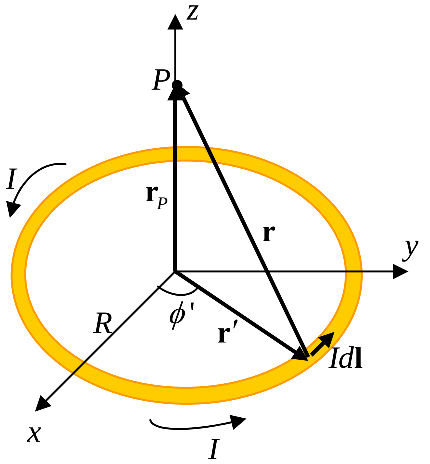
این نیرویی کل است که سیم (۱) به سیم (۲) وارد می‌کند. چون سیم (۲) بینهایت دراز است انتگرال بالا بینهایت می‌شود. اما نیرو در واحد طول عبارت است از

$$\mathbf{f} = -\frac{\mu_\circ}{2\pi}\left(\frac{I_1 I_2}{a}\right)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱۰–۱۵)$$

اگر جریان‌های I_1 و I_2 در خلاف جهت هم بودند، نیرو رانشی می شد که با توصیف کیفی فصل پیش سازگار است.

مثال ۳– ۱۰ میدان مغناطیسی حلقه ی جریان: حلقه ی دایره ای به شعاع R برابر شکل (٦) در صفحه ی xy قرار دارد و جریان پادساعتگرد I از آن می گذرد.

(الف): میدان مغناطیسی را در نقطه ی P به فاصله ی z از مرکز حلقه و در روی محور آن حساب کنید.



شکل (٦) حلقه ی جریان

(ب): اگر یک دوقطبی مغناطیسی $\boldsymbol{\mu} = \mu_z \hat{\mathbf{k}}$ را در نقطه ی P قرار دهید چه نیرویی به آن وارد می شود. آیا این نیرو ربایشی است یا رانشی؟ اگر جهت دوقطبی را وارون کنید، یعنی $\boldsymbol{\mu} = -\mu_z \hat{\mathbf{k}}$، چه پیش می آید؟

حل: این مثال دیگری از کاربرد قانون بیو- ساوار است. در این جا هم از روش حل مثال ١-١٠ پیروی خواهیم کرد. یعنی نخست بردارهای مکان نقطه‌ی چشمه و نقطه‌ی میدان را به‌دست می‌آوریم و با استفاده از آنها بردارنسبی بین این دو نقطه را حساب می‌کنیم. سپس، با استفاده از آن بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ را می‌یابیم تا بتوانیم ضرب خارجی را در قانون بیو- ساوار حساب کنیم. سرانجام با انتگرال گیری روی همه‌ی جزء جریان‌ها، میدان مغناطیسی به‌دست می‌آید.

(الف): ١- **یافتن بردار مکان چشمه**: با توجه به شکل (٦-١٠) جزء جریان $Id\vec{\ell}$ در مختصات کارتزی در $\mathbf{r}' = R(\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi'\hat{\mathbf{j}})$ قرار دارد. می‌توان نوشت

$$Id\vec{\ell} = I\left(\frac{d\mathbf{r}'}{d\phi'}\right)d\phi' = IRd\phi'(-\sin\phi'\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi'\hat{\mathbf{j}}) \qquad (١٠-١٦)$$

٢- **یافتن بردار مکان نقطه‌ی میدان**: چون نقطه‌ی میدان P در روی محور حلقه قرار دارد و فاصله‌اش از مرکز حلقه z است، بردار مکان آن $\mathbf{r}_P = z\hat{\mathbf{k}}$ است.

٣- **بردار نسبی** $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}'$: بردار مکان نسبی عبارت است از

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}' = -R\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} - R\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (١٠-١٧)$$

و مقدار آن، یعنی فاصله‌ی بین چشمه‌ی جریان و نقطه‌ی P، برابر

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(-R\cos\phi')^{2} + (-R\sin\phi')^{2} + z^{2}} = \sqrt{R^{2} + z^{2}} \qquad (١٠-١٨)$$

است. پس، بردار یکه از $Id\vec{\ell}$ به نقطه‌ی P را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{R^{2} + z^{2}}}\left(-R\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} - R\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}\right) \qquad (١٠-١٩)$$

اینک می‌توانیم ضرب خارجی $Id\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}$ را حساب کنیم. از رابطه‌های (١٠-١٦) و (١٠-١٩) داریم

$$Id\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}} = \frac{IR}{\sqrt{R^{2}+z^{2}}}d\phi'(-\sin\phi'\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi'\hat{\mathbf{j}})\times\left[-R\cos\phi'\,\hat{\mathbf{i}} - R\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$= \frac{IR}{\sqrt{R^{2}+z^{2}}}d\phi'\left[z\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} + z\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + R\,\hat{\mathbf{k}}\right] \qquad (١٠-٢٠)$$

بنابراین، قانون بیو- ساوار به صورت زیر درمی‌آید

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{IR}{\sqrt{R^2+z^2}}\frac{z\cos\phi'\,\hat{\mathbf{i}}+z\sin\phi'\,\hat{\mathbf{j}}+R\,\hat{\mathbf{k}}}{r^2}d\phi'$$

$$=\frac{\mu_\circ IR}{4\pi}\frac{z\cos\phi'\,\hat{\mathbf{i}}+z\sin\phi'\,\hat{\mathbf{j}}+R\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}d\phi' \qquad (۱۰-۲۱)$$

و سرانجام انتگرال‌گیری از $d\mathbf{B}$ به‌دست می‌دهد

$$\mathbf{B}=\int d\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ IR}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\frac{z\cos\phi'\,\hat{\mathbf{i}}+z\sin\phi'\,\hat{\mathbf{j}}+R\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}d\phi' \qquad (۱۰-۲۲)$$

همان‌گونه که می‌بینید،انتگرال بالا سه انتگرال است. هر یک از آنها یکی از مولفه‌های میدان را به‌دست می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که مولفه‌های B_x و B_y صفر اند:

$$B_x=\frac{\mu_\circ IRz}{4\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi}\cos\phi'\,d\phi'=\frac{\mu_\circ IRz}{4\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\sin\phi'\Big|_\circ^{2\pi}=\circ$$

$$B_y=\frac{\mu_\circ IRz}{4\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi}\sin\phi'\,d\phi'=-\frac{\mu_\circ IRz}{4\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cos\phi'\Big|_\circ^{2\pi}=\circ \qquad (۱۰-۲۳)$$

و مولفه‌ی B_z عبارت است از

$$B_z=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi}d\phi'=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}2\pi=\frac{\mu_\circ I}{2}\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \qquad (۱۰-۲۴)$$

پس، مولفه‌ی میدان در راستای محور تقارن، B_z، تنها مولفه‌ی غیر صفر میدان است. با استفاده از تقارن هم می‌توانستیم به این نتیجه برسیم. رفتار $B_z/B_\circ$ به‌صورت تابعی از z/R در شکل (۷-۱۰) نشان داده شده است که $B_\circ=\mu_\circ I/2R$ اندازه‌ی میدان در $z=\circ$ است.

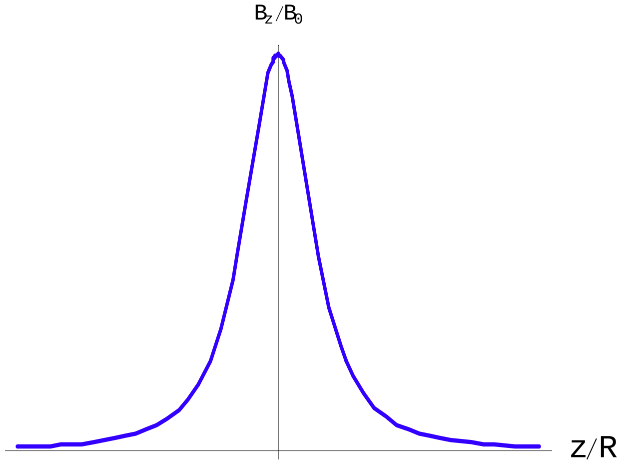
(ب): اگر دوقطبی مغناطیسی $\boldsymbol{\mu}=\mu_z\hat{\mathbf{k}}$ را در نقطه‌ی P قرار دهیم، به خاطر نایکنواخت بودن میدان مغناطیسی به دو قطبی نیرو وارد می شود. بنابه رابطه‌ی (۶۰-۹) این نیرو عبارت است از

$$\mathbf{F}_B=\nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B})=\nabla(\mu_z B_z)=\mu_z\left(\frac{dB_z}{dz}\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۲۵)$$

با مستق گیری از رابطه ی (۲۴-۱۰) نسبت به z و جاگذاری در رابطه‌ی (۲۵-۱۰) به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{F}_B=-\frac{3\mu_z\mu_\circ IR^2z}{2\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۲۶)$$

پس، دو قطبی به سوی حلقه‌ی جریان کشیده می شود. نیرو ربایشی است. اگر جهت دو قطبی وارون بشود، $\boldsymbol{\mu}=-\mu_z\hat{\mathbf{k}}$ آنگاه نیروی وارد به آن رانشی خواهد شد.



شکل ۷-۱۰ نسبت $B_z/B_\circ$ برحسب z/R

مثال ۴- ۱۰ میدان مغناطیسی بار متحرک: جزء جریان بسیار کوچکی را در نظر بگیرید که به شکل استوانه‌ای با سطح قاعده‌ی A و طول $d\ell$ است. فرض کنید در این استوانه n بار الکتریکی در واحد حجم وجود دارد و همه‌ی آنها با سرعت یکسان $\mathbf{v}$ در امتداد محور استوانه حرکت می‌کنند. میدان مغناطیسی را حساب کنید.

حل: جزء جریان مقدار باری است که در واحد زمان از سطح قاعده‌ی استوانه می‌گذرد و برابر

$$I = \frac{nqA\,d\ell}{dt} = nqA\,|\mathbf{v}| \qquad (۱۰-۲۷)$$

است. تعداد کل بارهای درون استوانه $dN = nA\,d\ell$ است. با استفاده از قانون بیو- ساوار، رابطه‌ی (۱-۱۰)، می توان جزء میدان حاصل از dN بار را به صورت زیر نوشت (به نکته ی بعد از رابطه ی (۲۹-۱۰) توجه کنید.)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{(nqA\,|\mathbf{v}|)d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{(nA\,d\ell)q\,\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{(dN)q\,\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (۱۰-۲۸)$$

r فاصله‌ی بین بار و نقطه‌ی P میدان است، جایی که میدان در آن نقطه محاسبه می‌شود. جهت بردار یکه $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ از چشمه (بار) به سوی نقطه‌ی P است. بردار طول جزیی $d\vec{\ell}$ موازی سرعت $\mathbf{v}$ تعریف شده است. به ازای یک بار، یعنی $dN = 1$ ، رابطه‌ی (۲۸-۱۰) به‌صورت زیر درمی‌آید

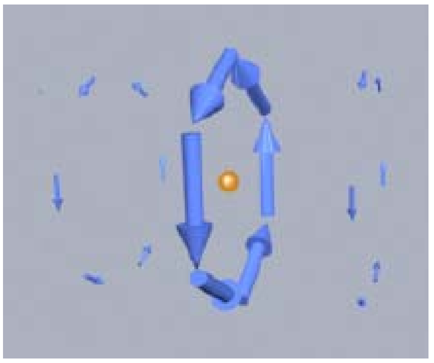
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{q\,\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (۱۰-۲۹)$$

نکته: توجه کنید که قانون بیو- ساوار فقط برای جریان های پایا درست است و حرکت بار نقطه‌ای جریان پایا تولید نمی‌کند. بنابراین، رابطه‌ی (۲۹-۱۰) درست **نیست**. رابطه‌ی (۲۹-۱۰) تنها در حد $v \ll c$ و تحت شرایطی که بتوان از اثر "تاخیری" چشم پوشید، به تقریب درست است. برای توضیح بیشتر و روش درست حل این مسئله، فصل ۹ را ببینند.♣

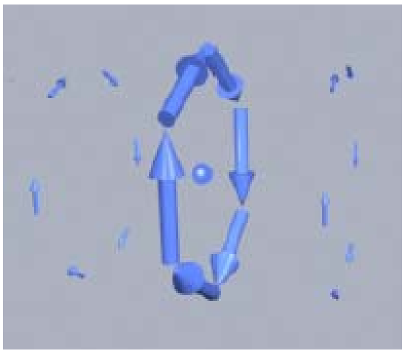
نتیجه‌ی (۲۹-۱۰) را می توان برای N بار نقطه‌ای که هر یک با سرعت متفاوت $\mathbf{v}_i$ حرکت می‌کند تعمیم داد. مکان بار i-ام را با (x_i, y_i, z_i) نشان دهید و فرض کنید سرعت آن $\mathbf{v}_i$ است. با استفاده از اصل برنهش، می‌توان میدان مغناطیسی آنها را در نقطه‌ی P به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_\circ}{4\pi}q_i\,\mathbf{v}_i \times \left[\frac{(x-x_i)\hat{\mathbf{i}}+(y-y_i)\hat{\mathbf{j}}+(z-z_i)\hat{\mathbf{k}}}{\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right]^{3/2}}\right] \qquad (۱۰-۳۰)$$

در شکل های (۸-۱۰) و (۹-۱۰) به ترتیب، میدان مغناطیسی یک بار مثبت و یک بار منفی متحرک نشان داده شده اند



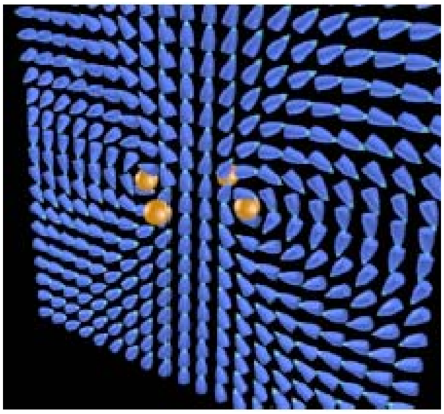
شکل ۸- ۱۰ میدان مغناطیسی بار نقطه ای مثبت



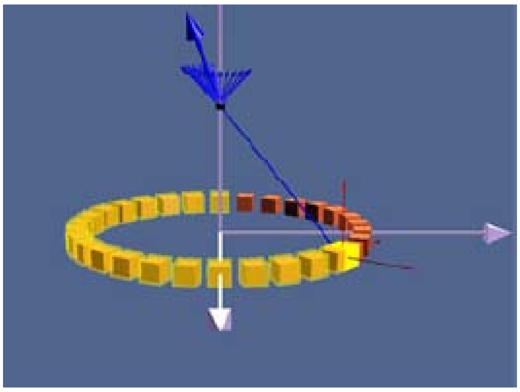
شکل ۹-۱۰ میدان مغناطیسی بار نقطه ای منفی

اگر بخواهیم میدان مغناطیسی چند بار نقطه‌ای را حساب کنیم که با فاصله‌های مساوی روی پیرامون دایره‌ای می‌گردند باید

میدان مغناطیسی هر بار را بنا به رابطه‌ی (۲۸-۱۰) حساب کنیم و سپس آنها را به‌صورت برداری با هم جمع کنیم. درشکل (۱۰-۱۰) میدان مغناطیسی لحظه‌ای چهار بار الکتریکی نشان داده شده است که روی دایره‌ای می‌گردند. شکل (۱۱-۱۰) نمایش لحظه‌ای از جمع برداری میدان‌های ۳۰ ذره را نشان می‌دهد که روی یک دایره حرکت می کنند.



شکل ۱۰-۱۰ میدان مغناطیسی ٤ بار در یک لحظه

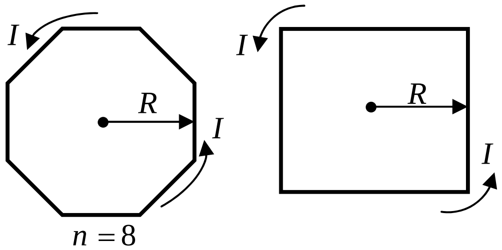


شکل ۱۱- ۱۰ جمع برداری لحظه‌ای میدان‌های ۳۰ بار

مثال ۵- ۱۰ میدان مغناطیسی چند ضلعی منتظم[*] : **(الف)** میدان مغناطیسی را در مرکز حلقه‌ی مربع شکلی که جریان پایای I از آن می‌گذرد، به‌دست آورید. فاصله‌ی مرکز مربع تا یک ضلع را همانند شکل (۱۲-۱۰) R فرض کنید.

(ب): میدان را در مرکز یک n ضلعی منتظم با جریان پایای I حساب کنید. فاصله‌ی مرکز n ضلعی تا یک ضلع را R بنامید

(پ): نشان دهید که در حد $n \to \infty$ پاسخ شما به میدان یک حلقه‌ی دایره‌ای در مرکز آن، $B_\circ = \mu_\circ I/2R$ کاهش می یابد.



شکل ۱۲-۱۰ میدان چند ضلعی منتظم در مرکز آن

حل: **(الف)** از رابطه‌ی (۱۰-۱۰) با $a = R$ و $\theta_2 = \theta_1 = 45^\circ$ استفاده کنید. برای چهار ضلع به‌دست می‌آید

$$B = 4\frac{\mu_\circ I}{4\pi R}\left(\cos 45^\circ + \cos 45^\circ\right) = \frac{\sqrt{2}\mu_\circ I}{\pi R}$$

(ب): این بار $\theta_2 = \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ و $a = R$ اند. در نتیجه، میدان یک ضلع عبارت است از

$$B_1 = \frac{\mu_\circ I}{4\pi R}\left(\cos(\pi/2 - \pi/n) + \cos(\pi/2 - \pi/n)\right) = \frac{2\mu_\circ I}{4\pi R}\sin\left(\pi/n\right) \qquad (۳۱-۱۰)$$

و میدان حاصل از n ضلع برابر nB_1 است. در نتیجه، داریم

$$\Rightarrow B = nB_1 = \frac{n\mu_\circ I}{2\pi R}\sin\left(\pi/n\right) \qquad (۳۲-۱۰)$$

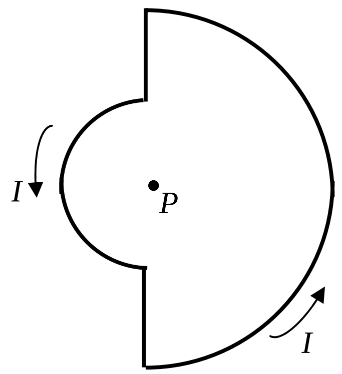
(پ): در حد $n \to \infty$ در رابطه‌ی (۳۲-۱۰) خواهیم داشت $\sin(\pi/n) \approx \pi/n$ و در نتیجه

$$B_\infty = \frac{n\mu_\circ I}{2\pi R}\left(\pi/n\right) = \frac{\mu_\circ I}{2R} \qquad (۳۳-۱۰)$$

[*] برگرفته از *David J. Griffiths, Introduction To Electrodynamics*, 2^{nd} edd., Prentice – Hall, 1989.

که با نتیجه‌ی به دست آمده در بالا برای میدان حلقه‌ی دایره‌ای شکل در مرکز آن سازگار است.

مثال ۶- ۱۰ شکل (۱۳-۱۰) حلقه‌ای را نشان می‌دهد که از دو نیم دایره به شعاع های R و $۲R$ و دو قطعه سیم راست تشکیل شده است. از این حلقه جریان پادساعتگرد و پایای I می گذرد. میدان مغناطیسی را در مرکز حلقه، نقطه‌ی P، حساب کنید.



شکل ۱۳-۱۰ میدان دو نیم حلقه

حل: سیم‌های راست در P میدان ندارند. بنابراین کافی است میدان‌های دو نیم‌دایره را در P حساب کنیم و سپس با استفاده از اصل برنهش با هم جمع کنیم. جهت میدان هر دو نیم‌دایره در P هم‌سو و به سوی بیرون از صفحه اند. با استفاده از قانون بیو- ساوار داریم

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{٤\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^۲} \Rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{٤\pi}\frac{rd\theta}{r^۲} = \hat{\mathbf{k}}\frac{\mu_\circ I}{٤\pi r}d\theta \qquad (۱۰-۳٤)$$

$\hat{\mathbf{k}}$ بردار یکه‌ی عمود بر صفحه و به سوی بیرون از آن است. بسته به این که روی کدام نیم حلقه انتگرال بگیریم، $r = R$ یا $r = ۲R$ است. در هر دو حالت برای نیم حلقه‌ها، θ بین صفر و π تغییر می‌کند. بنابراین، در نقطه‌ی P میدان نیم حلقه‌ی با شعاع $r = R$ عبارت است از

$$\mathbf{B}_R = \int_{\theta=\circ}^{\pi}\hat{\mathbf{k}}\frac{\mu_\circ I}{٤\pi R}d\theta = \frac{\mu_\circ I}{٤\pi R}\pi\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_\circ I}{٤R}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۳۵)$$

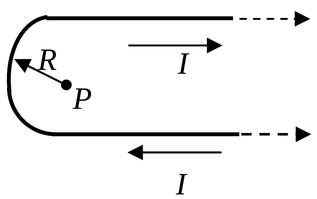
و میدان نیم حلقه‌ی با شعاع $r = ۲R$ برابر است با

$$\mathbf{B}_{۲R} = \int_{\theta=\circ}^{\pi}\hat{\mathbf{k}}\frac{\mu_\circ I}{٤\pi(۲R)}d\theta = \frac{\mu_\circ I}{۸\pi R}\pi\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_\circ I}{۸R}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۳٦)$$

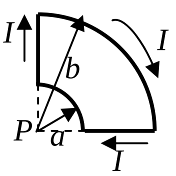
جمع برداری این دو میدان، میدان مغناطیسی کل را در نقطه‌ی P به‌دست می‌دهد

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{٤}\left(\frac{۱}{R}+\frac{۱}{۲R}\right)\hat{\mathbf{k}} = \frac{۳\mu_\circ I}{۸R}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۳۷)$$

مثال ۷-۱۰ در هر یک از آرایش‌های شکل‌های (۱٤-۱۰) و (۱۵-۱۰) میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P حساب کنید



شکل ۱۵-۱۰



شکل ۱٤-۱۰

(الف) در شکل (۱٤-۱۰) دو ربع دایره به شعاع‌های a و b با دو سیم راست افقی و عمودی به هم وصل اند.

(ب): دو سیم نیمه بینهایت که با نیم دایره‌ای به شعاع R برابر شکل (۱۵-۱۰) به هم وصل اند.

حل: **(الف)** قسمت های راست در شکل (۱٤) در نقطه‌ی P میدان ایجاد نمی‌کنند. یعنی خط‌های میدان این قسمت‌ها از P نمی‌گذرد. میدان ربع دایره‌ها در نقطه‌ی P یک چهارم میدان یک دایره‌ی کامل در مرکز آن است. بنابراین میدان ربع دایره‌ی به شعاع a در نقطه‌ی P برابر $\mu_\circ I/۸a$ و جهتش به سوی بیرون از صفحه است. به همین ترتیب، میدان ربع دایره‌ی به شعاع b در نقطه‌ی P برابر $\mu_\circ I/۸b$ است، اما جهتش به درون صفحه است. پس، بنا به اصل برنهش داریم

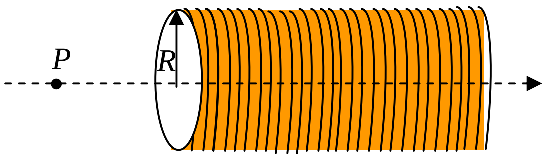
$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ I}{8}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۳۸)$$

$\hat{\mathbf{k}}$ برداری به سوی بیرون صفحه است.

(ب): میدان دو سیم نیم بینهایت همانند میدان یک سیم بینهایت است و بنابراین در نقطه‌ی P سهم این دو سیم در میدان $\mu_\circ I/2\pi R$ و جهتش به درون صفحه است. اندازه‌ی میدان نیم دایره هم در مرکزش $\mu_\circ I/4R$ است. جهت این میدان هم در نقطه‌ی P به درون صفحه است. پس، جهت میدان کل به سوی درون صفحه است و مقدارش با رابطه‌ی زیر داده می شود

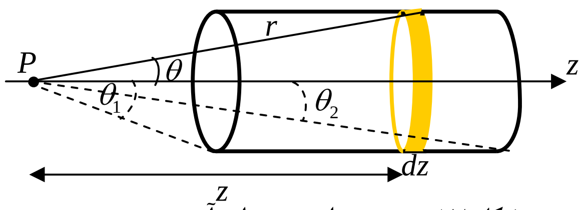
$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ I}{4R}\left(1+\frac{2}{\pi}\right)(-\hat{\mathbf{k}}) \qquad (۱۰-۳۹)$$

مثال ۸-۱۰ سولونوئید (پیچه) شکل (۱٦-۱۰) از یک استوانه به شعاع R تشکیل شده است که دور آن سیم پیچیده شده است. سیم ها بسیار نزدیک به هم پیچیده شده اند و می توان آنها را دایره فرض کرد. در هر واحد طول پیچه N دور سیم وجود دارد. از سیم جریان پایای I می‌گذرد. میدان مغناطیسی را روی محور استوانه به‌دست آورید. (*راهنمایی*: از نتیجه‌ی مثال ۳ استفاده کنید.)



شکل ١٦-١٠پیچه ی محدود

حل: چون سیم‌ها کیپ هم پیچیده شده است، این آرایه را می‌توان همانند یک توزیع جریان سطحی پنداشت. برای حل مسئله، رابطه‌ی (۲٤-۱۰) را برای حلقه‌ی جریانی با پهنای dz به‌کار ببرید. در شکل (۱۷-۱۰) این حلقه به صورت روبان باریکی به پهنای dz نشان داده شده است و شامل جریان $NIdz$ است. روشن است که تنها مولفه‌ی B_z این میدان غیر صفر است. بنابراین از رابطه‌ی (۲٤-۱۰) داریم



شکل ۱۷ جزء جریان و میدان آن

$$dB=\frac{\mu_\circ NIdz}{2}\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

برای یافتن میدان کل در نقطه‌ی P باید از این رابطه انتگرال بگیریم. اما $z=R\cot\theta$ و در نتیجه،

$$z=R\cos\theta \;\Rightarrow\; dz=-\frac{R}{\sin^2\theta}d\theta \quad , \quad \frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{r^3}=\frac{\sin^3\theta}{R^3} \qquad (۱۰-٤۰)$$

$$\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ NI}{2}\int\frac{R^2(-Rd\theta)\sin^3\theta}{R^3\sin^2\theta}=\frac{\mu_\circ NI}{2}\int-\sin\theta\, d\theta=\frac{\mu_\circ NI}{2}(\cos\theta)\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\Rightarrow\Rightarrow \qquad B=\frac{\mu_\circ NI}{2}\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right) \qquad (۱۰-٤۱)$$

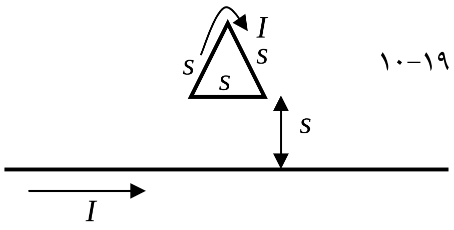
برای پیچه‌ی با طول بینهایت $\theta_1=180^\circ$ و $\theta_2=0$ اند و میدان پیچه‌ی بینهایت دراز عبارت است از

$$B_\infty=\frac{\mu_\circ NI}{2}\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right)=\frac{\mu_\circ NI}{2}\left[1-(-1)\right]=\mu_\circ NI \qquad (۱۰-٤۲)$$

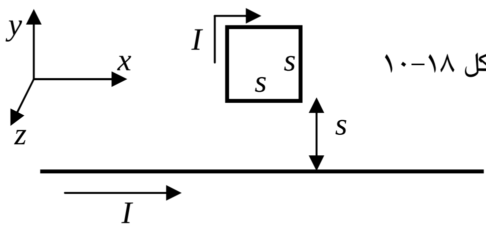
این نتیجه را دوباره با استفاده از قانون آمپر به‌دست خواهیم آورد.

مثال ۹-۱۰ نیرویی که سیم به حلقه وارد می‌کند (الف) : حلقه‌ی مربع شکل به ضلع s در فاصله‌ی s از سیم بینهایت درازی قرار دارد. سیم و حلقه برابر شکل (۱۸-۱۰) در یک صفحه قرار دارند. از حلقه جریان ساعتگرد I می‌گذرد . جریان گذرنده از سیم هم I است. نیروی وارد به حلقه را حساب کنید.

(ب) : اگر حلقه مثلث متساوی الاضلاع به ضلع s باشد و برابر شکل (۱۹-۱۰) فاصله‌ی قاعده اش از سیم s باشد، چه نیرویی به حلقه وارد می شود؟



شکل ۱۹-۱۰



شکل ۱۸-۱۰

حل (الف): جهت میدان مغناطیسی سیم دراز در بالای آن به سوی بیرون از صفحه است و مقدارش بنا به رابطه‌ی (۱۲-۱۰) $\mu_0 I/2\pi z$ است. نیروی وارد به دو ضلع عمودی مربع یکدیگر را حذف می‌کنند. میدان مغناطیسی در مکان ضلع پایینی مربع $\mathbf{B}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\mathbf{k}}$ است . بنابراین نیروی وارد به ضلع پایین برابر است با

$$\mathbf{F}_{\text{Bottom}}=\int I\,d\vec{\ell}\times\mathbf{B}=\int_0^s I\,d\ell(-\hat{\mathbf{i}})\times\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\mathbf{k}}=\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right)Is\,\hat{\mathbf{j}}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۱۰-۴۳)$$

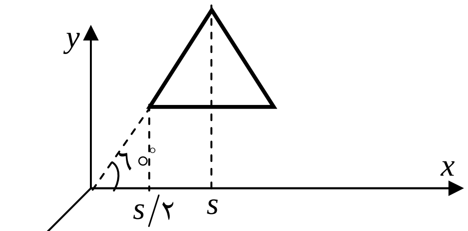
این نیرو رو به بالاست. میدان مغناطیسی سیم در مکان ضلع بالایی مربع در فاصله‌ی $2s$ از سیم $\mathbf{B}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi s}\hat{\mathbf{k}}$ است. بنابراین ، نیروی وارد به این ضلع برابر است با

$$\mathbf{F}_{\text{Top}}=\int I\,d\vec{\ell}\times\mathbf{B}=\int_0^s I\,d\ell(\hat{\mathbf{i}})\times\frac{\mu_0 I}{4\pi s}\hat{\mathbf{k}}=-\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi s}\right)Is\,\hat{\mathbf{j}}=-\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۱۰-۴۴)$$

این نیرو رو به پایین است. نیروی کل وارد به مربع جمع برداری دو نیروی بالاست:

$$\mathbf{F}_{\text{Total}}=\mathbf{F}_{\text{Bottom}}+\mathbf{F}_{\text{Top}}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\hat{\mathbf{j}}-\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\hat{\mathbf{j}}=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۱۰-۴۵)$$

جهت این نیروی کل رو به بالاست. حلقه‌ی مربع از سیم دور می شود.



شکل ۲۰-۱۰

(ب): وضعیت در شکل (۲۰-۱۰) نشان داده شده است. نیروی وارد به ضلع پایین مثلث همانند قسمت (الف) و برابر $\mathbf{F}_{\text{Bottom}}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\hat{\mathbf{j}}$ است. این نیرو رو به بالاست. میدان مغناطیسی سیم در ارتفاع y و در روی ضلع سمت چپ مثلث $\mathbf{B}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{\mathbf{k}}$ است. نیروی $d\mathbf{F}$ که به جزء طول این ضلع وارد می‌شود برابر است با

$$d\mathbf{F}=Id\mathbf{l}\times\mathbf{B}=I\,(dx\;\hat{\mathbf{i}}+dy\;\hat{\mathbf{j}}+dz\;\hat{\mathbf{k}})\times\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{\mathbf{k}}\right)=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi y}(-dx\;\hat{\mathbf{j}}+dy\;\hat{\mathbf{i}}) \qquad (۱۰-۴۶)$$

اما مولفه‌ی x این نیرو با مولفه‌ی x نیروی وارد به ضلع سمت راست حذف می‌شود. بنابراین، کافی است فقط مولفه‌ی y را

حساب کنیم.

$$F_y = -\frac{\mu_\circ I^{۲}}{۲\pi}\int_{s/۲}^{s}\frac{۱}{y}dx \qquad (۱۰-٤۷)$$

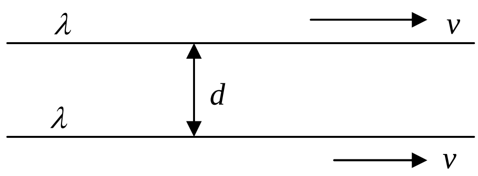
چون $y = \sqrt{۳}x \Rightarrow dx = dy/\sqrt{۳}$ است، پس داریم

$$F_y = -\frac{\mu_\circ I^{۲}}{۲\pi}\int_{s/۲}^{s}\frac{۱}{y}dx = -\frac{\mu_\circ I^{۲}}{۲\pi}\int_{s/۲}^{s}\frac{۱}{y}\frac{dy}{\sqrt{۳}} \Rightarrow F_y = -\frac{\mu_\circ I^{۲}}{۲\pi\sqrt{۳}}\ell n\left(\frac{s}{s/۲}\right) = -\frac{\mu_\circ I^{۲}\ell n ۲}{۲\sqrt{۳}\pi} \qquad (۱۰-٤۸)$$

نیروی وارد به ضلع سمت راست هم درست مانند ضلع سمت چپ است. پس، نیروی برآیند برابر است با

$$\mathbf{F}_{\text{Total}} = \frac{\mu_\circ I^{۲}}{۲\pi}\left(۱ - \frac{۲\ell n ۲}{\sqrt{۳}}\right)\hat{\mathbf{j}} \qquad (۱۰-٤۹)$$

مثال ۱۰-۱۰ فرض کنید بار خطی با چگالی λ روی دو سیم راست بینهایت دراز شکل (۲۱-۱۰) توزیع شده است. سیم ها موازی و به فاصله ی d از هم قرار دارند و با سرعت ثابت v حرکت می‌کنند. برای این که نیروی ربایش مغناطیسی و نیروی رانش الکتریکی یکدیگر را خنثی کنند، سرعت v باید چقدر باشد؟



شکل ۲۱- دو سیم موازی باردار و متحرک

حل: نیروی ربایش مغناطیسی در واحد طول با رابطه‌ی (۱۵) داده شده است و عبات است از

$$f_{\text{mag.}} = \frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{\lambda^{۲}v^{۲}}{d} \qquad (۱۰-۵۰)$$

میدان الکتریکی یک سیم در جایگاه سیم دیگر برابر است با

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}Q_{enc} \Rightarrow E\cdot ۲\pi d\,\ell = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\lambda\ell \Rightarrow E = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ d} \qquad (۱۰-۵۱)$$

نیروی رانشی الکتریکی که به واحد طول سیم دوم وارد می‌شود، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$f_{\text{elc.}} = \frac{۱}{۲\pi\varepsilon_\circ}\frac{\lambda^{۲}}{d} \qquad (۱۰-۵۲)$$

برای این که این دو نیرو یکدیگر را خنثی کنند باید داشته باشیم

$$f_{\text{mag}} = f_{\text{elc.}} \Rightarrow \mu_\circ v^{۲} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow v = \frac{۱}{\sqrt{\mu_\circ\varepsilon_\circ}} \qquad (۱۰-۵۳)$$

چون $\varepsilon_\circ = ۸,۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{coul}^{۲}/\text{N.m}^{۲}$ و $\mu_\circ = ٤\pi\times ۱۰^{-۷}\ \text{N.sec}^{۲}/\text{coul}^{۲}$ اند، بنابراین داریم

$$\varepsilon_\circ\mu_\circ = (٤\pi\times ۸,۸۵)\times ۱۰^{-۱۹}\ \text{sec}^{۲}/\text{m}^{۲} \Rightarrow v = \frac{۱}{\sqrt{\varepsilon_\circ\mu_\circ}} = \frac{۱}{\sqrt{٤\pi\times ۸,۸۵\times ۱۰^{-۱۹}}}\text{m/s} = ۳,۰۰\times ۱۰^{۸}\ \text{m/s} \qquad (۱۰-۵٤)$$

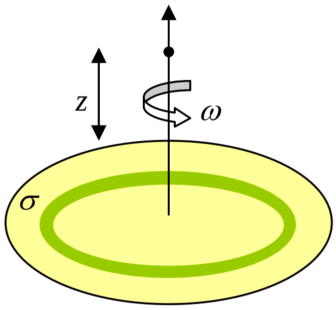
این سرعت **نور** است! بنابراین، هرگز نمی‌توان سیم ها را با سرعتی کافی راند. نیروی رانشی الکتریگی همواره چیره است.

مثال ۱۱-۱۰ قرص باردار چرخان: قرصی به شعاع R با چگالی بار سطحی σ با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش می چرخد.

(الف): چگالی جریان سطحی K را در فاصله‌ی r از مرکز قرص بیابید.

(ب): میدان مغناطیسی قرص را در نقطه‌ی $z > R$ روی محور آن حساب کنید.

حل: (الف) $v = r\omega \Rightarrow K = \sigma v = \sigma r\omega$



شکل ۲۲-۱۰ صفحه‌ی باردار چرخان

(ب): بار موجود در روی حلقه‌ای به شعاع r و پهنای dr در شکل (۲۲-۱۰) برابر $\Delta q = (2\pi r dr)\sigma$ است. زمان یک دور چرخش قرص $\Delta t = 2\pi/\omega$ است. پس

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \sigma\omega r\, dr \qquad (۱۰-۵۵)$$

بنا به رابطه‌ی (۲۴-۱۰)، میدان مغناطیسی این حلقه

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2}\sigma\omega r\, dr \frac{r^2}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۵۶)$$

است. بنابراین، با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۵۶-۱۰) میدان کل قرص به‌دست می‌آید. داریم

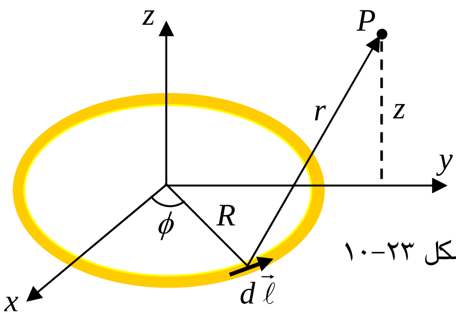
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \frac{r^3 dr}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۵۷)$$

با گزینه‌ی $r^2 = u \Rightarrow rdr = d(r^2/2) = du/2$ خواهیم داشت

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\frac{1}{2}\int_0^{R^2} \frac{u\, du}{\left(u+z^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4}\left[2\left(\frac{u+2z^2}{\sqrt{u+z^2}}\right)\right]_0^{R^2}\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{(R^2+2z^2)}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2z\right]\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۵۸)$$

در مثال‌های بالا ما همواره تقارن مسئله‌ها را در نظر گرفتیم و میدان مغناطیسی را در نقاطی حساب کردیم که به گونه‌ای نقاط خاص بودند. در زیر مثال ۳-۱۰ را دو بار حل می‌کنیم اما این بار به جای این که میدان را درست در بالای مرکز حلقه و در روی محور حساب کنیم، آن را در نقطه‌ی دلخواهی در صفحه‌ی xz به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱۲- ۱۰ میدان مغناطیسی حلقه در نقطه‌ی دلخواه: از حلقه‌ی شکل (۲۳-۱۰) جریان پایای I می‌گذرد. حلقه در صفحه‌ی xy قرار دارد و شعاع آن R است. میدان مغناطیسی حلقه‌ی را در نقطه‌ی P با مختصات $(0, y, z)$ واقع در صفحه‌ی xz حساب کنید. مختصات چشمه $(R\cos\phi, R\sin\phi, 0)$ است. ϕ از صفر تا 2π تغییر می کند



شکل ۲۳-۱۰

حل: میدان مغناطیسی حلقه از قانون بیو- ساوار به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{\ell}\times\mathbf{r}}{r^3} \qquad (۱۰-۵۹)$$

داریم

$$\mathbf{r} = -R\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + (y - R\sin\phi)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۶۰)$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$r^2 = R^2\cos^2\phi + y^2 - 2Ry\sin\phi + R^2\sin^2\phi + z^2 = R^2 + y^2 + z^2 - 2Ry\sin\phi \qquad (۱۰-۶۱)$$

مختصات چشمه‌ی جریان عبارت است از

$$x_\circ = R\cos\phi \;\Rightarrow\; dx_\circ = -R\sin\phi\, d\phi,$$
$$y_\circ = R\sin\phi \;\Rightarrow\; dy_\circ = R\cos\phi\, d\phi \;,\quad z_\circ = \circ \Rightarrow dz_\circ = \circ$$
$$\Rightarrow d\vec{\ell} = -R\sin\phi\, d\phi\,\hat{\mathbf{i}} + R\cos\phi\, d\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \circ\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$d\mathbf{l}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -R\sin\phi\, d\phi & R\cos\phi\, d\phi & \circ \\ -R\cos\phi & (y - R\sin\phi) & z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}(Rz\cos\phi\, d\phi) \qquad (۱۰-۶۲)$$
$$+\hat{\mathbf{j}}(Rz\sin\phi\, d\phi) + \hat{\mathbf{k}}(-Ry\sin\phi\, d\phi + R^{۲}\sin^{۲}\phi\, d\phi + R^{۲}\cos^{۲}\phi\, d\phi)$$

با قرار دادن این رابطه در انتگرال (۵۹–۱۰) دیده می شود که سه جمله برای سه مولفه‌ی میدان، B_x ، B_y و B_z به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$B_x = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi} Rz \int_\circ^{۲\pi} \frac{\cos\phi\, d\phi}{\left(R^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۲Ry\sin\phi\right)^{۳/۲}} \qquad (۱۰-۶۳)$$

$$B_y = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi} Rz \int_\circ^{۲\pi} \frac{\sin\phi\, d\phi}{\left(R^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۲Ry\sin\phi\right)^{۳/۲}} \qquad (۱۰-۶۴)$$

$$B_z = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi} R \int_\circ^{۲\pi} \frac{(R - y\sin\phi)\, d\phi}{\left(R^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۲Ry\sin\phi\right)^{۳/۲}} \qquad (۱۰-۶۵)$$

$$\Rightarrow B_x = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi} Rz\, \frac{۱}{Ry} \frac{۱}{\sqrt{R^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۲Ry\sin\phi}}\Bigg|_\circ^{۲\pi} = \circ \qquad (۱۰-۶۶)$$

برای محاسبه‌ی انتگرال B_x کافی است از تغییر متغیر $u = R^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۲yz\sin\phi$ استفاده کنیم و سپس انتگرال بگیریم. از تقارن مسئله هم می‌توان به صفر بودن B_x پی برد: سهم جزء جریان در ϕ با سهم جزء جریان در $\pi-\phi$ یکدیگر را حذف می کنند. دو انتگرال دیگر برای مولفه‌های B_y و B_z انتگرال‌های بیضوی اند و نمی‌توان آن‌ها را برحسب توابع معمولی نوشت. می توان آنها را به طور عددی حل کرد. توجه کنید که در حد $y = \circ$ نقطه‌ی میدان روی محور z قرار می گیرد و ما دوباره رابطه‌های (۲۴–۱۰) و (۲۴–۱۰) را به‌دست می‌آوریم. اینها همان اند که در مثال ۳–۱۰ یافته بودیم.

۲–۱۰ میدان مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی نقطه‌ای

اگر ابعاد حلقه‌ی مثال ۱۲–۱۰ در مقایسه با فاصله‌ی حلقه تا نقطه‌ی میدان کوچک باشد ($R \ll r = \left(y^{۲}+z^{۲}\right)^{۱/۲}$)، حلقه را می‌توان یک دوقطبی نقطه ای پنداشت که در مرکز حلقه قرار دارد. در این حد، مخرج انتگرال‌های رابطه‌های(۶۳– ۱۰) تا (۱۵–۱۰) را می‌توان به صورت زیر بسط داد

$$\left(R^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۲Ry\sin\phi\right)^{-۳/۲} = \frac{۱}{r^{۳}}\left[۱+\frac{R^{۲}-۲Ry\sin\phi}{r^{۲}}\right]^{-۳/۲} = \frac{۱}{r^{۳}}\left[۱-\frac{۳}{۲}\left(\frac{R^{۲}-۲Ry\sin\phi}{r^{۲}}\right)+\cdots\right] \qquad (۱۰-۶۷)$$

$\cdots$ جایگزین جمله‌های بالاتر بسط است. مولفه‌های B_x و B_y به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$B_y \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{Rz}{r^3}\int_0^{2\pi}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{R^2-2Ry\sin\phi}{r^2}\right)\right]\sin\phi\, d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{3R^2yz}{r^5}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\, d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{3R^2yz}{r^5}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^3}\int_0^{2\pi}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{R^2-2Ry\sin\phi}{r^2}\right)\right](R-y\sin\phi)\, d\phi \qquad (۱۰-۶۸)$$

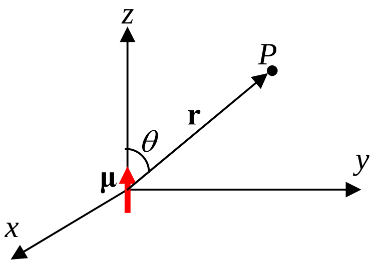
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^3}\left[2\pi\left(R-\frac{3R^2}{2r^2}\right)-\frac{3\pi Ry^2}{r^2}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\pi R^2}{r^3}\left[2-\frac{3y^2}{r^2}+\cdots\right] \qquad (۱۰-۶۹)$$

کمیت $I(\pi R^2)$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی، $\mu = IA$، است که در آن $A=\pi R^2$ مساحت حلقه است. در مختصات کروی، $y=r\sin\theta$ و $z=r\cos\theta$ اند و رابط های (۱۰-۶۸) و (۱۰-۶۹) را می توان برحسب آنها به صورت زیر بازنویسی کرد:

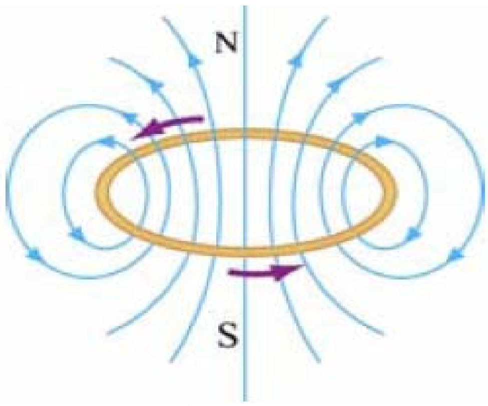
$$B_y = \frac{\mu_0 (I\pi R^2)}{4\pi}\frac{3(r\sin\theta)(r\cos\theta)}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\mu\sin\theta\cos\theta}{r^3} \qquad (۱۰-۷۰)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\pi R^2)}{r^3}\left(2-\frac{3r^2\sin^2\theta}{r^2}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu}{r^3}(2-3\sin^2\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu}{r^3}(3\cos^2\theta-1) \qquad (۱۰-۷۱)$$

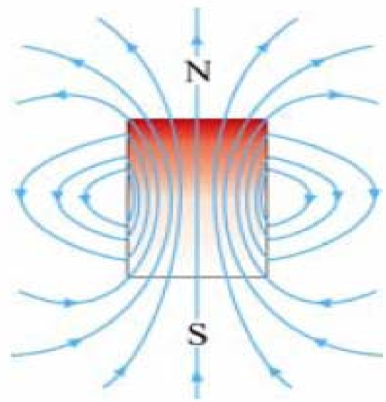
بنابراین، می‌بینیم که میدان مغناطیسی حلقه‌ی به شعاع R را می‌توان به تقریب، همانند میدان مغناطیسی دو قطبی کوچک شکل (۱۰-۲۴) پنداشت که در مرکز مختصات قرار دارد. رابطه‌های (۱۰-۷۰) و (۱۰-۷۱) میدان مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی را به‌دست می دهند. مقایسه‌ی خطهای میدان حلقه و یک دو قطبی مغناطیسی، مثل یک آهن ربای کوچک میله‌ای، آموزنده است در شکل‌های (۱۰-۲۵) آنها نشان داده شده اند. به همانندی هایشان توجه کنید.



شکل ۲۴- گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\boldsymbol{\mu} = \mu\hat{\mathbf{k}}$



شکل ۲۵- ۱۰ب خطهای میدان حلقه‌ی حامل جریان



شکل ۲۵- ۱۰ الف: خطهای میدان آهن ربای میله‌ای

درمختصات کروی، میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P می توان به صورت $\mathbf{B}=B_r\hat{\mathbf{r}}+B_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ نوشت. مولفه‌های B_r و B_θ با رابطه‌های زیر به مولفه‌های B_y و B_z در مختصات کارتزی مربوط اند.

$$B_r = B_y\sin\theta + B_z\cos\theta \quad , \quad B_\theta = B_y\cos\theta - B_z\sin\theta \qquad (۱۰-۷۲)$$

افزون بر این، بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ برحسب بردارهای یکه‌ی مختصات کارتزی عبارتند از

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} \qquad , \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۰-۷۳}$$

می‌توان از این رابطه‌ها استفاده کرد و مولفه‌های میدان، رابطه‌های (۱۰-۶٤) و (۱۰-٦٥) را در مختصات کروی نوشت:

$$B_r = \frac{\mu_0 IR^2\cos\theta}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\left(R^2+r^2-2rR\sin\theta\sin\phi\right)^{3/2}} \tag{۱۰-۷٤}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r\sin\phi - R\cos\theta)\,d\phi}{\left(R^2+r^2-2rR\sin\theta\sin\phi\right)^{3/2}} \tag{۱۰-۷٥}$$

در حد $R \ll r$ خواهیم داشت

$$B_r \approx \frac{\mu_0 IR^2\cos\theta}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi IR^2\cos\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu\cos\theta}{r^3} \tag{۱۰-۷٦}$$

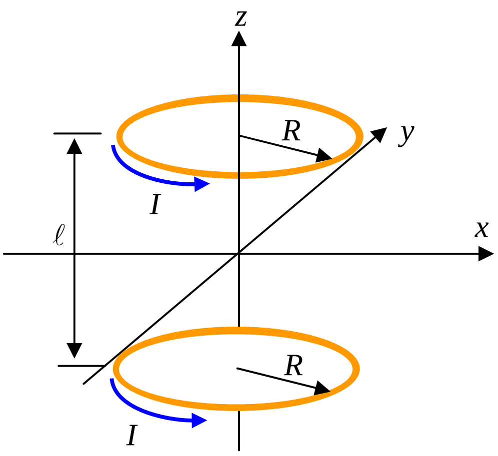
$$B_\theta = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r\sin\phi - r\sin\theta)\,d\phi}{(R^2+r^2-2rR\sin\theta\sin\phi)^{3/2}}$$

$$\approx \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi}\left[-R\sin\theta\left(1-\frac{3R^2}{2r^2}\right)+\left(r-\frac{3R^2}{2r}-\frac{3R^2\sin^2\theta}{2r}\right)\sin\phi + 3R\sin\theta\sin^2\phi\right]d\phi$$

$$\approx \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\left(-2\pi R\sin\theta + 3\pi r\sin\theta\right) = \frac{\mu_0 (I\pi R^2)\sin\theta}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu\sin\theta}{r^3} \tag{۱۰-۷۷}$$

۳-۱۰ پیچه‌ی هلمهولتز

دو پیچه‌ی دایره‌ای به شعاع R را در نظر بگیرید. هر یک از پیچه‌ها از N حلقه تشکیل شده است و همانند شکل (۲٦-۱۰) مرکزشان در فاصله‌های $z = \pm \ell/2$ از مبداء مختصات و در روی محور z قرار دارند. از هر دو پیچه جریان همسوی I می‌گذرد. این آرایه پیچه‌ی هلمهولتز نامیده می‌شود. از پیچه‌ی هلمهولتز برای ایجاد میدان‌های مغناطیسی یکنواخت استفاده می‌شود و به‌زودی آن را خواهیم دید. در اینجا می‌خواهیم میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را در فاصله‌ی z از مرکز یکی از پیچه‌ها و در روی محور z حساب کنیم.



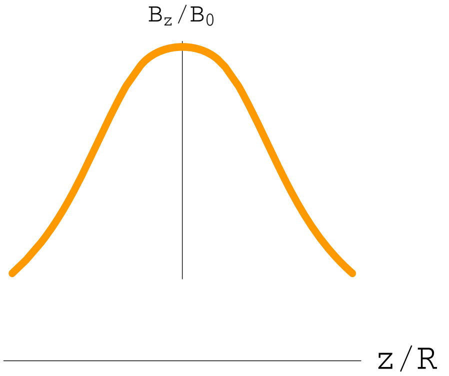
شکل ۲٦-۱۰ پیچه‌ی هلمهولتز

در مثال ۳-۱۰، میدان یک حلقه را در فاصله‌ی z در بالای مرکز آن حساب کردیم. با بهره‌گیری از اصل برنهش می‌توان از آن استفاده کرد و در نقطه‌ی $P(0,0,z)$ (یعنی نقطه ای در فاصله‌ی $z-\ell/2$ از مرکز یک پیچه و $z+\ell/2$ از مرکز پیچه‌ی دوم) میدان را به‌دست آورد. داریم

$$B_z = B_{\text{top}} + B_{\text{bottom}} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left[\frac{1}{\left[(z-\ell/2)^2+R^2\right]^{3/2}}+\frac{1}{\left[(z+\ell/2)^2+R^2\right]^{3/2}}\right] \tag{۱۰-۷۸}$$

B_{top} و B_{Bottom} به ترتیب میدان پیچه‌ی بالایی و پیچه‌ی پایینی است. نمودار B_z/B_0 برحسب z/R در شکل (۲۷-۱۰) نشان

داده شده است. اندازه‌ی میدان برای $B_\circ = \mu_\circ NI/R\,(5/4)^{3/2}$ در نقطه‌ی $z=0$ در $R=\ell$ است. بگذارید ویژگی‌های B_z را با جزییات بیشتری بررسی کنیم. اگر از B_z نسبت به z مشتق بگیریم، خواهیم داشت



شکل ۱۰-۲۷ میدان مغناطیسی برحسب z/R

$$B_z'(z) = \frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_\circ NIR^2}{2}\left\{-\frac{3(z-\ell/2)}{\left[(z-\ell/2)^2+R^2\right]^{5/2}} - \frac{3(z+\ell/2)}{\left[(z+\ell/2)^2+R^2\right]^{5/2}}\right\} \qquad (۱۰-۷۹)$$

از اینجا به سادگی دیده می‌شود که در نیمراه بین دو پیچه، یعنی در $z=0$ ، مشتق بالا صفر می‌شود

$$\left.\frac{dB_z}{dz}\right|_{z=0} = 0 \qquad (۱۰-۸۰)$$

اگر مشتق دوم، B_z'' ، را حساب کنیم خواهیم داشت

$$B_z''(z) = \frac{d^2B_z}{dz^2} = \frac{\mu_\circ NIR^2}{2}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{3}{\left[(z-\ell/2)^2+R^2\right]^{5/2}} + \dfrac{15(z-\ell/2)^2}{\left[(z-\ell/2)^2+R^2\right]^{5/2}} \\ -\dfrac{3}{\left[(z+\ell/2)^2+R^2\right]^{5/2}} + \dfrac{15(z+\ell/2)^2}{\left[(z+\ell/2)^2+R^2\right]^{5/2}}\end{array}\right\} \qquad (۱۰-۸۱)$$

این رابطه به‌ازای $z=0$ ساده تر می‌شود و به صورت زیر درمی‌آید

$$B_z''(0) = \left.\frac{d^2z}{dz^2}\right|_{z=0} = \frac{\mu_\circ NI^2}{2}\left\{-\frac{6}{\left[(\ell/2)^2+R^2\right]^{5/2}} + \frac{15\ell^2}{2\left[(\ell/2)^2+R^2\right]^{7/2}}\right\} = -\frac{\mu_\circ NI^2}{2}\,\frac{6(R^2-\ell^2)}{\left[(\ell/2)^2-R^2\right]^{7/2}} \qquad (۱۰-۸۲)$$

بنابراین، شرط این که مشتق دوم، B_z'' ، در $z=0$ صفر باشد $\ell = R$ است. یعنی فاصله‌ی بین دو پیچه با شعاع پیچه برابر باشد. آرایش با $\ell = R$ پیچه‌ها را **پیچه‌ی هلمهولتز** می نامند.

برای zهای کوچک می‌توان B_z را در همسایگی $z=0$ بسط تیلور داد. خواهیم داشت

$$B_z(z) = B_z(0) + B_z'(0)z + \frac{1}{2!}B_z''(0)z^2 + \cdots \qquad (۱۰-۸۳)$$

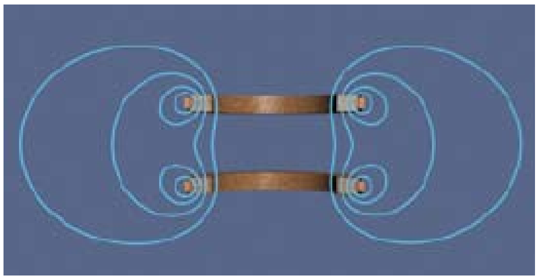
واقعیت این که دو مشتق اول و دوم در $z=0$ صفر اند، به این معنی است که میدان در ناحیه‌ی z های کوچک به مقدار زیادی یکنواخت است. می توان نشان داد که مشتق سوم هم در $z=0$ برابر صفر است.

به یاد بیاورید نیرویی که به یک دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی وارد می‌شود $\mathbf{F}_B = \nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B})$ است. اگر یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور مغناطیسی $\boldsymbol{\mu} = \mu_z\hat{\mathbf{k}}$ رادر $z=0$ قرار دهیم، نیروی وارد به آن عبارت است از

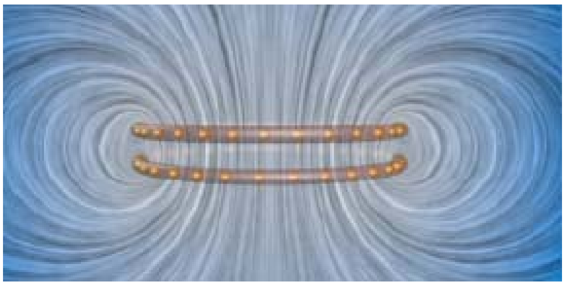
$$F_B = \nabla(\mu_z B_z) = \mu_z\left(\frac{dB_z}{dz}\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۸۴)$$

چون میدان مغناطیسی یکنواخت است، انتظار می‌رود که این نیرو بسیار کوچک باشد..

میدان مغناطیسی پیچه‌های هلمهولتز در شکل (۲۸-۱۰) نشان داده شده است. در این آرایش، جهت جریان‌ها در دو پیچه هم‌سو اند و بنابراین، گشتاور دوقطبی پیچه‌ها در یک راستا قرار دارند. میدان‌های مغناطیسی پیچه‌ها با هم جمع می‌شوند و میدان کل را به‌وجود می‌آورند که در مرکز پیچه‌ها به تقریب یکنواخت است.



شکل ۲۸- میدان پیچه‌های هلمهولتز وقتی که فاصله‌شان با شعاع برابر است: $\ell = R$

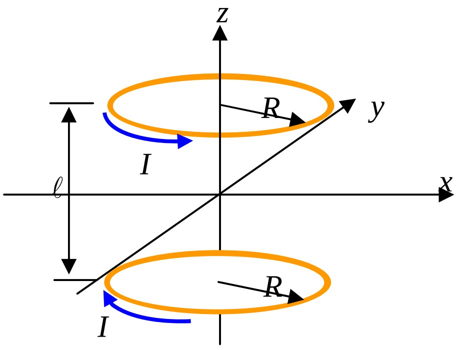


شکل ۲۹- ربایش دو حلقه ی جریان هم محور با با جریان های هم سو.

چون فاصله‌ی بین پیچه‌ها با شعاع پیچه برابر و مقدار ثابتی است، نیروی ربایشی بین آنها تنش ایجاد می کند. این تنش با خط های میدان نشان داده شده است که به سوی بیرون گسترده اند تا هر دو پیچه را در بر گیرند.

در شکل (۲۹-۱۰) وضعیتی نشان داده شده است که فاصله‌ی بین پیچه‌ها ثابت نیست. در این حالت به خاطر نیروی ربایشی بین آنها، پیچه‌ها به سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. در شکل (۲۹-۱۰) جریان گذرنده از پیچه‌ی بالا نصف جریان در پیچه‌ی پایین انتخاب شده است.

اینک وضعیت شکل (۳۰-۱۰) را در نظر بگیرید که جهت جریان در پیچه‌ها خلاف یکدیگر است. باز هم با استفاده از اصل برنهش می‌توان میدان مغناطیسی این آرایه را در نقطه‌ی $P(0,0,z)$ و برای $z>0$ به‌صورت زیر نوشت

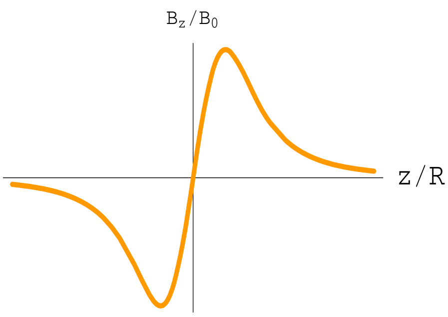


شکل ۳۰- پیچه‌ی هلمهولتز با جریان‌های خلاف

$$B_z = B_{z1} + B_{z2} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left[\frac{1}{\left[(z-\ell/2)^2+R^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(z+\ell/2)^2+R^2\right]^{3/2}}\right] \qquad (۱۰-۸۵)$$

نمودار B_z/B_0 بر حسب z/R با $B_0 \equiv \mu_0 NI/2R$ و $\ell = R$ در شکل (۳۱-۱۰) نشان داده شده است. مشتق این میدان نسبت به z عبارت است از

$$B_z'(z) = \frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left\{ -\frac{3(z-\ell/2)}{\left[(z-\ell/2)^2+R^2\right]^{5/2}} + \frac{3(z+\ell/2)}{\left[(z+\ell/2)^2+R^2\right]^{5/2}} \right\} \qquad (۱۰-۸۶)$$



شکل۳۱- ۱۰ میدان مغناطیسی برحسب z/R

و مقدارش در $z=0$ برابر است با

$$B_z(0)=\left.\frac{dB_z}{dz}\right|_{z=0}=\frac{\mu_0 NIR^2}{2}\frac{3\ell}{\left[(\ell/2)^2+R^2\right]^{5/2}}\neq 0 \qquad (10-87)$$

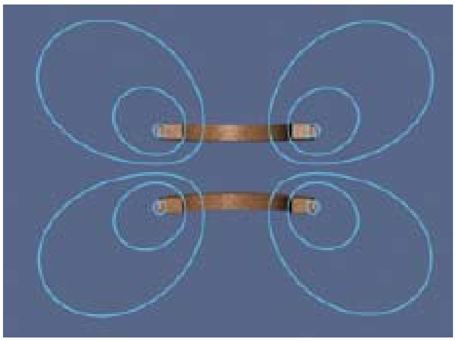
بنابراین ، اگر گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\boldsymbol{\mu}=\mu_z\hat{\mathbf{k}}$ را در $z=0$ قرار دهیم، به آن نیرو وارد خواهد شد. نیرو برابر است با

$$\mathbf{F}_B=\nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B})=\nabla(\mu_z B_z)=\mu_z\left(\frac{dB_z(0)}{dz}\right)\hat{\mathbf{k}}=\frac{\mu_z\mu_0 NIR^2}{2}\frac{3\ell}{\left[\left(\ell/2\right)^2+R^2\right]^{5/2}}\hat{\mathbf{k}} \qquad (10-88)$$

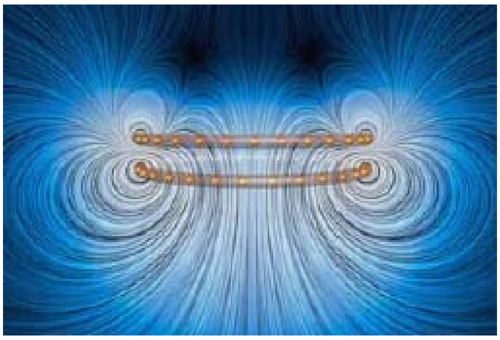
به ازای $\ell=R$ این نیرو شکل ساده‌تری به خود می‌گیرد و به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{F}_B=\frac{3\mu_0\mu_z NI}{2\left(5/4\right)^{5/2}R^2}\hat{\mathbf{k}} \qquad (10-89)$$

شکل (۳۲-۱۰) خط‌های میدان دو پیچه‌ی هلمهولتز را نشان می‌دهد که جریان در پیچه‌ها خلاف یکدیگرند .



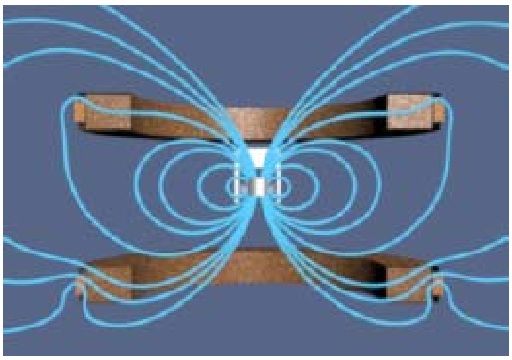
شکل ۳۲- ۱۰خط‌های میدان دو پیچه با جریان‌های ناهمسو



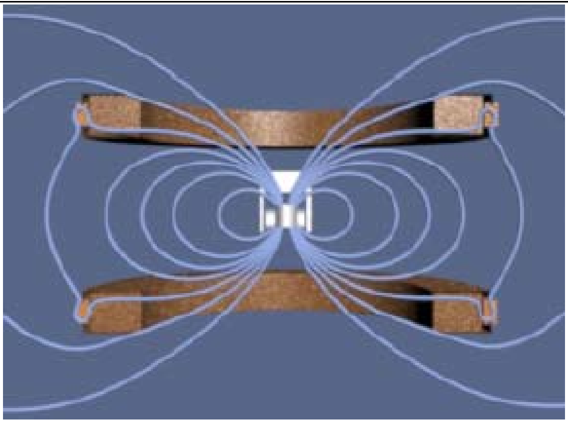
شکل ۳۳-۱۰ دو حلقه‌ی هم محور با جریان‌های خلاف یکدیگر را می‌رانند.

در این آرایش، گشتاور دوقطبی پیچه‌ها پادموازی اند. روی محور تقارن و در مرکز حلقه‌ها میدان صفر است. اگر فاصله‌ی پیچه‌ها را ثابت نگه داریم، نیروی رانشی بین آنها سبب ایجاد فشار در بین پیچه‌ها می شود. در شکل (۳۳-۱۰) میدان دو حلقه‌ی جریان نشان داده شده است که جریان‌ها در خلاف یکدیگر اند و فشردگی خط های میدان در امتداد محور افقی مرکزی بین پیچه‌ها نشان دهنده‌ی این فشار است. در آرایش شکل (۳۳-۱۰) جریان گذرنده از حلقه‌ی پایین دوبرابر جریان در حلقه‌ی بالایی است .

در شکل (۳٤-۱۰) آهن ربای دایمی کوچکی را می‌بینید که از ریسمانی آویزان است و در فضای بین دو پیچه قرار دارد. این آهن‌ربا چنان سامان داده شده است که قطب شمال آن همواره رو به بالا باشد. (در شکل فقط برشی از پیچه‌ها نشان داده شده است). جریان در حلقه‌ها سینوسی است و به اندازه‌ی ۱۸۰ درجه اختلاف فاز دارند. هنگامی که گشتاور دوقطبی مربوط به پیچه‌ی بالا رو به بالاست و جهت گشتاور دوقطبی پیچه‌ی پایین رو به پایین است، آهن ربای دایمی از پیچه‌ی پایین رانده و به‌سوی پیچه‌ی بالا جذب می شود و در نتیجه، رو به بالا حرکت می کند.



شکل ۳٤-۱۰ نوسان یک آهن‌ربای دایمی در فضای بین دو پیچه جریان با اختلاف فاز ۱۸۰ درجه.



شکل ۳۵– ۱۰ آه ربای دایمی در فضای بین دو پیچه جریان‌های هم فاز

در نیمه‌ی دوم چرخه، شرایط وارون می‌شود و آهن‌ربای دایمی به پایین حرکت می‌کند. به این ترتیب، آهن‌ربای دایمی بین دو پیچه نوسان می‌کند.
شکل (۳۵-۱۰) نمایش همان آرایش است، اما این بار جریان در پیچه‌ها هم فاز اند. وقتی که گشتاور دو قطبی پیچه‌ی بالایی رو به بالا باشد، گشتاور دو قطبی پیچه‌ی پایین هم رو به بالا قرار می گیرد. بنابراین، هر دو پیچه می‌خواهند آهن‌ربای دایمی را به سوی خود جذب کنند. در نتیجه ، نیروی وارد به آهن‌ربا صفر می شود (اگرچه به آهن‌ربا نیرو وارد نمی‌شود، اما به آن گشتاور نیرو وارد می‌شود که در شکل نشان داده نشده است، چون جهت ربا در فضا ثابت نگه داشته شده است.) هنگامی که در نیمه‌ی دوم چرخه‌ی جریان، گشتاورهای دوقطبی پیچه‌ها وارون می‌شوند، هر دو پیچه آهن‌ربای دایمی را از خود می‌راند و در نتیجه باز هم نیروی وارد به آهن‌ربا صفر می‌شود.

۴-۱۰ قانون بیو- ساوار و چگالی جریان

قانون بیو- ساوار، رابطه‌ی (۱-۱۰) ، را برای توزیع جریان‌های سطحی $\mathbf{K}$ و حجمی $\mathbf{J}$ هم می‌توان به کار برد. برای توزیع جریان‌ها قانون بیو- ساوار به صورت زیر درمی‌آید.

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{\mathbf{K}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}da \quad , \quad \mathbf{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}d\tau \qquad (۱۰-۹۰)$$

انتکرال‌های بالا بر روی سطح یا حجمی گرفته می‌شوند که شامل چگالی جریان اند.
در مثال‌های فراوان این فصل کوشیدیم روش استفاده از قانون بیو- ساوار را بیاموزیم. این قانون در اساس یک انتگرال‌گیری برداری است. از ایین جهت می‌تواند برای برخی دشوار باشد. در دنباله‌ی این فصل بر آنم که روش به کار گیری و محاسبه‌ی انتگرال قانون بیو- ساوار را با چند مثال دیگر تکرار کنیم. اگر گام‌های زیر را درست بردارید، نباید دشواری زیادی داشته باشید.

رویکردی برای حل مسئله : روش محاسبه‌ی میدان مغناطیسی با استفاده از قانون بیو- ساوار

قانون بیو- ساوار می گوید میدان مغناطیسی برآمده از جزء طول $d\vec{\ell}$ حامل جریان پایای I در نقطه‌ی P به فاصله‌ی $\mathbf{r}$ از جزء طول عبارت است از

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3} \qquad (۱۰-۹۱)$$

برای محاسبه‌ی آن می‌توان گام‌های زیر را برداشت:
(۱) **مکان چشمه**: چارچوب مختصات مناسبی برگزینید و رابطه‌ای برای جزء جریان $Id\vec{\ell}$ و بردار مکان $\mathbf{r}'$ آن بنویسید. اندازه‌ی فاصله‌ی جزء جریان $Id\vec{\ell}$ از مبداء مختصات $r'=|\mathbf{r}'|$ است. متغیرهای پرایم دار را برای چشمه‌ی جریان به کار برده ایم.
(۲) **نقطه ی میدان**: نقطه‌ی میدان ، نقطه‌ای در فضاست که می‌خواهیم در آن جا میدان مغناطیسی حاصل از توزیع جریان را حساب کنیم. از همان چارچوبی که در گام (۱) برگزیدید استفاده کنید و بردار مکان $\mathbf{r}_P$ نقطه‌ی P را نبویسید. کمیت $r_P=|\mathbf{r}_P|$

فاصله‌ی بین مبداء مختصات و نقطه‌ی P است.

(۳) **بردار مکان نسبی**: مکان نسبی چشمه و نقطه‌ی میدان با بردار $\mathbf{r}=\mathbf{r}_P-\mathbf{r}'$ داده می‌شود. بردار یکه‌ای که در راستای $\mathbf{r}$ است به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{\mathbf{r}_P-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}'|} \qquad (۱۰-۹۲)$$

که در آن $r=|\mathbf{r}|=|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}'|$ فاصله‌ی چشمه و نقطه‌ی میدان است.

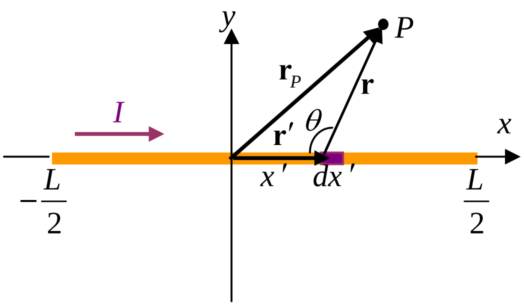
(٤) **محاسبه ی ضرب خارجی**: ضرب خارجی $d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}$ یا $d\vec{\ell}\times\mathbf{r}$ را به‌دست آورید. حاصل ضرب خارجی، برداری است که جهت میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را براساس قانون بیو- ساوار به‌دست می‌دهد.

(٥) **جا گذاری**: نتایج چهار گام بالا را در رابطه‌ی (۹۱-۱۰) برای $d\mathbf{B}$ قرار دهید و تا جایی که شدنی است آن را ساده کنید.

(٦) **انتگرال گیری**: از رابطه‌ی به دست آمده انتگرال بگیرید و $\mathbf{B}$ را حساب کنید. هندسه و ابعاد سامانه در حدود انتگرال نمایان می‌شود. گاهی تغییر متغیر دادن به انتگرال‌گیری کمک می کند.

در چند مثال زیر این گام ها را باهم برمی داریم.

مثال ۱۳-۱۰ سیم محدود: از سیمی به طول L برابر شکل (۳٦-۱۰) جریان I در راستای $+x$ می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی دلخواه P در صفحه‌ی xy به‌دست آورید.



شکل ۳٦- ۱۰سیم محدود با جریان I

حل: این مثال خیلی شبیه مثال ۱-۱۰ است. در این جا نقطه‌ی میدان مکان دلخواهی در صفحه‌ی xy است. این مثال را با رویکردی که در بالا برشمردیم، یک بار دیگر حل می‌کنیم.

(۱) **مکان چشمه**: از شکل (۳٦-۱۰) دیده می‌شود که مکان طول جزیی dx' با بردار $\mathbf{r}'=x'\hat{\mathbf{i}}$ داده می‌شود و چشمه‌ی جریان $Id\mathbf{l}=(Idx')\hat{\mathbf{i}}$ را می‌سازد.

(۲) **نقطه‌ی میدان**: همان‌گونه که از شکل پیداست مکان نقطه‌ی میدان در P است. بردار مکان آن $\mathbf{r}_P=x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}$ است.

(۳) **بردار مکان نسبی**: بردار مکان نسبی از چشمه تا نقطه‌ی P همانا $\mathbf{r}=\mathbf{r}_P-\mathbf{r}'=(x-x')\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}$ است. اندازه‌ی آن برابر $r=|\mathbf{r}|=|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}'|=\left[(x-x')^۲+y^۲\right]^{۱/۲}$ است. بردار یکه در راستای $\mathbf{r}$ با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{\mathbf{r}_P-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}'|}=\frac{(x-x')\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}}{\left[(x-x')^۲+y^۲\right]^{۱/۲}} \qquad (۱۰-۹۳)$$

(۴) **ضرب خارجی و ساده کردن آن**: ضرب خارجی $d\vec{\ell}\times\mathbf{r}$ را می توان به‌صورت زیر ساده کرد

$$(dx'\hat{\mathbf{i}})\times\left[(x-x')\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}\right]=y\,dx'\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۹٤)$$

(۵) **جای‌گذاری**: اگر نتایج بالا را در رابطه‌ی (۹۱-۱۰) قرار دهیم خواهیم داشت

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\mathbf{r}}{r^3}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\frac{y\,dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{3/2}}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۹۵)$$

(۶) **انتگرال‌گیری**:

$$\mathbf{B}=\int d\mathbf{B}=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\frac{y\,dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{3/2}}\hat{\mathbf{k}}=-\frac{\mu_\circ I}{4\pi y}\frac{(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2+y^2}}\Bigg|_{-L/2}^{L/2}\hat{\mathbf{k}}$$

$$=-\frac{\mu_\circ I}{4\pi y}\left[\frac{(x-L/2)}{\sqrt{(x-L/2)^2+y^2}}-\frac{(x+L/2)}{\sqrt{(x+L/2)^2+y^2}}\right]\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۹۶)$$

حالت حدی $L\gg x\,,y$ را بیازمایید: در این حد پاسخ برای سیم حامل جریان بینهایت دراز به‌دست می‌آید.

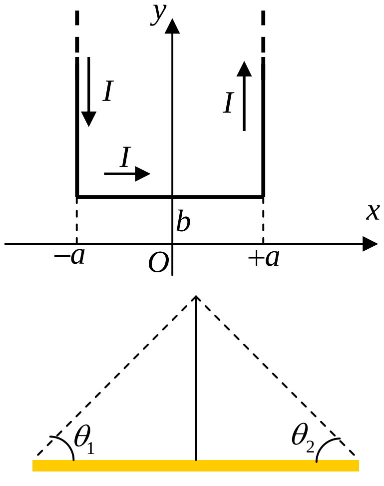
$$\mathbf{B}_\infty=-\frac{\mu_\circ I}{4\pi y}\left[-\frac{L/2}{L/2}-\frac{L/2}{L/2}\right]\hat{\mathbf{k}}=\frac{\mu_\circ I}{2\pi y}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۹۷)$$

اگر از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم و سیم در امتداد محور $+z$ باشد، میدان مغناطیسی با رابطه‌ی

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (۱۰-۹۸)$$

توصیف می شود که در آن $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ بردار یکه‌ی سمتی است و نقطه‌ی میدان P در فاصله‌ی r از سیم است.

مثال ۱۴– ۱۰ حلقه‌ی جریان مستطیل: حلقه‌ی جریان مستطیل شکل (۳۷-۱۰) را در نظر بگیرید و میدان مغناطیسی را در مبداء مختصات، نقطه‌ی O، برحسب I ، a و b حساب کنید (در این مثال ضلع چهارم مستطیل نشان داده نشده است، چون فرض کردیم این ضلع در بینهایت قرار دارد و بنابراین سهمی در میدان نخواهد داشت.)



شکل ۳۷-۱۰ حلقه‌ی جریان مستطیل

حل: میدان سیم محدود در نقطه‌ی P با رابطه‌ی (۱۰-۱۰) داده شده است: $B=\frac{\mu_\circ I}{4\pi r}(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$. زاویه‌های θ_1 و θ_2 در شکل (۳۷-۱۰) تعریف شده اند و طول سیم را پارامتری می‌کنند. برای این که میدان را به‌دست بیاوریم، از رابطه‌ی بالا بهره می‌گیریم.

میدان در نقطه‌ی O از سه بخش تشکیل شده است: سهم سیم سمت چپ، سیم سمت راست و سیم افقی.

(۱) سیم سمت چپ از $(x\,,y)=(-a,\infty)$ تا $(x\,,y)=(-a,b)$ادامه دارد. زاویه هایی که این سیم را پارامتری می‌کنند $\cos\theta_1=1$ و $\cos\theta_2=-b\big/\sqrt{b^2+a^2}$اند. بنابراین، داریم

$$B_1=\frac{\mu_\circ I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=\frac{\mu_\circ I}{4\pi a}\left(1-\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}\right) \qquad (۱۰-۹۹)$$

جهت $\mathbf{B}_1$ در نقطه‌ی O به سوی بیرون از صفحه یا در جهت $+\hat{\mathbf{k}}$ است.

(۲) سهم بخش افقی سیم که از $(x, y) = (-a, b)$ تا $(x, y) = (a, b)$ گسترده است. زاویه‌های (یا کسینوس زاویه‌ها)

$$\cos\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad , \qquad \cos\theta_2 = \cos\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{۱۰-۱۰۰}$$

اند و در نتیجه، میدان آن در نقطه‌ی O عبارت است از

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi b\sqrt{a^2+b^2}} \tag{۱۰-۱۰۱}$$

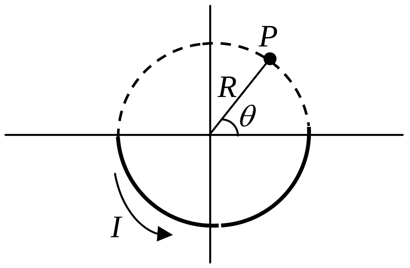
جهت $\mathbf{B}_2$ در نقطه‌ی O به‌سوی درون صفحه یا در جهت $-\hat{\mathbf{k}}$ است.

(۳) بخش سوم سیم از $(x, y) = (a, b)$ تا $(x, y) = (a, \infty)$ ادامه دارد و به سادگی می‌توان نشان داد که اندازه‌ی میدان این سیم سمت راست با اندازه‌ی میدان سیم سمت چپ برابر است: $B_3 = B_1$. جهت $\mathbf{B}_3$ در راستای $+\hat{\mathbf{k}}$ است.بنابراین، میدان کل در نقطه‌ی O از جمع برداری سه میدان به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = 2\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{k}} - \frac{\mu_0 I a}{2\pi b\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\mathbf{k}}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi ab\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sqrt{a^2+b^2} - b^2 - a^2\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۰-۱۰۲}$$

توجه کنید که در حد $a \to 0$ طول قسمت افقی و نیز میدان آن سیم، صفر می‌شود. چون جریان ها در دو بخش نیم بینهایت سیم خلاف یکدیگر است، میدان آنها هم یکدیگر را حذف می‌کنند و بنابراین، در این حد میدان در نقطه‌ی O صفر است.

مثال ۱۵– ۱۰ سیم نیم دایره: از سیم نیم دایره جریان پایای I می‌گذرد (نیم دایره باید به سیم‌های دیگری وصل شود تا مدار کامل شود، ولی برای ما این بخش مدار مهم نیست) میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P در طرف دیگر نیم دایره به‌دست آورید (شکل ۳۸ –۱۰ را ببینید).



شکل ۳۸– ۱۰نیم حلقه ی جریان

حل: در شکل (۳۹–۱۰) مکان چشمه و نقطه‌ی میدان نشان داده شده اند. مختصات چشمه

$$P' = (R\cos\phi, -R\sin\phi) \tag{۱۰-۱۰۳}$$

است. نقطه‌ی میدان یک نقطه‌ی ثابت است و مکانش در

$$P = (R\cos\theta, R\sin\theta) \tag{۱۰-۱۰۴}$$

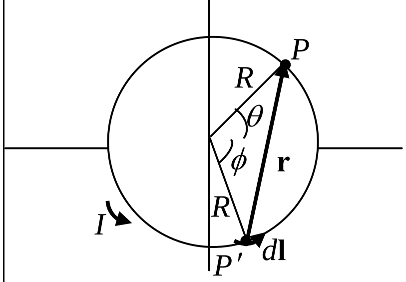
است. جزء طول جریان $d\vec{\ell}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$d\vec{\ell} = (R\sin\phi\, d\phi, R\cos\phi\, d\phi) = R\, d\phi\left(\sin\phi\,\hat{\mathbf{i}}, \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}\right) \tag{۱۰-۱۰۵}$$

بردار مکان نسبی عبارت است از

$$\mathbf{r} = R\left[\left(\cos\theta - \sin\phi\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\sin\theta + \sin\phi\right)\hat{\mathbf{j}}\right] \tag{۱۰-۱۰۶}$$

اینک نوبت ضرب خارجی $\mathbf{r}\times d\mathbf{l}$ است.



شکل ۳۹– ۱۰مکان چشمه و نقطه‌ی‌میدان

$$d\vec{\ell}\times\mathbf{r}=R^{۲}d\phi\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \sin\phi & \cos\phi & ۰\\ (\cos\theta-\cos\phi) & (\sin\theta+\sin\phi) & ۰\end{vmatrix}$$

$$=R^{۲}d\phi\,\hat{\mathbf{k}}\left(\sin\phi\sin\theta+\sin^{۲}\phi-\cos\theta\cos\phi+\cos^{۲}\phi\right) \qquad (۱۰-۱۰۷)$$

$$=R^{۲}d\phi\,\hat{\mathbf{k}}\left(۱+\sin\phi\sin\theta-\cos\theta\cos\phi\right)=R^{۲}d\phi\,\hat{\mathbf{k}}\left(۱-\cos(\theta+\phi)\right) \qquad (۱۰-۱۰۸)$$

از جاگذاری این نتایج در قانون بیو– ساوار خواهیم داشت

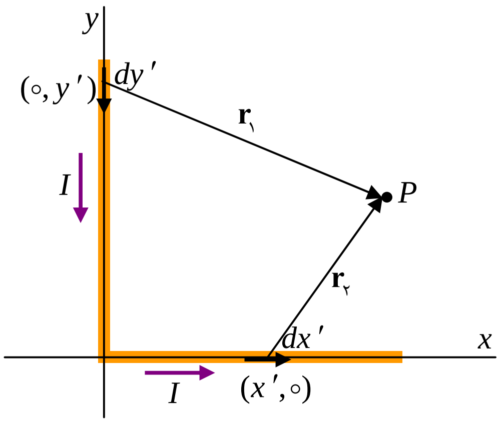
$$B=\frac{\mu_{\circ}I}{۴\pi}\int\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^{۳}}=\frac{\mu_{\circ}I}{۴\pi}R^{۲}\hat{\mathbf{k}}\int_{۰}^{\pi}\frac{\left(۱-\cos(\theta+\phi)\right)d\phi}{\left(۲R^{۲}-۲R^{۲}\cos(\theta+\phi)\right)^{۳/۲}}$$

$$=\frac{\mu_{\circ}IR^{۲}\hat{\mathbf{k}}}{۴\pi\left(۲R^{۲}\right)^{۳/۲}}\int_{۰}^{\pi}\frac{d\phi}{\sqrt{۱-\cos(\theta+\phi)}}=\frac{\mu_{\circ}I\;\hat{\mathbf{k}}}{۸\pi\sqrt{۲}R}\int_{۰}^{\pi}\frac{d\phi}{\sqrt{۲}\sin\left(\frac{\theta+\phi}{۲}\right)}$$

$$=\frac{\mu_{\circ}I}{۱۶\pi R}\left[۲\,\ell n\left(\tan\left(\frac{\theta+\phi}{۲}\right)\right)\right]_{۰}^{\pi}\hat{\mathbf{k}}=\frac{\mu_{\circ}I}{۸\pi R}\ell n\left\{\frac{\tan\left(\frac{\theta+\pi}{۴}\right)}{\tan\left(\theta/۴\right)}\right\}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۱۰۹)$$

مثال ۱۶–۱۰ دو سیم نیم بینهایت: دو سیم نیم بینهایت همانند شکل (۴۰–۱۰) قرار دارند. جریان I در راستای $-\hat{\mathbf{j}}$ به مبداء مختصات می‌رسد و سپس در سیم افقی در راستای $+\mathbf{i}$ جریان می‌یابد. میدان مغناطیسی را در ربع اول، یعنی در نقاط با $x\,,y>۰$، در صفحه‌ی xy حساب کنید.

حل: نقطه‌ی دلخواه $P(x\,,y)$ را در ربع اول در نظر بگیرید. نقطه‌ی P در فاصله‌ی $r_۱$ از نقطه‌ی $(۰,y')$ واقع در روی محور y قرار دارد و فاصله‌اش از نقطه‌ی $(x',۰)$ در روی محور x برابر $r_۲$است. با استفاده از قانون بیو– ساوار میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P می توان به صورت زیر نوشت



شکل ۴۰–۱۰ دو سیم نیم‌بینهایت

$$\mathbf{B}=\int d\mathbf{B}=\frac{\mu_{\circ}I}{۴\pi}\int\frac{d\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^{۲}}=\frac{\mu_{\circ}I}{۴\pi}\int_{y}\frac{d\mathbf{l}_۱\times\hat{\mathbf{r}}_۱}{r_۱^{۲}}+\frac{\mu_{\circ}I}{۴\pi}\int_{x}\frac{d\mathbf{l}_۲\times\hat{\mathbf{r}}_۲}{r_۲^{۲}} \qquad (۱۰-۱۱۰)$$

انتگرال‌ها روی سیم‌های در امتداد محور y و محور x گرفته می‌شوند. بگذارید هر بخش را جداگانه بررسی کنیم.

(۱) جزء طول کوچک $d\vec{\ell}_۱=-dy'\hat{\mathbf{j}}$ را در امتداد محور y در نظر بگیرید. فاصله‌ی این جزء طول تا نقطه‌ی P عبارت است از $\mathbf{r}_۱=x\,\hat{\mathbf{i}}+(y-y')\hat{\mathbf{j}}$. بنابراین، ضرب خارجی $d\vec{\ell}_۱\times\mathbf{r}_۱$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$d\vec{\ell}_۱\times\mathbf{r}_۱=(-dy'\hat{\mathbf{j}})\times\left[x\,\hat{\mathbf{i}}+(y-y')\hat{\mathbf{j}}\right]=xdy'\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۱۱۱)$$

(۲) به‌همین ترتیب، در راستای محور x هم داریم $d\vec{\ell}_۲=dx'\hat{\mathbf{i}}$ و $\mathbf{r}_۲=(x-x')\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}$. بنابراین،

$$d\vec{\ell}_2 \times \mathbf{r}_2 = (dx'\hat{\mathbf{i}})\times\left[(x-x')\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}\right]= y dx'\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۰-۱۱۲)$$

پس، می‌بینیم که میدان مغناطیسی در نقطه‌ی P در جهت $+z$ است. با استفاده از نتایج بالا و با جاگذاری‌های $r_1=\sqrt{x^2+(y-y')^2}$ و $r_2=\sqrt{(x-x')^2+y^2}$ در رابطه‌ی (۱۱۰-۱۰) خواهیم داشت

$$B_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\infty \frac{x\,dy'}{\left[x^2+(y-y')^2\right]^{3/2}}+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\infty \frac{y\,dx'}{\left[y^2+(x-x')^2\right]^{3/2}} \qquad (۱۰-۱۱۳)$$

انتگرال ها با استفاده از دستور

$$\int_0^\infty \frac{b\,ds}{\left[b^2+(a-s)^2\right]^{3/2}}=\frac{1}{b}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (۱۰-۱۱٤)$$

به سادگی قابل محاسبه اند. خواهیم داشت

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{x}+\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}+\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right]\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۱٥)$$

پرسش های مفهومی

۱- قانون بیو- ساوار را در مغناطوستاتیک با قانون کولمب مقایسه کنید و تفاوت های آنها را توضیح دهید.

۲- اگر جریان از یک فنر بگذرد، آیا فنر کشیده می شود یا فشرده می شود؟ توضیح دهید.

۳- از دو حلقه ی دایره ای هم مرکز و هم صفحه با قطرهای متفاوت جریان های پایا و هم جهت می گذرد. این دو حلقه یکدیگر را می ربایند یا یکدیگر را می رانند؟ توضیح دهید.

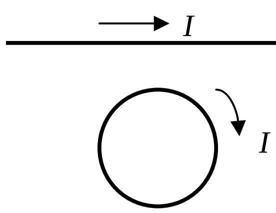
۴- سه سیم بینهایت دراز و موازی چنان سامان داده شده اند که اگر از روبرو به آنها نگاه کنیم در سه گوشه ی یک مثلث متساوی الاضلاع می بینیم. آیا می توان سیم ها را چنان سامان داد (ترکیبی از جریان ها ی به سوی درون صفحه و بیرون از صفحه) که هر سه سیم (الف): همدیگر را بربایند؛ (ب) همدیگر را برانند؟

۵- جریان در یک سیم دراز و در یک حلقه‌ی دایره‌ای برابر شکل روبروست. نیرویی که به سیم دراز وارد می‌شود

(الف): صفر است **(ب)**: به سوی صفحه است

(پ): به سوی بیرون از صفحه است

(ت): روبه بالاست **(ج)**: رو به پایین است



شکل ۴۱-۱۰

۶- سیمی راستی را در نظر بگیرید که از آن جریان I می‌گذرد. جهت جریان به سوی درون صفحه است. بار مثبتی در راستای شعاعی از سیم دور می‌شود. جها نیرویی که به بار وارد می‌شود، کدام است؟

(الف): به‌سوی چپ **(ب)**: به سوی راست

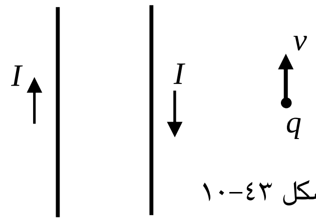
(پ): رو به بالا **(ت)**: رو به پایین

(ج): به سوی درون صفحه **(چ)**: بیرون از صفحه



شکل ۴۲-۱۰

۷- از دو سیم بینهایت دراز برابر شکل جریان‌های I در دو جهت مخالف می‌گذرد. بار مثبت q با سرعت v در راستایی که نشان داده شده است، حرکت می‌کند. جهت نیروی مغناطیسی وارد به بار q کدام است؟



شکل ۴۳-۱۰

(**الف**): به سوی چپ

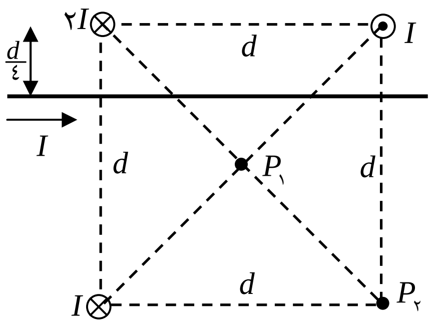
(**ب**): به سوی راست

(**پ**): به سوی درون صفحه

(**ت**): به سوی بیرون از صفحه

مسئله‌ها:

۱- ۱۰ چگالی بار سطحی یکنواخت در روی یک پوسته‌ی کروی توخالی σ است. پوسته حول محور قائم خود با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. شدت میدان مغناطیسی را در "قطب شمال" یعنی در روی نقطه‌ای که بر روی محور چرخش و بر روی پوسته است، پوسته حساب کنید



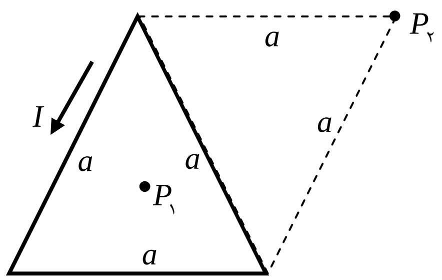
شکل ٤٤-۱۰ سیم جریان در سه گوشه

۱۰-۲ سه سیم جریان در سه گوشه‌ی مربع: سه سیم جریان دراز و موازی برابر شکل (٤٤-۱۰) در سه گوشه‌ی یک مربع به ضلع d قرار دارند. جریان در یکی از سیم‌ها $۲I$ و به سمت درون صفحه است. جریان در دو سیم دیگر I است و در دو جهت خلاف هم اند.

(الف): شدت میدان مغناطیسی را در نقاط $P_۱$ و $P_۲$ حساب کنید.

(ب): نیروی کل که به در واحد طول هر سیم وارد می‌شود، چقدر است؟

(پ): سیم افق چهارمی در فاصله‌ی $d/٤$ در زیر ضلع بالایی مربع به این آرایه افزوده می‌شود. جریان در این سیم I و از چپ به راست است. حالا چه نیرویی به هر یک از سیم‌ها وارد می‌شود؟



شکل ٤٥-۱۰ حلقه‌ی مثلث

۱۰-۳ سیم رسانایی را به شکل یک مثلث متساوی‌اضلاع درآوردیم. شکل (٤٥-۱۰) را ببینید. از حلقه‌ی مثلث جریان I می‌گذرد.

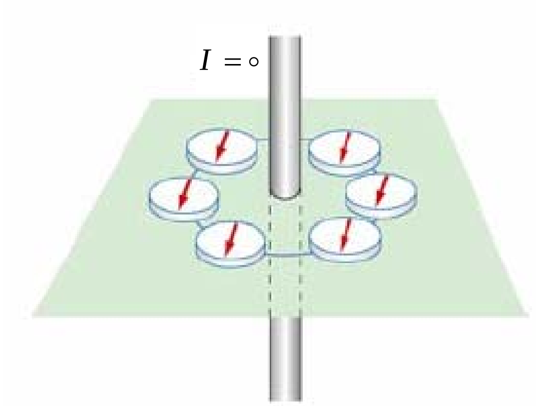
(الف): با استفاده از قانون بیو- ساوار میدان مغناطیسی را در مرکز حلقه، نقطه‌ی $P_۱$، حساب کنید. (*راهنمایی:* میدان هر ضلع را جداگانه حساب کنید.)

(ب): با استفاده از قانون بیو- ساوار میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی $P_۲$، حساب کنید

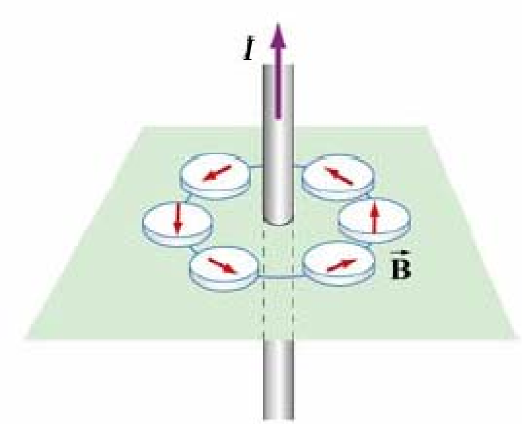
۱۱ قانون آمپر

۱-۱۱ پیش‌گفتار

حرکت بار الکتریکی یا جریان منشاء میدان‌های مغناطیسی است. میدان مغناطیسی را می‌توان با قرار دادن تعدادی عقربه‌ی قطب نما در نزدیکی یک سیم، همانند شکل (۱-۱۱) ، آشکار کرد. اگر از سیم جریان نگذرد، همان‌گونه که از شکل (۱-۱۱) پیداست، همه‌ی عقربه‌ها هم جهت خواهند بود. اما اگر جریان در سیم غیر صفر، $I \neq ۰$، باشد، عقربه‌ها مانند شکل (۲-۱۱)، همگی در جهتی قرار خواهند گرفت که انگار بر یک مسیر دایره‌ای مماس اند.

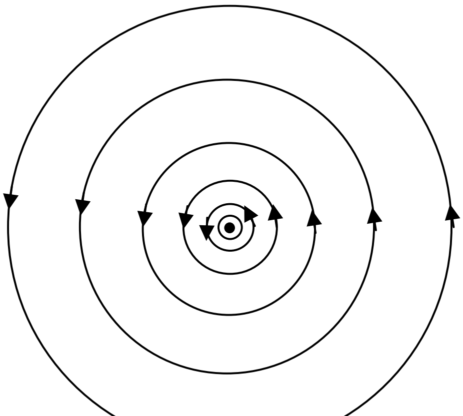


شکل ۱- ۱۱ جهت عقربه‌ی قطب‌نما وقتی که از سیم جریان نمی‌گذرد.



شکل ۲- ۱۱ جهت عقربه‌ی قطب‌نما وقتی از سیم جریان می‌گذرد

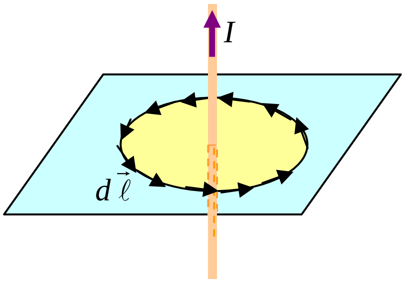
نمایش بالا برای میدان سیم بینهایت دراز بود. میدان مغناطیسی سیم بینهایت دراز حامل جریان I در فاصله‌ی r از سیم با رابطه‌ی (۱۲-۱۰)، $\mathbf{B}_{\infty} = \left(\mu_{\circ} I / ۲\pi r\right)\hat{\mathbf{k}}$ داده شد. این میدان را می‌توان با خط‌های میدان درشکل (۳-۱۱) نشان داد. چگالی خطها شدت میدان را نشان می‌دهد؛ چون میدان سیم راست بینهایت دراز با عکس فاصله از سیم متناسب است، هر چه از سیم دور شویم، فاصله‌ی خط‌های میدان هم بیشتر می‌شود. همچنین با یک نگاه به این شکل دیده می‌شود که خط‌های میدان دیورژانش یا واگرایی ندارند، اما کرل یا تاو دارند. البته، خطها شکل (۳-۱۱) میدان یک وضعیت بسیار خاص است؛ میدان سیم راست بینهایت دراز. در حالت عمومی‌تری هم می‌توان نشان داد که دیورژانش هر میدان مغناطیسی صفر است. این کار را در بخش ۲-۱۱ انجام خواهیم داد. در این جا هنوز لازم نیست که با ریاضیات آن درگیر شویم. خود را فعلا به میدان همین سیم راست محدود می‌کنیم. یکی از این مسیرهای دایره‌ای را در نظر بگیرید که در فاصله‌ی r از سیم است. آن را به جزءهای کوچک بسیار زیادی تقسیم کنید. در شکل (۴-۱۱) هر جزء طول $\Delta\vec{\ell} = \Delta\ell\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ برداری به طول $\Delta\ell$ در روی مسیر دایره‌ای است و جهتش به دایره مماس است. بنابه رابطه‌ی (۱۲-۱۰) ، انتگرال (یعنی در حد $\Delta\vec{\ell} \to 0$) میدان $\mathbf{B}$ روی این دایره عبارت است از



شکل ۳- ۱۱ خط‌های میدان سیم راست و دراز

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint\left(\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\right)d\ell = \left(\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\right)\oint d\ell = \left(\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\right)(۲\pi r) = \mu_\circ I \qquad (۱۱-۱)$$

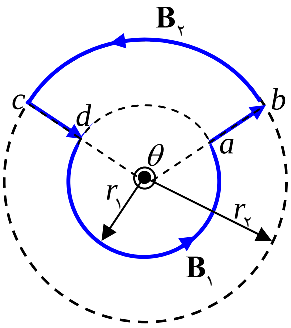
پاسخ انتگرال بالا به شعاع r بستگی ندارد. این که پاسخ مستقل از r است، البته روشن است: آهنگ کاهش $\mathbf{B}$ با آهنگ افزایش پیرامون دایره برابر است. در واقع لازم نیست که مسیر بسته‌ی انتگرال گیری دایره باشد، هر مسیر بسته‌ی دیگری هم که سیم حامل جریان را در بر بگیرد به همان پاسخ رابطه‌ی(۱-۱۱) می‌انجامد. مسیر بسته‌ای که پیرامون سیم جریان است و آن را در میان خود دارد،"**حلقه‌ی آمپر**" نامیده می‌شود. نتیجه‌ی (۱-۱۱) با انتگرال‌گیری بر روی حلقه‌ی آمپر به‌دست آمد. این مسیر همواره روی یکی از خطهای میدان قرار داشت. بگذارید از حلقه‌ی آمپر دیگر استفاده کنیم که اندکی پیچیده‌تر است. با این کار از حالت خاص بودن بررسی بالا کاسته می‌شود.



شکل ۱۱-٤ بردار جزء طول

مسیری مانند شکل (۵-۱۱) را برگزینید که بر روی دو خط میدان متفاوت قرار دارد. مسیر $abcda$ یک مسیر بسته است و سیم راست را در میان دارد. کمان درونی به شعاع $r_۱$ بخشی از یک خط میدان با شدت $\mathbf{B}_۱$ و کمان بیرونی به شعاع $r_۲$ بخشی از خط میدان با شدت $\mathbf{B}_۲$ است. انتگرال مسیر میدان مغناطیسی روی خم بسته‌ی $abcda$ عبارت است از

$$\oint_{abcda} \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_{ab}\mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} + \int_{bc}\mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} + \int_{cd}\mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} + \int_{da}\mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \circ + B_۲(r_۲\theta) + \circ + B_۱\left[r_۱(۲\pi-\theta)\right] \qquad (۱۱-۲)$$



شکل ۵-۱۱ حلقه‌ی آمپر با دو خط میدان

توجه کنید که طول کمان bc برابر $r_۲\theta$ و طول کمان da برابر با $r_۱(۲\pi-\theta)$ است. مقدار انتگرال‌های اول و سوم در رابطه‌ی (۲-۱۱) به این دلیل صفر اند که در روی این مسیرها میدان بر جابه‌جایی عمود است. به ازای $B_۱ = \mu_\circ I/۲\pi r_۱$ و $B_۲ = \mu_\circ I/۲\pi r_۲$ مقدار بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\oint_{abcda} \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi r_۲}(r_۲\theta) + \frac{\mu_\circ I}{۲\pi r_۱}\left[r_۱(۲\pi-\theta)\right]$$
$$= \frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\theta + \frac{\mu_\circ I}{۲\pi}(۲\pi-\theta) = \mu_\circ I \qquad (۱۱-۳)$$

پس، می‌بینیم که با یک یا دو خط میدان، باز هم به همان نتیجه‌ی رابطه‌ی (۱-۱۱) رسیدیم. مسیر بسته حتی لازم نیست که دایره باشد؛ در واقع، همان طور که در مثال ۱-۱۰ و در توصیف شکل (٤-۱۰) دیدیم، میدان مغناطیسی جریانی که در راستای محور $+z$ است، در مختصات استوانه‌ای (r,ϕ,z) به صورت $\mathbf{B} = (\mu_\circ I/۲\pi r)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ است. چون هرجزء طول دلخواهی را می‌توان در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشت

$$d\vec{\ell} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + rd\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۱-٤)$$

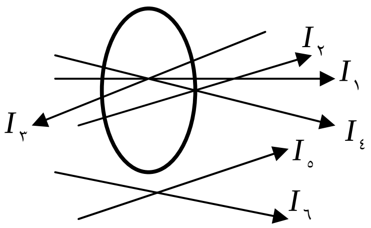
در نتیجه، اگر هرمسیر بسته‌ای با شکل دلخواه، یک بار سیم جریان را دور بزند، خواهیم داشت

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint\left(\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\boldsymbol{\varphi}\right)\cdot(dr\,\hat{\mathbf{r}} + rd\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\oint\frac{۱}{r}rd\phi = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}d\phi = \mu_\circ I \qquad (۱۱-۵)$$

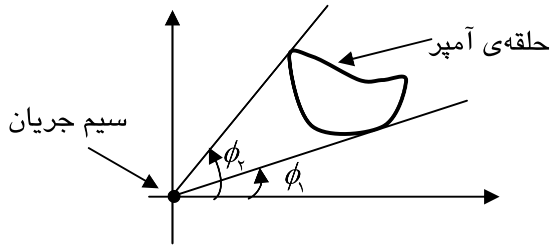
اگر مسیر بسته جریان را دو بار دور بزند $\oint d\phi = ٤\pi$ است. اگر جریان در درون این مسیر بسته قرار نگیرد $\oint d\phi = \circ$ است. به بیان دیگر، انتگرال مسیر $\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}$ حول هر حلقه‌ی آمپر یا مسیر بسته، با مقدار جریانی که در درون حلقه قرار می‌گیرد،

I_{enc}، متناسب است.

تعدادی سیم راست را در نظر بگیرید. هر سیمی که در درون حلقه‌ی آمپر قرار گیرد (در واقع، سطح حلقه‌ی آمپر را قطع کند و از آن بگذرد) در انتگرال $\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}$ سهمی برابر $\mu_\circ I$ خواهد داشت. اگر برخی از سیم‌های این بافه در بیرون حلقه باشد سهمش در $\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}$ صفر خواهد بود. برای روشن شدن این نکته شکل‌های (۶-۱۱) و (۷-۱۱) را در نظر بگیرید. در شکل (۶-۱۱) هیچ جریانی در درون حلقه‌ی آمپر قرار ندارد. بنابراین، $\oint d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_1} d\phi = \circ$ است. در شکل (۷-۱۱) فقط جریان‌هایی که



شکل ۷- ۱۱حلقه‌ی آمپر و بافه‌ی سیم جریان



شکل ۶-۱۱ سیم جریان بیرون حلقه‌ی آمپر است.

در درون حلقه قرار می گیرند، یا به بیانی درست تر، از سطح حلقه می‌گذرند در $\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}$ سهم دارند. بنابراین، جریان‌های I_5 و I_6 در I_{enc} سهمی ندارند و به‌حساب نمی‌آیند.

به طور کلی، برای هر حلقه‌ی بسته‌ی دلخواه می‌توان نوشت

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_\circ I_{\text{enc}} \qquad (۱۱-۶)$$

رابطه‌ی (۶-۱۱) بیان ریاضی **قانون آمپر** در شکل انتگرالی است. I_{enc} جریان کل است که در درون حلقه‌ی آمپر قرار می‌گیرد.

اگر به‌جای جریان‌های خطی، شارش جریان با چگالی جریان حجمی $\mathbf{J}$ داده شود، I_{enc} به‌صورت زیر حساب می‌شود.

$$I_{\text{enc}} = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۱۱-۷)$$

انتگرال رابطه‌ی (۷-۱۱) روی سطحی گرفته می‌شوند که مرزهایش حلقه‌ی آمپر است. اگر قضیه‌ی استوکس را در رابطه‌ی (۶-۱۱) به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \int \left(\vec{\nabla}\times\mathbf{B}\right)\cdot d\mathbf{a} = \mu_\circ I_{\text{enc}} = \mu_\circ \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۱۱-۸)$$

و در نتیجه، **در شکل دیفرانسیلی قانون آمپر** در شکل زیر به‌دست زیر درمی‌آید

$$\vec{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_\circ \mathbf{J} \qquad (۱۱-۹)$$

قانون آمپر در مغناطیس همانند قانون گوس در الکتروستاتیک است. برای این که بتوان از قانون آمپر در شکل انتگرالی آن، رابطه‌ی (۶-۱۱)، استفاده کرد باید برخی تقارن‌ها وجود داشته باشند. در مورد سیم بینهایت دراز، سامانه تقارن استوانه‌ای داشت و توانستیم قانون آمپر را به‌کار ببریم. برای سیم با طول محدود این تقارن دیگر وجود ندارد و ناگزیریم برای محاسبه‌ی میدان مغناطیسی آن از قانون بیو- ساوار استفاده کنیم.

نکته‌ی ۱ هنگامی که از حلقه‌ی آمپر سخن می‌گوییم یا می گوییم" I_{enc} جریان کل است که در درون حلقه‌ی آمپر قرار می‌گیرد" منظورمان به راستی سطحی است که حلقه‌ی آمپر مرزهای آن است و I_{enc} مجموعه‌ی جریان‌هایی است که این سطح را سوراخ می‌کنند و از آن می‌گذرند.♣

نکته‌ی ۲ در شکل انتگرالی قانون آمپر، رابطه‌ی (۶-۱۱)، یک نا روشنی در علامت وجود دارد و از قضیه‌ی استوکس به‌جای

مانده است: وقتی انتگرال می‌گیریم، روی حلقه‌ی آمپر در کدام **سو** باید حرکت کنیم؟ و کدام **جهتِ** سطحی که حلقه‌ی آمپر مرزهای آن است "جریان مثبت" را تعریف می‌کند؟ پاسخ این پرسش با قاعده‌ی انگشت‌های دست راست روشن می‌شود: اگر جهت خمش چهار انگشت دست راست جهت انتگرال گیری (جهت حرکت روی حلقه‌ی آمپر) باشد، انگشت شست جهت جریان مثبت است.♣

نکته‌ی ۳: همان گونه که قانون بیو- ساوار در مغناطوستاتیک مانسته‌ی قانون کولمب در الکتروستاتیک است، قانون آمپر هم مانسته‌ی مغناطیسی قانون گوس در الکتروستاتیک است. به ویژه، برای جریان‌هایی که تقارن خاصب دارند، قانون آمپر روش سودمندی برای یافتن میدان مغناطیسی پیش رو می‌گذارد. ♣

قانون آمپر را در شکل انتگرالی می‌توان برای چهار آرایش جریان زیر به کار برد. ما هر چهار حالت را بررسی خواهیم کرد.

۱- سیم راست بینهایت دراز حامل جریان پایای I

۲- صفحه‌ی بینهایت گسترده با ضخامت b و چگالی جریان $\mathbf{J}$ (و نیز صفحه‌ی بینهایت گسترده بدون ضخامت و چگالی جریان سطحی $\mathbf{K}$)

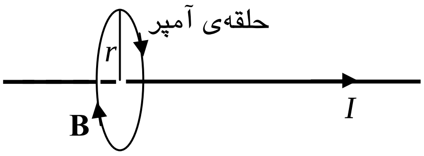
۳- پیچه (سولونوئید) بینهایت دراز

٤- توروئید

در زیر هر چهار وضعیت را با جزییاتشان بررسی می‌کنیم.

۲- ۱۱ میدان مغناطیسی در درون و بیرون سیم دراز حامل جریان I

مثال ۱-۱۱ از سیم بسیار دراز و راست شکل (۸-۱۱) جریان پایای I می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در فاصله‌ی r از سیم به‌دست آورید.



شکل ۸- ۱۱میدان سیم بینهایت دراز

حل: این وضعیتی است که سیم جریان تقارن استوانه‌ای دارد. می‌دانیم که جهت میدان پیرامونی و مماسی است وهمان‌گونه که در شکل نشان داده شده است، حول سیم می‌گردد. حلقه‌ی آمپر را دایره‌ای برگزینید که مرکزش بر سیم منطبق باشد. به خاطر تقارن، اندازه‌ی میدان روی نقاط حلقه‌ی آمپر با شعاع r مقدار ثابتی است. بنابراین، از قانون آمپر داریم

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint (B\,\hat{\boldsymbol{\varphi}})\cdot(d\ell\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = B\oint d\ell = B(۲\pi r) = \mu_\circ I_{\text{enc}} = \mu_\circ I \quad\Rightarrow\quad B = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi r} \qquad (۱۱-۱۰)$$

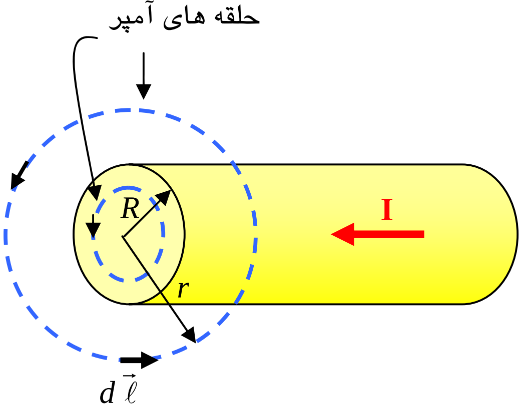
مثال ۲- ۱۱ سیم دراز و کلفت: سیم راست و درازی به شعاع R را برابر شکل (۹) در نظر بگیرید. جریان I با چگالی جریان یکنواخت از سیم می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در همه‌جا (هم در ناحیه‌ی درون سیم و هم در بیرون آن) حساب

حل: نخست در ناحیه‌ی بیرون $r \geq R$. حلقه‌ی آمپر را دایره‌ای به شعاع r انتخاب کنید. با استفاده از قانون آمپر داریم

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = B\oint d\ell = B(۲\pi r) = \mu_\circ I \quad\Rightarrow\quad B = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi r} \qquad (۱۱-۱۱)$$

و حالا درون سیم ($r < R$) را در نظر بگیرید.

برای این ناحیه، حلقه‌ی آمپر در شکل (۹-۱۱) نشان داده شده است.



شکل ۹- ۱۱ حلقه‌های آمپربرای محاسبه‌ی **B**

مقدار جریان گذرنده از درون این حلقه با سطح آن متناسب است:

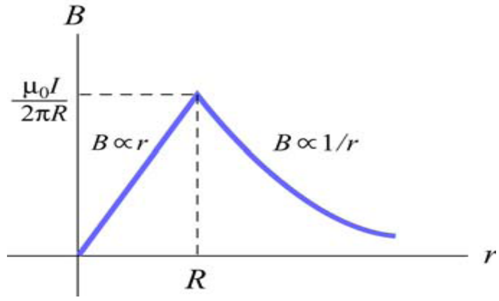
$$I_{enc} = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = \int (\mathbf{I}/\pi R^2)\cdot d\mathbf{a} = I\left(\frac{2\pi r^2}{\pi R^2}\right) \qquad (۱۱-۱۲)$$

و از قانون آمپر داریم

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_\circ I_{enc} \;\Rightarrow\; B\oint d\ell = \mu_\circ I\left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2}\right)$$

$$\Rightarrow\; B(2\pi r) = \mu_\circ I\left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2}\right) \;\Rightarrow\; B = \frac{\mu_\circ I r}{2\pi R^2} \qquad (۱۱-۱۳)$$

دیده می شود که میدان مغناطیسی در مرکز سیم صفر است و با دور شدن از مرکز (با افزایش r) به‌طور خطی افزایش می‌یابد تا این که $r = R$ شود. در بیرون سیم، میدان به‌صورت $1/r$ با افزایش r کاهش پیدا می‌کند. رفتار میدان برحسب r در شکل (۱۰-۱۱) دیده می‌شود.



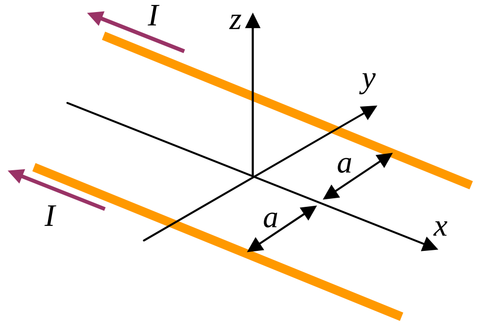
شکل ۱۰- ۱۱میدان مغناطیسی برحسب فاصله از محور

مثال ۳- دو سیم بینهایت دراز : در شکل (۱۱-۱۱) دو سیم بینهایت دراز نشان داده شده است. از سیم‌ها جریان I در جهت $-x$ می‌گذرد.

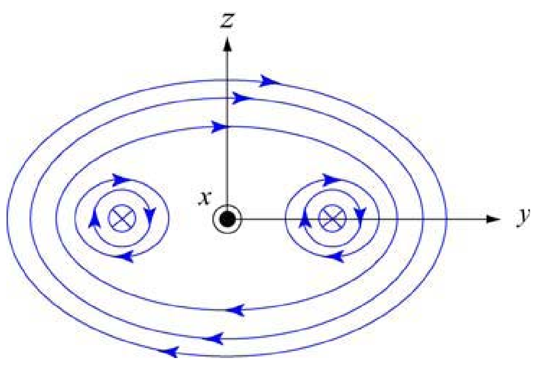
(الف): طرح خط های مسدان مغناطیسی را در صفحه ی yz رسم کنید.

(ب): در چه فاصله‌ی d روی محور z میدان مغناطیسی بیشینه است؟

حل: **(الف)** خطهای میدان در شکل (۱۲-۱۱) نشان داده شده اند. توجه کنید که جهت هر دو جریان به سوی درون صفحه است.



شکل ۱۱-۱۱ دو سیم بینهایت دراز حامل جریان



شکل ۱۲- ۱۱ نمایش طرح خطهای میدان

(ب): بنابه قانون آمپر، میدان مغناطیسی سیم سمت چپ در نقطه‌ی $(\circ,\circ,z)$ عبارت است از

$$B_1 = \frac{\mu_\circ I}{2\pi r} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\sqrt{a^2+z^2}} \qquad (۱۱-۱۳)$$

چون شارش جریان در جهت $-x$ است، جهت میدان مغناطیسی را ضرب خارجی زیر تعیین می‌کند.

$$(-\hat{\mathbf{i}})\times\hat{\mathbf{r}}_1=(-\hat{\mathbf{i}})\times\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}+\sin\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right)=\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}-\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۱-۱٤)$$

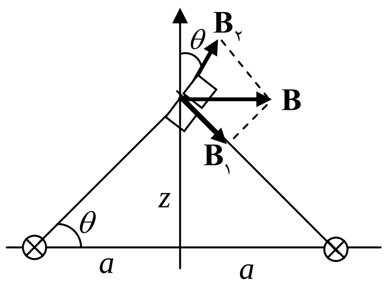
زاویه θ در شکل (۱۱-۱۳) نشان داده شده است. بنابراین، داریم

$$\mathbf{B}_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2+z^2}}\left(\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}-\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right) \qquad (۱۱-۱٥)$$

اندازه‌ی میدان سیم سمت راست در نقطه‌ی $(0,0,z)$ با اندازه‌ی میدان B_1 برابر است: $B_2=B_1$ جهت میدان $\mathbf{B}_2$ با ضرب خارجی زیر تعیین می شود

$$(-\hat{\mathbf{i}})\times\hat{\mathbf{r}}_2=(-\hat{\mathbf{i}})\times\left(-\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}+\sin\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right)=\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۱-۱٦)$$

و در نتیجه داریم



شکل ۱۱-۱۳ میدان‌های $\mathbf{B}_1$ و $\mathbf{B}_2$ و زاویه‌ی θ

$$\mathbf{B}_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2+z^2}}\left(\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right) \qquad (۱۱-۱۷)$$

میدان کل از جمع برداری $\mathbf{B}_1$ و $\mathbf{B}_2$ به‌دست می‌آید و مولفه‌ی z حذف می شود (تقارن مسئله هم این را لازم می‌دارد) و در نتیجه به‌دست می‌آید

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2$$
$$=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{\pi\sqrt{a^2+z^2}}\hat{\mathbf{j}}=\frac{\mu_0 I z}{\pi\left(a^2+z^2\right)} \qquad (۱۱-۱۸)$$

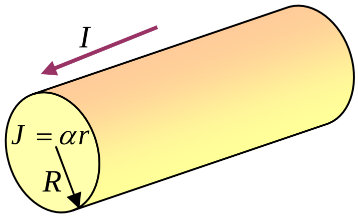
برای یافتن بیشینه‌ی B از آن مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می دهیم: $dB/dz=0$. به‌دست می‌آید:

$$\frac{dB}{dz}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{a^2+z^2}-\frac{2z^2}{\left(a^2+z^2\right)^2}\right)=\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a^2-z^2}{\left(a^2+z^2\right)^2}\ \Rightarrow\ \frac{dB}{dz}=0\ \Rightarrow\ z=a \qquad (۱۱-۱۹)$$

بنابراین، در $z=a$ شدت میدان مغناطیسی بیشینه است. مقدار آن در $z=a$ عبارت است از

$$B_{\max}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \qquad (۱۱-۲۰)$$

مثال ۱۱-۴ چگالی جریان نایکنواخت: از استوانه‌ی رسانای بینهایت دراز شکل (۱۱-۱٤) با شعاع قاعده‌ی R جریان I گذرد. چگالی جریان در استوانه یکنواخت نیست و با فاصله از محور به‌صورت $J=\alpha r$ تغییر می‌کند. α مقدار ثابتی است. میدان مغناطیسی را همهجا (یعنی در بیرون و در درون رسانا) حساب کنید و آن را برحسب فاصله از محور، r، رسم کنید.



شکل ۱۱-۱٤ چگالی جریان نایکنواخت

حل: این مسئله را توان با استفاده از قانون آمپر حل کرد.

$$\oint\mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I_{enc} \qquad (۱۱-۲۱)$$

I_{enc} جریانی است که درون حلقه‌ی آمپر قرار می‌گیرد و به‌صورت زیر می‌توان آن را حساب کرد

$$I_{enc}=\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}=\int(\alpha r')(2\pi r'dr') \qquad (۱۱-۲۲)$$

(الف) در ناحیه‌ی درون استوانه، $r<R$ ، داریم

$$I_{\text{enc}} = \int_{\circ}^{r} ۲\pi\alpha r'^{۲} dr' = \frac{۲\pi\alpha r^{۳}}{۳} \qquad (۱۱-۲۳)$$

و با قرار دادن در قانون آمپر، رابطه‌ی (۲۱-۱) ، میدان مغناطیسی $B_۱$ در نقطه‌ی $P_۱$ به‌دست می‌آید

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_{\circ} I_{\text{enc}} \Rightarrow B_۱(۲\pi r) = \mu_{\circ}\frac{۲\pi\alpha r^{۳}}{۳} \Rightarrow B_۱ = \frac{\alpha\mu_{\circ}}{۳} r^{۲} \qquad (۱۱-۲۴)$$

جهت میدان بر حلقه‌ی آمپری مماس است که جریان را احاطه می‌کند (مثال ۱ -۱۱ را ببینید).

(ب): ناحیه‌ی بیرون، $r > R$ ، برای I_{enc} داریم

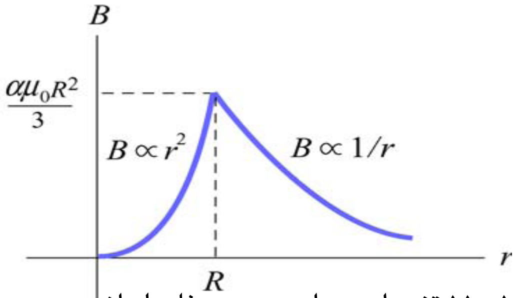
$$I_{\text{enc}} = \int_{\circ}^{R} ۲\pi\alpha r'^{۲} dr' = \frac{۲\pi\alpha R^{۳}}{۳} \qquad (۱۱-۲۵)$$

و از قانون آمپر برای میدان مغناطیسی در نقطه‌ی $P_۲$ در بیرون رسانا، خواهیم داشت

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_{\circ} I_{\text{enc}}$$

$$\Rightarrow B_2(2\pi r) = \mu_{\circ}\frac{2\pi\alpha R^3}{3} \Rightarrow B_2 = \frac{\alpha\mu_{\circ} R^3}{3r} \qquad (۱۱-۲۶)$$

در شکل (۱۵-۱۱) میدان برحسب فاصله از محور استوانه رسم شده است

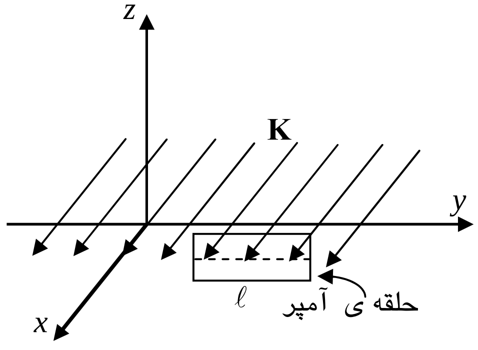


شکل ۱۵- ۱۱ تغییرات میدان برحسب فاصله از محور

۲- صفحه‌ی بینهایت گسترده : اگر چگالی جریان سطحی $\mathbf{K}$ یا حجمی $\mathbf{J}$ در صفحه‌ی گسترده (بدون ضخامت یا با ضخامت) توزیع شود، می‌توان برای یافتن میدان مغناطیسی از قانون آمپر استفاده کرد. به بیان دیگر، برای حالت‌های با تقارن صفحه‌ای، قانون آمپر در شکل انتگرالی آن سودمند است. در مثال‌های زیر این سودمندی و کاربرد را نشان می دهیم.

مثال ۵- ۱۱ چگالی جریان سطحی: چگالی جریان سطحی یکنواخت $\mathbf{K} = K\,\mathbf{i}$ در راستای محور x تمامی صفحه ی xy را همانند شکل (۱٦) پوشانده است. میدان مغناطیسی را به‌دست آورید*

حل: پیش از هر چیز، **جهت** میدان $\mathbf{B}$ چیست؟ آیا $\mathbf{B}$ می‌تواند مولفه‌ای در راستای x داشته باشد؟ **نه**: نگاهی به قانون بیو- ساوار نشان می دهد که $\mathbf{B}$ بر $\mathbf{K}$ عمود است و $\mathbf{K}$ در راستای X است. آیا $\mathbf{B}$ می‌تواند مولفه‌ی z داشته باشد؟ پاسخ باز هم **نه** است؛ چون هر مولفه‌ی عمودی که برش جریانِ جایگزیده در ناحیه‌ی $+y$ ایجاد کند با میدانی که جریان ناحیه‌ی $-y$ ایجاد می‌کند، حذف می‌شود. این تقارنی است که در این مثال وجود دارد. بنابراین، میدان فقط مولفه‌ی y خواهد داشت. در زیر صفحه‌ی $z = \circ$ میدان در جهت $+y$ و در بالای آن به‌سوی $-y$ است. بنابراین، حلقه‌ی آمپر را یک مستطیل همانند شکل (۱٦-۱۱) برگزینید که با صفحه‌ی



شکل ۱٦- ۱۱ صفحه ی چگالی جریان یکنواخت

---

*برگرفته از David J. Griffiths, *Intro. to Electrodynamics*, 2nd Ed. (Prentice Hall, 1989)

yz موازی است و نیمی از آن در بالا و نیم دیگرش در پایین صفحه‌ی $z=\circ$ قرار گیرد. با بهره گرفتن از قانون آمپر داریم:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = ۲B\ell = \mu_\circ I_{\text{enc}} = \mu_\circ K\ell \quad \Rightarrow\quad B=\frac{\mu_\circ}{۲}K \qquad (۱۱-۲۷)$$

اگر دقیق‌تر بگوییم، خواهیم داشت

$$\mathbf{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_\circ}{۲}K\,\hat{\mathbf{j}} & ;\quad z<\circ\\ -\dfrac{\mu_\circ}{۲}K\,\hat{\mathbf{j}} & ;\quad z>\circ\end{cases} \qquad (۲۸)$$

مثال ۶-۱۱ برش باریک فلزی: برش باریکی از فلز در شکل (۱۷-۱۱) نشان داده شده است. در این برش جریان I در امتداد محور x است. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P واقع در صفحه‌ی برش و به فاصله‌ی s از آن حساب کنید (ضخامت برش بسیار کم است و می‌توان آن را یک صفحه پنداشت).

حل: روبان باریکی به پهنای dr را همانند شکل (۱۸-۱۱) در نظر بگیرید. جریانی که در این جزء وجود دارد $dI=I\,(dr/w)$ است. با استفاده از قانون آمپر، دیده می‌شود که سهم این باریکه‌ی جریان در میدان نقطه‌ی P عبارت است از

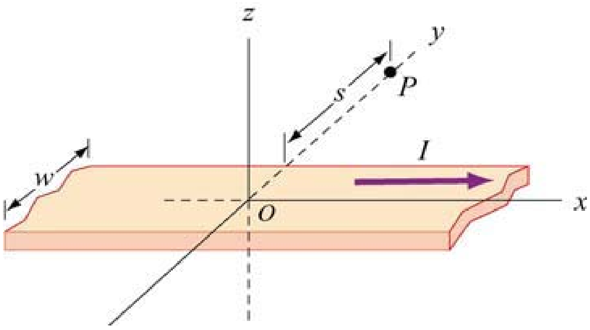
$$dB\,(۲\pi r)=\mu_\circ I_{\text{enc}}=\mu_\circ (dI) \qquad (۱۱-۲۹)$$

یا

$$B=\int_s^{s+w}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi w}\left(\frac{dr}{r}\right)=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi w}\ell n\left(\frac{s+w}{s}\right) \qquad (۱۱-۳۰)$$

با استفاده از قاعده‌ی انگشت‌های دست راست می‌توان نشان داد که جهت میدان در نقطه‌ی P به سوی $+z$ است. پس،

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi w}\ell n\left(۱+w/s\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۱-۳۱)$$

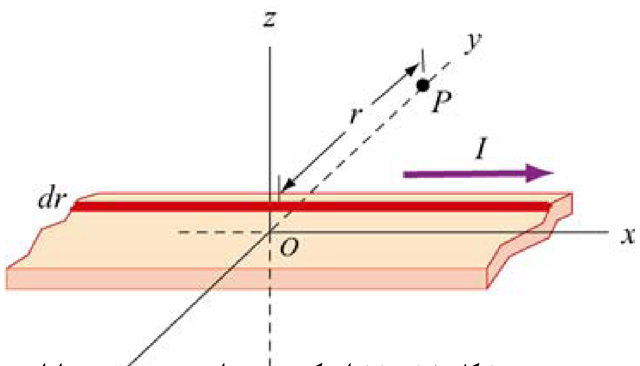


شکل ۱۷-۱۱ برش رسانای حامل جریان I

توجه کنید که در حد $w\to\circ$ (و بنابراین $w\ll s$) داریم $\ell n(۱+w/s)\approx w/s$ و رابطه‌ی (۱۱-۳۱) به

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۳۲)$$

کاهش پیدا می‌کند که میدان مغناطیسی سیم راست بینهایت دراز است.

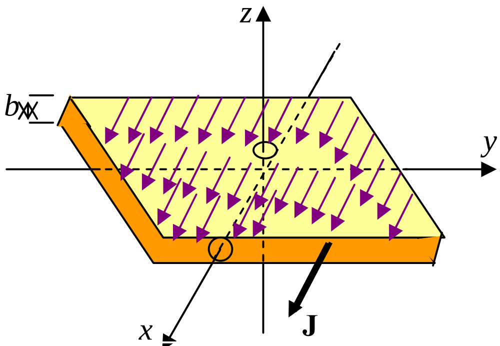


شکل ۱۸- ۱۱باریکه‌ی جریان در برش رسانا

مثال ۷- ۱۱ برش ضخیم: دربرش بینهایت گسترده‌ای با ضخامت b از $z=-b/۲$ تا $z=b/۲$ چگالی جریان یکنواخت و برابر $\mathbf{J}=J_\circ\,\hat{\mathbf{i}}$ است. این برش همانند شکل (۱۹-۱۱) در صفحه‌ی xy قرار دارد. چگالی جریان را همه جا (بالای برش، زیر برش و

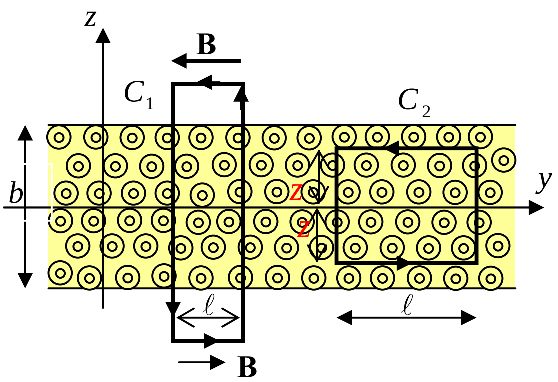
در درون آن) به‌دست آورید.

حل: برش را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از سیم‌های حامل جریان در راستای $+x$ پنداشت. از شکل (۲۰-۱۱) می‌توان دید که در بالای برش میدان در نقطه‌ی P در جهت $-y$ است. پس از آنکه سهم همه‌ی سیم‌ها را برهم افزودیم، مولفه‌های z ها حذف می‌شوند. هم‌چنین می‌توان نشان داد که میدان مغناطیسی در زیر برش در جهت $+y$ است. در واقع، میدان در $z>\circ$ در جهت $-y$ و برای $z<\circ$ در جهت $+y$ است. در مثال ۵-۱۱ هم با همین وضعیت روبرو بودیم. روشن است که درست در وسط برش، یعنی در صفحه‌ی $z=\circ$، میدان صفر است. حال جهت میدان را می‌شناسیم، می‌توان برای یافتن میدان از قانون آمپر استفاده کرد. حلقه‌های آمپر در شکل (۲۱-۱۱) نشان داده شده اند. برای یافتن میدان در بیرون برش، روی مسیر C_1 (حلقه‌ی آمپر) انتگرال می‌گیریم. مقدار جریانی که این حلقه‌ی آمپر در بر دارد

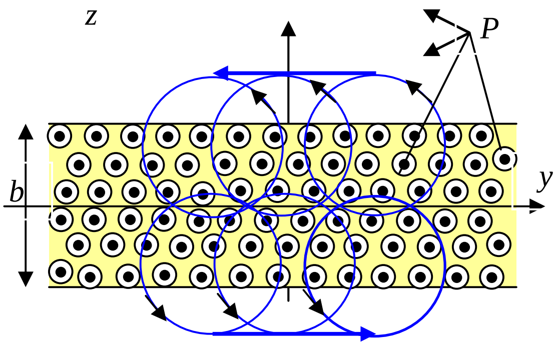


شکل ۱۹-۱۱ برش با جریان حجمی یکنواخت

$$I_{enc}=\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}=j_\circ(b\ell) \qquad (۱۱-۳۳)$$



شکل ۲۱- حلقه های آمپر



شکل ۲۰- میدان مغناطیسی برش جریان

است. حالا از قانون آمپر داریم

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}=B(۲\ell)=\mu_\circ I_{enc}=\mu_\circ(J_\circ b\ell) \quad\Rightarrow\quad B=\frac{\mu_\circ J_\circ b}{۲} \qquad (۱۱-۳۴)$$

توجه کنید که میدان در بیرون برش مقداری ثابت و مستقل از فاصله تا برش است. در روی یال‌های عمودی حلقه‌ی آمپر، میدان به مسیر عمود است و بنابراین، سهمی در $\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}$ ندارد. برای یافتن میدان مغناطیسی در درون برش، حلقه‌ی آمپر را مسیر $C_۲$ برگزینید. مقدار جریان در درون این حلقه

$$I_{enc}=\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}=j_\circ(۲|z|\ell) \qquad (۳۵)$$

است و از قانون آمپر داریم

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}=B(۲\ell)=\mu_\circ I_{enc}=\mu_\circ(J_\circ|z|\ell) \quad\Rightarrow\quad B=\mu_\circ J_\circ|z| \qquad (۱۱-۳۶)$$

نتیجه‌ی محاسبه‌ی بالا را می‌توان با استفاده از نمادگذاری بردار یکه، به‌صورت زیر خلاصه کرد.

$$\mathbf{B}=\begin{cases}-\dfrac{\mu_\circ J_\circ b}{۲}\hat{\mathbf{j}} & ; \quad z>b/۲\\ -\mu_\circ J_\circ z\,\hat{\mathbf{j}} & ; \quad -b/۲<z<b/۲\\ \dfrac{\mu_\circ J_\circ b}{۲}\hat{\mathbf{j}} & ; \quad z<b/۲\end{cases} \qquad (۱۱-۳۷)$$

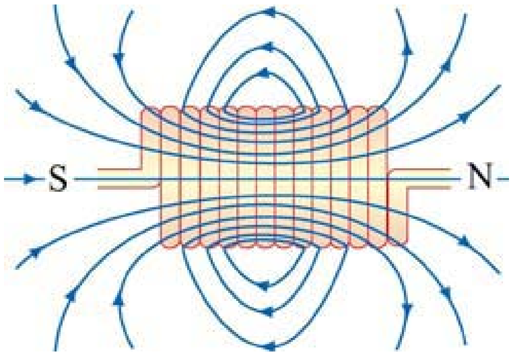
اینک حدی را در نظر بگیرید که برش بسیار نازک و $b\to ۰$ باشد. در این حالت چگالی جریان به جای $\mathbf{J}=J_\circ\hat{\mathbf{i}}$ به چگالی جریان سطحی $\mathbf{K}=K\,\hat{\mathbf{i}}$ با $K=J_\circ b$ تبدیل می شود. در این حد داریم:

$$\mathbf{B}=\begin{cases}-\dfrac{\mu_\circ K}{۲}\hat{\mathbf{j}} & ; \quad z>۰\\ \dfrac{\mu_\circ K}{۲}\hat{\mathbf{j}} & ; \quad z<۰\end{cases} \qquad (۱۱-۳۸)$$

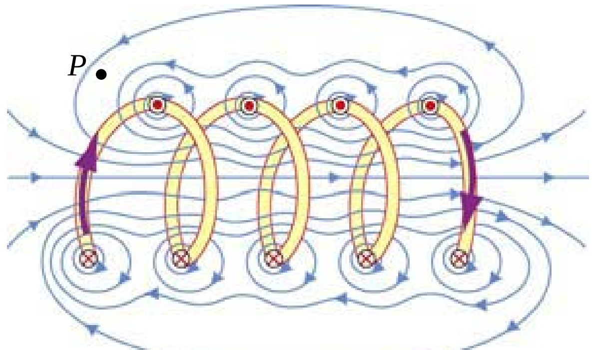
که همان رابطه ی (۲۸-۱۱) است.

۳- ۱۱ پیچه یا سولونوئید بینهایت دراز

در فصل ۱۰ میدان پیچه‌ی محدود را در نقطه‌ای روی محور آن، با استفاده از قانون بیو- ساوار حساب کردیم. اگر پیچه یا سولونوئید بسیار دراز باشد، تقارن استوانه‌ای پیدا می‌کند وبا استفاده از قانون آمپر می‌توان میدان مغناطیسی را در درون و بیرون آن حساب کرد. سولونوئید پیچه‌ی درازی است که سیم‌ها در کنار هم و بسیار کیپ هم پیچیده شده اند و از آن جریان I می‌گذرد. اگر سیم‌های پیچه بسیار نزدیک هم پیچیده شده باشند، می توان در حجم کوچکی در درون آن میدان مغناطیسی یکنواخت تولید کرد. در شکل (۲۲-۱۱) بخشی از یک پیچه نشان داده شده است..خط‌های میدان مغناطیسی در درون و بیرون آن نیز مشخص شده اند. در این شکل البته حلقه‌های پیچه خیلی کیپ هم نیستند. با وجود این می‌توان دید که میدان در ناحیه‌ی



شکل ۲۳- ۱۱ خط‌های میدان پیچه‌ی کوتاه

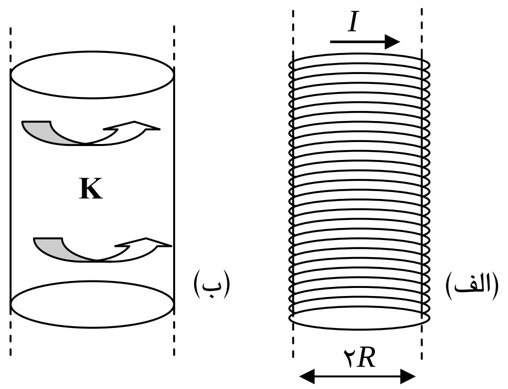


شکل ۲۲- ۱۱ نمایش خط‌های میدان پیچه

درون آن کمابیش موازی و به طور یکنواخت توزیع شده اند . این نشان می‌دهد که میدان در درون پیچه قوی و یکنواخت است. خط‌های میدان در فاصله‌ی بین دورهای سیم یکدیگر را حذف می‌کنند. در ناحیه‌ی بیرون پیچه میدان هم نایکنواخت و هم ضعیف‌تر (در مقایسه با میدان درون) است. علت ضعیف بودن میدان در ناحیه‌ی بیرون، مانند نقطه‌ی P، این است که میدان حاصل از جزء جریان قسمت پایین می‌کوشد میدان تولید شده به وسیله‌ی جزء جریان قسمت بالا را حذف کند. اگر حلقه‌های سیم در پیچه کیپ هم پیچیده شده باشند و طول پیچه محدود و کوتاه باشد، همان طور که از شکل (۲۳-۱۱) پیداست، خط‌های

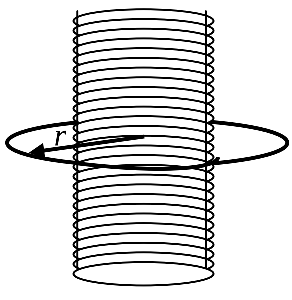
میدان از یک انتهای پیچه خارج و واگرا می شوند و در انتهای دیگر بر هم می‌آیند و همگرا می‌شوند. بررسی این خطهای میدان نشان می‌دهد که خطهای میدان پیچه‌ی محدود رفتاری همانند یک آهن ربای میله‌ای دارد: یک انتهای آن مانند قطب شمال و انتهای دیگرش مانند قطب جنوب آهن ربای میله‌ای رفتار می‌کند. با افزایش طول پیچه، میدان درون بیشتر و بیشتر به یکنواختی می‌گراید. با کیپ هم پیچیده شدن سیم ها و افزایش طول پیچه (در مقایسه با شعاع آن) به **پیچه‌ی آرمانی** می‌رسیم. میدان مغناطیسی پیچه‌ی آرمانی در درون آن و در حجمی بزرگ، یکنواخت و قوی است. در بیرون پیچه، در مقایسه با درون آن ، میدان بسیار ضعیف است. در این حالت است که می‌توان از قانون آمپر برای محاسبه‌ی میدان پیچه یا سولونوئید استفاده کرد. در زیر به طور کمی به حل این مسئله می پردازیم.

پیچه‌ی دراز شکل (۲٤-۱۱الف) را در نظر بگیرید. شعاع پیچه R است وتعداد دورهای در واحد طول آن N است. دورها چنان نزدیک به هم پیچیده شده اند که می‌توانیم هر دور سیم را یک حلقه دایره فرض کنیم. اگر فرض دایره بودن حلقه‌های سیم برای شما آزار دهنده است (مهم نیست که ها جقدر به هم نزدیک باشند، به هر حال جریان I در راستای محور سولونوئید روان است) پوسه‌ی نازکی را تصور کنید که همانند شکل (۲٤-۱۱ب) دور استوانه پیچیده شده است و جریان سطحی با چگالی $K = NI$ از آن می‌گذرد.



شکل ۲٤– ۱۱پیچه‌ی بینهایت دراز

نخست، جهت میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را بررسی کنیم. روشن است که چارچوب مناسب برای این مسئله چارچوب استوانه‌ای است. در این چارچوب متغیرها عبارتند از (r,ϕ,z).آیا ممکن است میدان $\mathbf{B}$ مولفه‌ی شعاعی، B_r ، داشته باشد؟ پاسخ این پرسش **نه** است. برای فهمیدن آن فرض کنید میدان مولفه‌ی شعاعی دارد و مقدارش مثبت است: $B_r > 0$. اگر جهت جریان را وارون کنیم، آنگاه مولفه‌ی شعاعی B_r *منفی* می شود. اما وارون کردن جهت جریان از نظر فیزیکی با سروته کردن سولونوئید همارز است و سروته کردن نمی تواند تاثیری در مولفه‌ی شعاعی داشته باشد. پس، $B_r = 0$ است. میدان مولقه‌ی سمتی B_ϕ هم ندارد. برای دیدن این، همانند شکل (۲۵-۱۱) حلقه‌ی آمپری به شعاع r و هم‌محور با پیچه را در نظر بگیرید. روشن است که در همه‌ی نقاط این حلقه B_ϕ مقدار ثابتی است.



شکل ۲۵– حلقه ی آمپر
برای محاسبه ی B_ϕ

بنابراین داریم

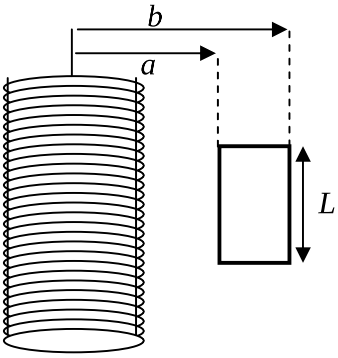
$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = B_\phi \oint d\ell = B_\phi (2\pi r) = \mu_0 I_{\text{enc}} = 0 \;\Rightarrow\; B_\phi = 0 \qquad (۱۱-۳۹)$$

علت $I_{\text{enc}} = 0$ این است که هیچ جریانی از سطح حلقه‌ی آمپر نمی‌گذرد. در نتیجه، میدان مغناطیسی پیچه‌ی بینهایت دراز در راستای محور z و *موازی محور* پیچه است. از قاعده‌ی انگشت‌های دست راست، انتظار داریم که جهت میدان در درون پیچه به سوی بالا و در بیرون به سوی پایین باشد. با روشن شدن جهت میدان $\mathbf{B}$ پیچه، می‌توانیم از قانون آمپر استفاده کنیم و میدان را در درون وبیرون پیچه حساب کنیم. برای این کار دو حلقه‌ی آمپر در نظر خواهیم گرفت، یکی برای یافتن میدان در بیرون و دیگری برای یافتن میدان در درون پیچه. نخست میدان مغناطیسی را در بیرون پیچه بررسی می‌کنیم .

حلقه‌ی آمپر مستطیلی در شکل (۲٦-۱۱) را در نظر بگیرید. یکی از طول‌های آن در فاصله‌ی a و دیگری در فاصله‌ی b از محور

پیچه قرار دارد. از قانون آمپر داریم

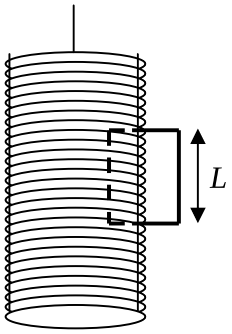
$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = [B(a)-B(b)]L = \mu_\circ I_{\text{enc}} = \circ \Rightarrow B(a)=B(b) \qquad (۱۱-۴۰)$$



شکل ۲۶- ۱۱حلقه‌ی آمپر برای بیرون

توجه کنید که میدان به ضلع‌های افقی حلقه‌ی آمپر عمود است و در $\int \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}$ سهمی ندارند. $B(a)$ و $B(b)$ به‌ترتیب میدان در فاصله‌ی a و در فاصله‌ی b از محور پیچه اند. رابطه‌ی (۴۰-۱۱) نشان می‌دهد که اندازه‌ی میدان به فاصله از محور پیچه بستگی ندارد. اما می‌دانیم که با دور شدن از پیچه، میدان ضعیف‌تر می‌شود و برای فاصله‌های زیاد به صفر میل می‌کند. در نتیجه، باید همه جا در بیرون پیچه هم صفر باشد. پس میدان در بیرون پیچه $\mathbf{B}_{\text{Out}} = \circ$ است. این نتیجه را از قانون بیو- ساوار هم می‌توان به‌دست آورد، اما محاسبه‌ی آن پیچیده‌تر و دشوارتر است.برای محاسبه‌ی میدان در درون پیچه حلقه‌ی آمپر شکل (۲۷-۱۱) را در نظر بگیرید. این حلقه‌ی آمپر مستطیلی به طول L است که نیمی از آن در درون پیچه و نیم دیگرش در بیرون پیچه قرار دارد. از قانون آمپر داریم

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell} = BL = \mu_\circ I_{\text{enc}} = \mu_\circ NIL \qquad (۱۱-۴۱)$$



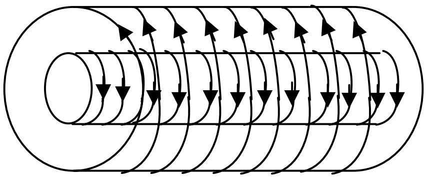
شکل ۲۷- ۱۱حلقه‌ی آمپر
برای درون سولونوئید

B اندازه‌ی میدان در درون پیچه است. توجه کنید که قسمتی از حلقه که در بیرون پیچه قرار دارد سهمی در $\int \mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}$ ندارد، چون در برون پیچه $B=\circ$ است. بنابراین می توان نوشت:

$$B = \begin{cases} \mu_\circ NI\,\hat{\mathbf{z}} & \text{درون} \\ \circ & \text{بیرون} \end{cases} \qquad (۱۱-۴۲)$$

توجه کنید که میدان در درون پیچه یکنواخت است.

مثال ۸- ۱۱ دو پیچه‌ی هم محور: از پیچه‌های هم‌محور شکل (۲۸-۱۱) جریان‌های I در خلاف جهت یکدیگر می‌گذرد. شعاع پیچه‌ی داخلی a و تعداد دورهای آن $N_۱$ دور در واحد طول است. شعاع پیچه‌ی بیرونی b و تعداد دورهای آن $N_۲$ دور در واحد طول است. میدان مغناطیسی را (**الف**) در درون پیچه‌ی داخلی، (**ب**) در بین دو پیچه، و (**پ**) در بیرون پیچه‌ها حساب کنید.


شکل ۲۸- ۱۱دو پیچه‌ی هم محور

حل: میدان در درون پیچه $\mu_\circ NI$ و در بیرون آن صفر است. جهت میدان پیچه‌ی خارجی به سوی چپ یا ($-\hat{\mathbf{k}}$) است. جهت میدان پیچه‌ی داخلی به سوی راست ($+\hat{\mathbf{k}}$) است. بنابراین داریم

(**الف**): در درون پیچه‌ی داخلی هر دو میدان وجود دارند و جهت آنها در خلاف یکدیگرند:

$$\mathbf{B} = \mu_\circ I(N_۱ - N_۲)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۱-۴۳)$$

(**ب**): در ناحیه‌ی بین دو پیچه، میدان پیچه‌ی داخلی صفر است و تنها میدان پیچه‌ی بیرونی وجود دارد:

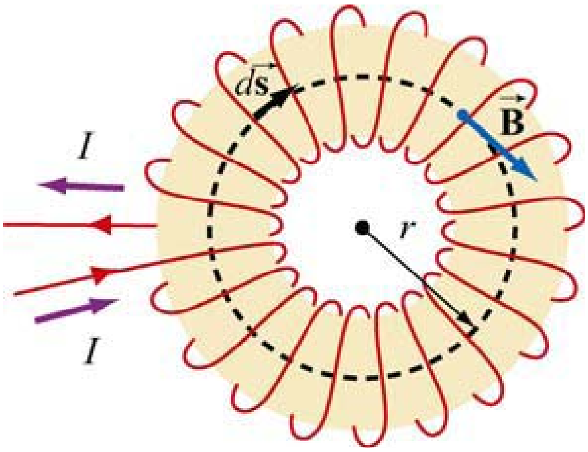
$$\mathbf{B} = -\mu_\circ IN_۲\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۱-۴۴)$$

(**پ**): در ناحیه‌ی بیرون هر دو پیچه هیچ یک از پیچه‌ها میدان ندارند. بنابراین

$$\mathbf{B}=\circ \qquad (۱۱-۴۵)$$

۴- چنبره یا توروئید

چنبره یا توروئید حلقه ی دایره شکلی است که سیم درازی به دورش پیچیده شده است. سطح مقطع حلقه می تواند هر شکلی داشته باشد، اما باید دورتا دور حلقه سطح مقطع یکسان باشد.
شکل (۲۹۱۱) چنبره‌ای را نشان می‌دهد که سطح مقطع دایره‌ای دارد. در واقع می‌توان به چنبره همانند پیچه‌ای اندیشید که دو انتهایش به هم وصل شده است. بنابراین، میدان مغناطیسی کاملا به درون چنبره محدود و در بیرون چنبره میدان مغناطیسی آن صفر است. جهت میدان مغناطیسی در درون چنبره پیرامونی است. در شکل (۲۹-۱۱) به خاطر سویی که برای جریان برگزیده شده است، میدان $\mathbf{B}$ پادساعتگرد است (می‌توان با استفاده از قانون بیو- ساوار جهت میدان را در هر نقط حساب کرد و نشان داد که باید پیرامونی باشد. برای این کار باید ضرب خارجی $\mathbf{I}\times\hat{\mathbf{r}}$ را حساب کرد و به تقارن چنبره توجه کرد. در این جا ما به این جزییات نخواهیم پرداخت. علاقمندان توانند فصل ٥ کتاب *D.Griffiths* را ببینند).



شکل ۲۹-۱۱ چنبره‌ای با سطح مقطع دایره‌ای

برای یافتن میدان از قانون آمپر استفاده کنید. حلقه‌ی آمپر را همانند شکل (۲۹-۱۱) دایره‌ای به شعاع r در نظر بگیرید. داریم

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\mu_\circ I_{enc}\Rightarrow B\oint ds=B(۲\pi r)=\mu_\circ nI \;\;\Rightarrow\;\; B=\frac{\mu_\circ nI}{۲\pi r} \qquad (۱۱-۴۶)$$

در این رابطه n تعداد دورهای چنبره است. همان طور که دیده می‌شود میدان به صورت $1/r$ تغییرمی‌کند. پس داریم

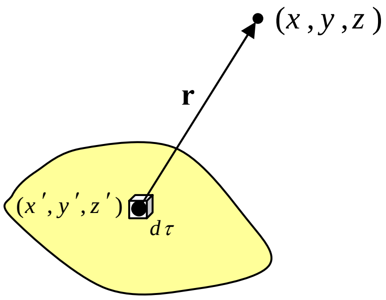
$$\mathbf{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_\circ nI}{۲\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} & \text{برای نقاط درون}\\ \circ & \text{برای نقاط بیرون}\end{cases} \qquad (۱۱-۴۷)$$

** واگرایی (دیورژانس) و تاو(کرل) میدان B

پیش از آنکه به مثال‌های دیگری بپردازیم، به جاست که واگرایی و تاو $\mathbf{B}$ را حساب کنیم. در بخش‌های پیش بدون این که به راستی آنها را حساب کنیم از آنها نام بردیم. این بخش برای پی‌گیری دنباله‌ی موضوع ضروری نیست و به این خاطر سربخش آن با (**) نشان شده است. اگر خواستید، می‌توانید از این بخش بگذرید. به گیری موضوع آسیب نخواهد رسید.
قانون بیو – ساوار در حالت عمومی برای چگالی حجمی جریان به صورت زیر است

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int\frac{\mathbf{J}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^{۲}}d\tau \qquad (۴۸)$$

از این رابطه میدان مغناطیسی در نقطه‌ی $P=(x,y,z)$ با انتگرال‌گیری روی چگالی جریان $\mathbf{J}(x',y',z')$ می‌توان به‌دست می‌آید. توجه کنید که چگالی جریان تابعی از مختصات (x',y',z') است اما نقطه‌ی میدان به مختصات (x,y,z) بستگی دارند. این دو مختصات در شکل (۳۰-۱۱) نشان داده شده اند.



شکل ۳۰- ۱۱مختصات چشمه و نقطه‌ی میدان

بردار مکان نسبی **r** عبارت است از

$$r=(x-x')\hat{\mathbf{i}}+(y-y')\hat{\mathbf{j}}+(z-z')\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۱-۴۹)$$

انتگرال رابطه‌ی (۴۸-۱۱) روی مختصات پرایم‌دار گرفته می‌شود و بنابراین $d\tau=dx'dy'dz'$ است. کرل و دیورژانس رابطه‌ی (۴۸-۱۱) نسبت به مختصات بدون پرایم حساب شوند. اگر از رابطه‌ی (۴۸-۱۱) دیورژانس بگیریم خواهیم داشت

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{\nabla}\cdot\left(\mathbf{J}\times\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)d\tau \qquad (۱۱-۵۰)$$

اگر از اتحاد برداری زیر

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) \qquad (۱۱-۵۱)$$

استفاده کنیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\mathbf{J}\times\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)=\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{J}\right)-\mathbf{J}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) \qquad (۱۱-۵۲)$$

چون **J** به متغیرهای بدون پرایم (x,y,z) بستگی ندارد، $\vec{\nabla}\times\mathbf{J}=0$ است. از طرفی $\nabla\times\left(\hat{\mathbf{r}}/r^2\right)=0$است. در نتیجه، داریم

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad (۱۱-۵۳)$$

برای محاسبه‌ی کرل میدان مغناطیسی، $\nabla\times\mathbf{B}$، اگر قاعده‌ی برداری

$$\vec{\nabla}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\left(\mathbf{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\mathbf{A}-\left(\mathbf{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\mathbf{B}+\mathbf{A}\left(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{B}\right)-\mathbf{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right) \qquad (۱۱-۵۴)$$

را برای عبارت زیر انتگرال رابطه‌ی (۵۰-۱۱) به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\vec{\nabla}\times\left(\mathbf{J}\times\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)=\mathbf{J}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)-\left(\mathbf{J}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (۱۱-۵۵)$$

در رابطه‌ی (۵۵-۱۱) جمله‌هایی را که شامل مشتق **J** بودند، نوشته نشده اند. این جمله ها صفر اند، چون **J** به متغیرهای (x,y,z) بستگی ندارد. انتگرال جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (۵۵-۱۱) صفر م شود. جمله‌ی اول شامل دیورژانس $\hat{\mathbf{r}}/r^2$ است. محاسبه‌ی این دیورژانس به تابع دلتای دیراک می‌انجامد و داریم

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}=4\pi\,\delta^3(\mathbf{r}) \qquad (۱۱-۵۶)$$

و بنابراین به‌دست می‌آید

$$\vec{\nabla}\times\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathbf{J}(\mathbf{r}')4\pi\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\tau'=\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r}) \qquad (۱۱-۵۷)$$

که همان رابطه‌ی (۹-۱۱) است و نشان می‌دهد که درستی رابطه‌ی (۹-۱۱) فقط به سیم جریان راست محدود نیست، بلکه به‌طور کلی در مغناطوستاتیک برقرار است.

الکترودینامیک

۱- قانون اهم

میدان های الکتریکی و مغناطیسی که تاکنون بررسی کردیم به ترتیب بر اثر بارهای *ساکن* و بارهای متحرک (جریان پایا) تولید می شدند. موضوع های مربوط به آنها را *الکتروستاتیک* و *مغناطوستاتیک* نامیدیم. ساکن بودن بار الکتریکی و پایا بودن جریان را می‌توان کلی تر از این بیان کرد: هر گاه چگالی بار ρ و چگالی جریان $\mathbf{J}$ به زمان وابسته نباشند الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک داریم. به هر حال صفحه‌ای با بار الکتریکی یکنواخت اگر بچرخد همان میدان الکتریکی را تولید می‌کند که اگر از چرخش باز ایستد. یعنی، تا وقتی که چگالی توزیع بار به زمان وابسته نباشد اگر بارها حرکت هم بکنند، قانون‌هایی را که تاکنون در باره‌ی الکتروستاتیک (با بارهای ساکن) پرورانده ایم هنوز هم برقرار اند. تنها یک قانون در الکتروستاتیک وجود دارد که **فقط** هنگامی درست است که در واقع بارها باید ساکن باشند. به یاد بیاورید که در الکتروستاتیک گفتیم میدان الکتریکی در درون رسانا صفر است. این قانون تنها هنگامی برقرار است که بارها ساکن باشند. دلیلی که برای آن آوردیم از این قرار بود که اگر میدان در درون رسانا *صفر نباشد*، بارهای آزاد در رسانا شارش پیدا می کنند. بنابراین، اگر بارها ساکن باشند، میدان $\mathbf{E}$ هم باید صفر باشد. حال اگر اجازه دهیم جریانی پایا در رسانا برقرار باشد، این دلیل دیگر درست نیست و $\mathbf{E}$ هم لازم نیست که در درون رسانا صفر باشد.

برای این که بارها را در رسانا به حرکت وادار کنیم باید به آنها نیرو وارد کنیم. سرعت حرکت بارها در رسانا ، (یا جریان) ، در واکنش به این نیرو ، به نوع رسانا بستگی دارد. در بیشتر رسانا ها چگالی جریان $\mathbf{J}$ با نیروی وارد به بار واحد متناسب است و می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f} \qquad (۱)$$

σ ضریب تناسب است و **رسانندگی** الکتریکی نام دارد. مقدار آن برای مواد گوناگون متفاوت است. وارون آن ، $\rho \equiv 1/\sigma$، را مقاومت ویژه می نامند. توجه کنید که حتی نارسانا ها هم اندک رسانندگی دارند. رسانندگی موادی که آنها را رسانا می نامیم، در مقایسه با نارساناها از مرتبه ی 10^{22} است.

نیرویی که ممکن است به بار الکتریکی وارد شود و آن را به حرکت وادارد و در نتیجه جریان تولید کند، می تواند هر نیرویی باشد. اما برای منظور ما این نیرو همواره نیروی الکترومغناطیسی خواهد بود. در این صورت رابطه ی (۱) به صورت زیر در می آید

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (۲)$$

سرعت بارها معمولا بسیار کم است و می توان از جمله ی دوم چشم پوشی کرد (با وجود این، در محیط های پلاسما، میدان مغناطیسی سهم مهمی در $\mathbf{f}$ بازی می کند). رابطه ی (۲) به صورت زیر در می آید

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad (۳)$$

و **قانون اهم** نام دارد. به سادگی می توان قانون اهم، رابطه ی (۳) ، را برای رساناها در شکل آشناتر آن ، $V = IR$، نوشت . رسانایی به شکل سیم راست با طول ℓ و سطح قاعده ی A را در نظر بگیرید که از آن

جریان I می گذرد. چگالی جریان در سیم با رابطه ی $J=I/A$ به جریان I مربوط است. میدان الکتریکی ثابت E در رسانا و اختلاف پتانسیل دو سر سیم، V، هم با رابطه ی $E=V/\ell$ به هم مربوط اند. اگر این کمیت ها را در رابطه ی (۳) قرار دهیم خواهیم داشت

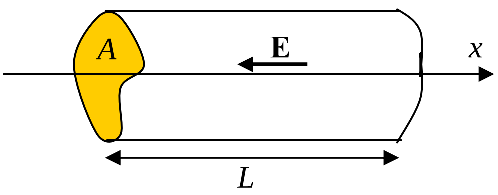
$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E} \Rightarrow \quad (I/A)=\sigma(V/\ell) \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{I}=\frac{\ell}{\sigma A}\equiv R \Rightarrow \quad V=IR \tag{٤}$$

مقاومت R پارامتری برای مشخصه ی رسانا ست و یکای آن در دستگاه یکاهای SI ، عبارت است از

$$Ohm\,(\Omega)=\frac{Volt}{ampere} \tag{٥}$$

رسانندگی را معمولا برحسب $(\Omega\cdot m)^{-1}$ بیان می کنند. مقادیر σ برای مواد شناخته شده بسیار متفاوت است: برای ابررسانا مقدار آن بینهایت ؛ برای فلزها $\sigma\approx 10^{8}(\Omega\cdot m)^{-1}$ و برای رساناهای ضعیف مانند شیشه از مرتبه ی $\sigma\approx 10^{-12}(\Omega\cdot m)^{-1}$ است. مواد با رسانندگی ضعیف را دی الکتریک یا نارسانا می نامند

مثال ۱– سیم استوانه ای شکل (۱) با سطح مقطع A و طول L از رسانایی با رسانندگی σ ساخته شده است (توجه کنید که لازم نیست سطح مقطع سیم دایره باشد، اما در طول سیم باید همواره *یکنواخت* باشد). اگر اختلاف پتانسیل دو سر سیم V باشد، چه جریانی از آن می گذرد؟

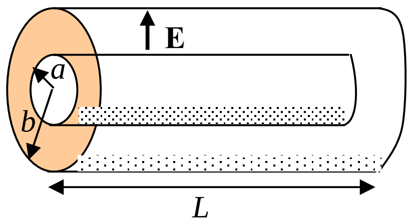


شکل ۱– سیم رسانا به طول L

حل: فرض کنید میدان در درون رسانا یکنواخت است (این فرض درستی است و با استفاده از معادله ی لاپلاس می توان آن را ثابت کرد.) بنابراین، از رابطه ی (۳) ننتیجه می کیریم که چگالی جریان هم یکنواخت است. پس:

$$I=JA=\sigma EA=\sigma A(V/L) \tag{٦}$$

مثال ۲– دو استوانه ی هم محور: دو استوانه ی هم محور شکل (۲) را در نظر بگیرید. شعاع استوانه ی درونی a و شعاع استوانه ی بیرونی b است. فضای بین این دو استوانه از ماده ای با رسانندگی σ انباشته شده است. اگر اختلاف پتانسیل بین استوانه ها V باشد، در طول L این آرایه چه جریانی از یک استوانه به استوانه ی دیگر جریان پیدا می کند؟



شکل ۲– دو استوانه ی هم محور

حل: فرض کنید چگالی بار خطی در روی استوانه ی درونی λ است. میدان در فضای بین دو استوانه را می توان از قانون گوس به دست آورد. داریم

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}} \tag{٧}$$

بنابراین، از قانون گوس (انتگرال گیری روی سطحی که استوانه ی درونی را در برداشته باشد) داریم

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \sigma \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sigma \frac{1}{\varepsilon_0} \lambda L \tag{۸}$$

در تساوی آخر قانون گوس به کار برده شده است. از سوی دیگر، اختلاف پتانسیل بین استوانه ها عبارت است از

$$V = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{l} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ell n\left(b/a\right) \tag{۹}$$

اگر از رابطه ی (۹) استفاده کنیم و λ را برحسب پتانسیل بنویسیم و در رابطه ی (۸) قرار دهیم ، خواهیم داشت

$$I = \frac{2\pi\sigma L}{\ell n\left(b/a\right)} V \tag{۱۰}$$

این مثال نشان می دهد که مقاومت آرایه عبارت است از

$$R = \frac{\ell n\left(b/a\right)}{2\pi\sigma L} \tag{۱۱}$$

ضریب ثابت R همانگونه که دیده می شود فقط تابعی از هندسه و پیکربندی و نوع محیط است که الکترودها را به هم وصل می کند. توجه کنید که تناسب بین پتانسیل V و جریان I نتیجه ی رابطه ی (۳) است. اگر بخواهیم پتانسیل را دو برابر کنیم، بار الکتریکی را همه جا دو برابر می کنیم و این کار سبب دو برابر شدن میدان $\mathbf{E}$ می شود. بنابه رابطه ی (۳) دوبرابر شدن $\mathbf{E}$ چگالی جریان $\mathbf{J}$ را و بنابراین جریان I را دو برابر می کند.

اگر جریان در رسانا پایا و رسانندگی آن یکنواخت باشد، آنگاه داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{۱۲}$$

و در نتیجه بنا به رابطه ی پیوستگی چگالی بار در رسانا صفر است. بارهای اضافی باید در سطح رسانا قرار داشته باشند. این نتیجه را پیش تر هم برای وضعیتی که بارها ساکن بودند، با استفاده از واقعیت $\mathbf{E} = 0$ ثابت کرده بودیم؛ حالا می بینیم که اگر بارها حرکت هم بکنند درست است. این بدان معنی است که قانون لاپلاس در درون رسانا هم درست است.

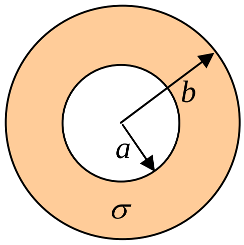
مثال ۳- دو پوسته‌ی کروی هم مرکز: فضای میان دو پوسته ی کروی هم مرکز به شعاع های a و b همانند شکل (۳) با ماده ی با رسانندگی ضعیف σ انباشته شده است.

(الف): اگر اختلاف پتانسیل این دو پوسته V باشد، چه جریانی از یک پوسته به دیگری شارش می کند؟

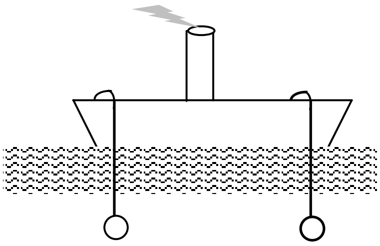
(ب): مقاومت بین انها چیست؟

(پ): توجه کنید که اگر شعاع پوسته ی بیرونی در مقایسه با شعاع پوسته ی درونی خیلی بزرگ باشد، $b \gg a$ آنگاه شعاع b مهم نخواهد بود. با توجه به این موضوع، اگر دو کره ی فلزی هر کدام به شعاع a را

همانند شکل (٤) از دو انتهای یک کشتی در آب اقیانوس فرو ببریم و پتانسیل بین آنها را در V نگه داریم ،



شکل ٣- دو کره ی هم مرکز


شکل ٤- دو گوی در آب دریا

چه جریانی بین آنها برقرار خواهد شد. (از این آرایه می توان برای اندازه گیری رسانندگی آب دریا استفاده کرد. در زمین شناسی و کاوش های کانی مانند آب و نفت نیز از این روش استفاده می شود.)

حل: **الف** این سامانه یک خازن کروی نشتی است. بار موجود در روی پوسته ی درونی را Q بنامید. میدان الکتریکی در فضای بین دو پوسته عبارت است از $\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ و بنابراین برای اختلاف پتانسیل داریم

$$(V_a-V_b)=-\int_b^a E\cdot d\,\hat{\mathbf{r}}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \qquad (١٣)$$

در نتیجه:

$$I=\int\mathbf{J}\cdot d\,\mathbf{a}=\sigma\int\mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{a}=\sigma\left(Q/\varepsilon_0\right)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{4\pi\varepsilon_0(V_a-V_b)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=4\pi\sigma\frac{(V_a-V_b)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \qquad (١٤)$$

(**ب**): مقاومت را از رابطه ی $V=IR$ به دست می آوریم و داریم

$$R=\frac{V_a-V_b}{I}=\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \qquad (١٥)$$

از این رابطه دیده می شود که برای $b\gg a$ جمله ی دوم درون پرانتز کوچک و قابل چشم پوشی و $R=1/4\pi\sigma a$ می شود که مقاومت مربوط به یک پوسته ی کروی است.

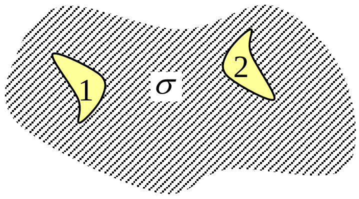
(پ): با توجه به نتیجه ی بخش (ب) برای دو کره ی غوطه ور در آب $R=2/4\pi\sigma a=1/2\pi\sigma a$ است (یک R مقاومتی است که در برابر نشت جریان از یک کره نمود پیدا می کند و یک R مقاومتی است که کره ی دوم در برابر ورود جریان از خود نشان می دهد). بنابراین، $I=V/R=2\pi\sigma aV$

مثال ۴- ظرفیت و مقاومت بین دو رسانا: دو جسم فلزی برابر شکل (٥) در محیطی با رسانندگی ضعیف σ قرار دارند. (**الف**): نشان دهید که بین مقاومت R و ظرفیت C این آزایع رابطه ی زیر برقرار است

$$R=\frac{\varepsilon_0}{\sigma C} \qquad (١٦)$$

(**ب**): این دو جسم را به یک باتری وصل و آنها را باردار می کنیم تا اختلاف پتانسیل بینشان به V_0 برسد و سپس باتری را قطع می کنیم. بارها نشت خواهند کرد. نشان دهید که $V(t)=V_0e^{-t/\tau}$ و" ثابت زمانی " τ

رابرحسب σ و ε_0 بیابید.



شکل ۵- دو جسم فلزی در محیط رسانا

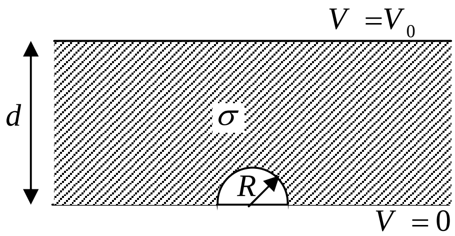
حل: الف- $I=\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}$ و انتگرال را روی سطحی می گیریم که رسانای با بار مثبت را در بر داشته باشد. اما $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ و $V=IR$. بنابراین $I=(\sigma/\varepsilon_0)CIR$ و یا $R=\dfrac{\varepsilon_0}{\sigma C}$

(ب): داریم

$$Q=CV=CIR \Rightarrow \frac{dQ}{dt}=-I=-\frac{1}{RC}Q \Rightarrow Q(t)=Q_0e^{-t/RC} \tag{۱۷}$$

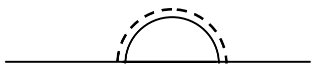
چون $V=Q/C$، بنابراین $V(t)=V_0e^{-t/RC}$ و ثابت زمانی $\tau=RC=\varepsilon_0/\sigma$ است.

مثال ۵- دو صفحه و یک نیم کره: دو صفحه ی فلزی بسیار بزرگ برابر شکل (٦) به فاصله ی d از یکدیگر قرار دارند. صفحه ی بالایی در پتانسیل ثابت V_0 است و صفحه ی دیگر در پتانسیل صفر است. کره ای فلزی به شعاع R $(R \ll d)$ را دو نیم می کنیم و یکی از نیم کره ها را روی صفحه ای که در پتانسیل صفر است قرار می دهیم. بنابراین ، نیم کره هم در پتانسیل صفر قرار دارد. فضای بین صفحه ها با ماده ی با رسانندگی ضعیف σ انباشته شده است. چه جریانی به سوی نیم کره شارش پیدا می کند؟ (*راهنمایی:* یافتن بار الکتریکی σ_e موجود در روی نیم کره نیازمند حل معادله ی لاپلاس با شرایط مرزی است. فرض کنید $\sigma_e=3\varepsilon_0E_0\cos\theta$ است و E_0 میدان الکتریکی در فضای بین دو صفحه است.)

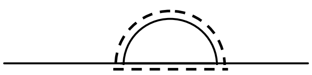


شکل ٦- دو صفحه و یک نیم کره

حل: داریم $I=\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}=\sigma\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$ و انتگرال روی سطحی گرفته می شود که درست نیم کره را برابر شکل (۷) در بر دارد. اما می توانیم آن را همانند شکل (۸) به سطح بسته تبدیل کنیم، چون در فضای بیرون



شکل ۷- سطح انتگرال گیری



شکل ۸- سطح انتگرال گیری

صفحه ها $E=0$ است . بنابراین می توانیم بنویسیم

$$I=\sigma\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}Q_{enc.}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int \sigma_e da=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}3\varepsilon_0E_0\int \cos\theta R^2\sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow I=3\sigma E_0R^2 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta=3\sigma E_0R^2 2\pi\left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=3\sigma E_0\pi R^2 \tag{۱۸}$$

از طرفی $E_0=V_0/d$ است چون میدان در آغاز یکنواحت بود. پس:

$$I=\frac{3\sigma\pi V_0R^2}{d} \tag{۱۹}$$

قانون اهم یکی از پر کاربردترین قانون های فیزیک است. قانون اهم رابطه ای خطی بین چگالی جریان و نیرو (یا میدان) است. به سبب وارد شدن نیروی qE به بار q ، جریانی یکنواخت تولید می شود. چرا باید این قانون درست باشد؟ اگر فکرش را بکنید، میدان $\mathbf{E}$ نیروی $q\mathbf{E}$ به بار الکتریکی q وارد می کند. قانون دوم نیوتون می گوید بار q باید شتاب داشته باشد . اگر بار q شتاب داشته باشد پس چرا چگالی جریان با زمان افزایش نمی یابد؟ برعکس، قانون اهم می گوید میدان ثابت سرعت ثابت تولید می کند. آیا تناقضی بین قانون اهم و قانون نیوتون وجود دارد؟ البته تناقضی وجود ندارد زیرا با حرکت الکترون ها در سیم، آنها برخوردهای زیادی با اتم های محیط انجام می دهند و برای به دست آوردن تصویری درست از وضعیت باید نقش این برخوردها را به حساب آورد. در فاصله ی بین دو برخورد پی در پی البته الکترون شتابیده می شود اما پس از هر برخورد الکترون باید حرکت شتاب دار خود را از نو آغاز کند. بنابراین، اگرچه الکترون همواره شتاب دارد، اما سرعت میانگین آن مقدار ثابتی است. اگر فاصله ی بین دو برخورد را λ و شتاب را a بنامیم، زمان لازم برای پیمودن مسافت بین دو برخورد پی در پی $t=\sqrt{2\lambda/a}$ می شود و سرعت میانگین عبارت می شود از

$$v_{ave}=\frac{1}{2}at=\sqrt{\lambda a/2} \tag{۲۰}$$

اما این محاسبه هم به درد نمی خورد زیرا بر اساس آن سرعت با جذر شتاب متناسب است و بنابراین ، برای الکترون های رسانا هم جریان باید با جذر میدان متناسب باشد! پس داستان به این سادگی نیست و چیزی را ما فراموش می کنیم. واقعیت این است که بارها ی رسانا به خاطر انرژی گرمایی که دارند، با سرعت زیاد حرکت می کنند. اما سرعت حاصل از این انرژی گرمایی کاتوره ای است و در جهت های تصادفی انجام می گیرد ومیانگین آن صفر است. سرعت" سوق" یا سرعت "رانش" که ما به دنبال آنیم سرعت اندکی افزون براین سرعت گرمایی است. یعنی، زمان بین دو برخورد پی درپی بسیار کوتاه تر از آن است که ما در بالا حساب کردیم و برابر است با $t=\lambda/v_{thermal}$ که در آن $v_{thermal}$ سرعت گرمایی حاصل از انرژی گرمایی الکترون هاست. بنابراین به جای رابطه ی (۲۰) باید داشته باشیم

$$v_{ave}=\frac{1}{2}at=\frac{a\lambda}{2v_{thermal}} \tag{۲۱}$$

اگر تعداد مولکول ها در واحد حجم رسانا N باشد وبه ازای هر مولکول f الکترون آزاد در رسانا وجود داشته باشد و بار هر الکترون q و جرمش m باشد، آنگاه چگالی جریان عبارت است از

$$\mathbf{J}=Nfq\,\mathbf{v}_{ave}=\frac{fNq\lambda}{2v_{thermal}}\frac{\mathbf{F}}{m}=\left(\frac{fN\lambda q^2}{2mv_{thermal}}\right)\mathbf{E} \tag{۲۲}$$

اگر چه رابطه ی بالا به طور کلاسیک به دست آمد و رفتار مولکول از فیزیک کلاسیک پیروی نمی کند، با وجود این، رابطه ی (۲۲) نشان می دهد که چگالی جریان و میدان ، همانند قانون اهم ، به طور خطی به هم مربوط اند. کمیت درون پرانتز رسانندگی است (در اینجا ادعا نمی کنیم که این کمیت دقیق محاسبه شده است. در واقع ما اثر های کوانتومی را در نظر نگرفته ایم. با این حال نشان می دهد که رسانندگی به درستی

با چگالی بارهای متحرک متناسب است).

کار میدان الکتریکی برای جابه جایی بار q_i به اندازه ی $d\mathbf{r}_i$ عبارت است از

$$dW_i = q_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i)\cdot d\mathbf{r}_i \tag{۲۳}$$

برای سامانه ای از بارها، توان کل انتقال یافته به بارها برای جابه جایی $d\mathbf{r}_i$ عبارت است از

$$\begin{aligned} P &= \frac{dW}{dt} = \sum_i q_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i)\cdot\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_i q_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{v}_i \\ \Rightarrow P &= \int \mathbf{E}(\mathbf{r}_i)\cdot\rho(\mathbf{r})\mathbf{v}d\tau = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{J}\,d\tau = \sigma\int E^2 d\tau \end{aligned} \tag{۲۴}$$

چون می توانیم بنویسیم $\mathbf{J}d\tau = Id\mathbf{r}$ بنابراین ، تساوی سوم سطر دوم را در رابطه ی بالا می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$P = \int I\,\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = I\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -I(V_2 - V_1) \equiv IV \tag{۲۵}$$

حال با استفاده از قانون اهم، $V = IR$ ، توان به صورت زیر در می آید

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} \tag{۲۶}$$

این رابطه **قانون گرمایی ژول** است. یکای توان وات (ژول بر ثانیه) است.

چگالی بار $\rho(\mathbf{r},t)$ و چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ با رابطه ی پیوستگی به هم مربوط اند

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{۲۷}$$

برای جریان های پایا، یعنی در هرنقطه ی فضا ، ρ و $\mathbf{J}$ به زمان وابسته نباشند، داریم

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \tag{۲۸}$$

۲- الکتریسیته‌ی جو:

در جو زمین فعالیت های گسترده‌ی الکتریکی روی می دهد. در مقایسه با هوا، زمین رسانای خوبی است. رسانندگی هوا در سطح دریا حدود $3\times10^{-14}(\Omega.m)^{-1}$ است. هوا عایق بسیار خوبی است؛ اما با توجه به ابعاد عظیم زمین و اختلاف پتانسیل آتمسفری زیاد، جریان های چشم گیری ممکن است پدید آید. برای این که بتوانیم احساسی نسبت به رسانندگی هوا به دست آوریم، نخست کره ی رسانایی به شعاع a را در نظر بگیرید که با ماده ای با رسانندگی σ پوشانده شده است. میدان الکتریکی درست در بیرون کره عبارت است از $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$ و بنابراین چگالی جریان حاصل، $J = \sigma E$ است. جریان کل که از کره به بیرون نشت می کند برابر است با

$$I = -\frac{dQ}{dt} = JA = \sigma E\left(4\pi a^2\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}Q \tag{۲۹}$$

این معادله ی دیفرانسیل را می توان به سادگی حل کرد. پاسخ عبارت است از

$$Q(t) = Q(0)e^{-t/(\varepsilon_0/\sigma)} \tag{۳۰}$$

رسانندگی در سطح دریا $3\times10^{-14}(\Omega.m)^{-1}$ است و بنابراین ثابت زمانی ε_0/σ نشت بار برابر است با

$$\frac{\varepsilon_0}{\sigma} \approx \frac{9\times 10^{-12}}{3\times 10^{-14}} \approx 300\sec \approx 5\min. \qquad (۳۱)$$

یعنی در بازه ی زمانی پنج دقیقه ، بار الکتریکی از هر رسانایی که با هوا احاطه شده باشد نشت خواهد کرد و به هندسه ی رسانا هم بستگی ندارد.

رسانندگی جو به خاطر وجود یون هایی است که در میدان الکتریکی حرکت می کنند. این یون ها را پرتوزایی طبیعی زمین و تابش های کیهانی یوننده به وجود می آورند. آلاینده های صنعتی از رسانندگی هوا می کاهند چون یون ها به آلاینده ها می چسبند و تحرک حامل های بار را کم می کنند.

در سال های نخستین سده ی بیست ، تجربه دان ها دریافتند که رسانندگی هوا با ارتفاع از زمین افزایش پیدا می کند. امروز می دانیم که تغییرات رسانندگی با ارتفاع به تقریب عبارت است از

$$\sigma(h) = \left(3.0 + 0.5h^2\right)\times 10^{-14}\,(\Omega.m)^{-1} \qquad (۳۲)$$

که در آن h ارتفاع از سطح دریا برحسب کیلومتراست. در $h = 50\,km$ رسانندگی ٤٠٠ برابر رسانندگی در سطح دریا ($h = 0\,km$) است و ثابت زمانی رسانندگی به کمتر از یک ثانیه می رسد. افزایش رسانندگی تا پیش از کشف پرتوهای کیهانی یکی از شگفتی ها بود.

یکی دیگر از واقعیت ها در باره ی الکتریسیته ی جو این است که در نزدیکی های سطح زمین میدان الکتریکی حدود $E \approx 100V/m$ و به سوی زمین وجود دارد. این میدان در اثر تندبادها و آذرخش ها پدید می آید. چون رسانندگی زمین ($3\times 10^{-14}(\Omega.m)^{-1}$) در مقایسه با رسانندگی هوا زیاد است، می توان زمین را یک سطح هم پتانسیل فرض کرد. چگالی بار القایی که این میدان الکتریکی در زمین ایجاد می کند عبارت است از

$$\sigma_e = \varepsilon_0 E \approx -(10^{-11})(10^2) = -10^{-9}\ C/m^2 \qquad (۳۳)$$

این چگالی بار سطحی البته بسیار اندک است اما اگر تمامی سطح زمین را در نظر بگیریم بار کل در سطح زمین به مقدار $Q_E = 4\pi R_E^2 \sigma_e \approx -500000\ C$ می رسد. شاید شگفت زده شوید که چرا با میدان این بار عظیم برق ما را نمی گیرد! دلیلش این است که رسانندگی هوا کم است و جریان بسیار اندکی شارش پیدا می کند .

با توجه به میدان الکتریکی در نزدیکی های سطح زمین، جریان به سوی زمین شارش می یابد. چگالی جریان در سطح زمین عبارت است از

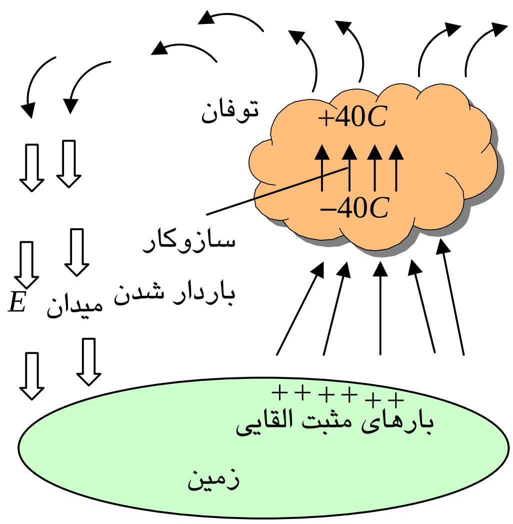
$$J = \sigma E = \left(3\times 10^{-14}\right)\left(100\right) = 3\times 10^{-12}\ A/m^2 \qquad (۳٤)$$

اگر از این چگالی جریان روی سطح رمین انتگرال بگیریم، جریان کلی که به سوی زمین شارش می کند، به دست می آید:

$$I = J\,(4\pi R_E^2) \approx 1500\,A \qquad (۳٥)$$

میدان الکتریکی در نزدیکی سطح زمین پیوسته باز تولید می شود. اگر سازوکار بازتولید این میدان مجود نمی داشت، این میدان در ٥ دقیقه از بین می رفت. فعالیت های مربوط به تندبا د ها سازوکار بازتولید این میدان اند. به طور میانگین، در هر زمان حدود ٢٠٠٠ فعالیت تندباد در جریان است. هر توفان، جریانی حدود یک آمپر تولید می کند که جهتش از زمین به لایه های فوقانی جو است. در مقیاس جهانی این شارش با

جریان روبه پایین (که در بالا توضیح دادیم) متوازن می شود. این فرایند در شکل (۹) نشان داده شده است. جریان رو به بالا با پروازهایی در بالای ابرهای توفان را اندازه گیری شده است. جریان رو به بالا(از سطح زمین به بخش زیرین ابر توفان زا) را میدان الکتریکی رو به بالا از مرتبه ی $10kV/m$ بین ابر و زمین سبب می شود. بخش بزرگی از این جریان یک آمپر به بخش زیرین ابر توفان زا جریان می یابد. منشاء جزئی ، اما چشمگیر جریان رو به بالا جرقه ی بین ابر و زمین است. تک آذرخش می تواند $10C$ الکترون را در $50\mu s$ به زمین منتقل کند اما همین آذرخش بطور میانگین یک دهم آمپر جریان به بالا منتقل می کند. در ابر توفان زا بارهای مثبت و منفی از یکدیگر جدا می شوند. معمولا حدود $40C$ در بالا و حدود $-40C$ در پایین ابر . سازوکار جدا شدن بارها به خاطر این است که قطره های کوچک آب یا قطعه های ریز یخ بار مثبت دارند. این ذره های کوچک که آهنگ افتادنشان در هوای آرام کم است در ابرتوفان زا به بالا برده می شوند. هنوز دلیل رابطه ی بین اندازه و بار را نمی دانیم. اما می دانیم که این جدایی بارها در ابر توفان را میدان الکتریکی به وجود می آورد و سبب می شود که جریان از زمین به بخش زیرین ابر شارش پیدا کند.



شکل ۹- باردار شدن جو به وسیله ی توفان

مثال ۶- الکتریسیته جو: با استفاده از رسانندگی هوا و میدان $E=100V/m$ در سطح زمین، اختلاف پتانسیل بین سطح زمین و ارتفاعی را پیدا کنید که در آن ارتفاع رسانندگی بسیار بزرگ تر از رسانندگی در سطح زمین است. زمین را به طور موضعی تخت فرض کنید

حل: چون زمین را تخت فرض می کنیم، بنابراین چگالی جریان ثابت است و داریم

$$\sigma(h)=(3.0+0.5h^2)\times10^{-14}\,(\Omega.m)^{-1}$$

$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}\Rightarrow E=\frac{1}{3.0+0.5h^2}$$

$$E(h=0)=100V/m\Rightarrow E=-\frac{300V/m}{3.0+0.5(10^{-6})h^2}$$

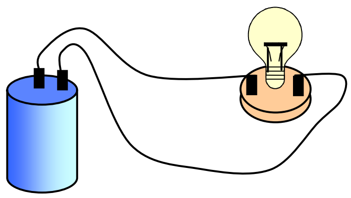
$$\Delta V=-\int_0^h \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^h\frac{6\times10^8dh}{6\times10^6+h^2}=\frac{6\times10^8}{\sqrt{6\times10^6}}\tan^{-1}\frac{h}{\sqrt{6\times10^6}} \qquad (۳۶)$$

اگر $h\gg\sqrt{6\times10^6}m\approx2.5km$ باشد ، آنگاه

$$\Delta V\rightarrow\frac{6\times10^8}{\sqrt{6\times10^6}}\frac{\pi}{2}=385kV \qquad (۳۷)$$

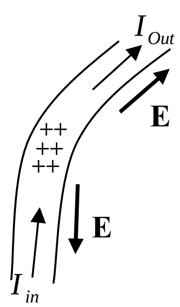
۳- نیروی محرکه

برای این که بارها ی الکتریکی را در یک رسانا به حرکت وادار کنیم، به نیرو نیاز داریم. این نیرو در عمومی ترین شکل با قانون اهم بیان می شود: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f}$ که در آن $\mathbf{f}$ نیروی وارد به بار واحد است. در مدار الکتریکی ساده شکل (۱۰) که از یک باتری و یک لامپ تشکیل شده است، آنگاه این پرسش پیش می آید که چون نیروی پیش برنده به درون باتری محدود است (فرایندی شیمیایی که بارهای مثبت و منفی را به سویی می راند) پس چرا جریان همواره در همه جای این مدار یکسان است؟ چرا جریان در باتری ۲/۳ آمپر و در لامپ ۰/۷ آمپر نیست؟ در بیرون از باتری و در سیم عاملی دیده نمی شود که بارها را به حرکت وادارد. افزون بر این، چرا در هر بخش سیم جریان یکسان است؟ فراتر از این، می دانیم که حرکت بارها در رسانا بسیار کند است ؛ پس چرا جریان در لامپ آنی است. تصورش را اگر بکنید، باید سال ها طول بکشد تا با روشن کردن کلید برق در تهران لامپی در شیراز روشن شود. حال آنکه این کار به تقریب آنی انجام می گیرد. بارها از کجا می فهمند که همگی باید در یک لحظه شروع به حرکت کنند؟



شکل ۱۰- یک مدار ساده

پاسخ این پرسش ها چندان دشوار نیست. اگر جریان در همه جای مدار یکسان نباشد (برای مثال در نخستین کسر ثانید درست پس از وصل کلید مدار) بارها باید در جایی بر روی هم انباشته شوند- نکته ی مهم هم در این جاست – جهت میدان الکتریکی بارهای انباشته شده چنان است که شارش بار را در همه جای مدار هموار و یکنواخت کند. فرض کنید جریان ورودی به قسمت خمیده ی شکل (۱۱) بزرگ تر از جریان خروجی از آن باشد. در این صورت، بارها در محل خمیدگی انباشته می شوند. میدان این بارها در جهت های برون سو از بار انباشته در ناحیه ی خمیدگی است. با جریان ورودی مخالفت و آن را کند می کند و به شارش جریان خروجی یاری می رساند تا آن را تسریع کند. این کار تا زمانی که این جریان ها برابر هم شوند ادامه می یابد. در این لحظه دیگر بار انباشته نمی شود و حالت ترازمندی برقرار می شود. این سازکار زیبایی است که به تصحیح خود به خود می انجامد تا جریان یکنواخت برقرا ر شود. این فرایندی بسیار سریع است و در نتیجه می توان فرض کرد که جریان در همه جای مدار یکسان است. نتیجه ی این فرایند این است که در واقع در یک مدار بسته دو نیرو جریان را در مدار جاری می کنند: یکی نیروی $\mathbf{f}_s$ است که معمولا به باتری محدود است و دیگری نیروی الکتروستاتیک است که به کار تنظیم جریان در بخش بیرونی مدار مشغول است و اثر چشمه یا باتری را به نقاط دوردست مدار می رساند. بنابراین داریم



شکل ۱۱- جریان های ورودی و خروجی

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E} \tag{۳۸}$$

عامل فیزیکی برای $\mathbf{f}_s$ هر چیزی می تواند باشد، در باتری نیروی شیمیایی است، در بلور فیزوالکتریک فشار مکانیکی است که به ضربه ی الکتریکی تبدیل می شود، در ترموکوپل گرمایی گرادیان دما این کار را انجام می دهد، در خانک فوتوالکتریک (چشم الکتریکی) نور این نقش را بر عهده دارد. این سازوکار هرچه باشد، اثر نهایی آن در انتگرال خطی $\mathbf{f}$ حول مدار خلاصه می شود:

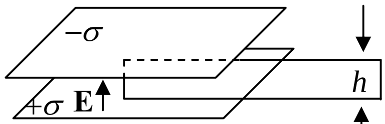
$$\oint \mathbf{f} \cdot d\,\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} + 0 \equiv \mathcal{E} \tag{۳۹}$$

$\mathcal{E}$ نیروی محرکه ی الکتریکی یا emf مدار نام دارد (این واژه ی ناپسندی است چون اصلا نیرو نیست بلکه حاصل انتگرال نیروی وارد به بار واحد است) و مقدار جریان در یک مدار را تعیین می کند

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{I}{a\sigma} dl = I \oint \frac{1}{a\sigma} dl = IR \tag{۴۰}$$

در این جا فرض کردیم که در هر نقطه ی مدار جریان به طور یکنواخت در سطح مقطع a سیم توزیع شده است. R مقاومت کل مدار است. از آنجایی که $\mathcal{E}$ انتگرال خط $\mathbf{f}_s$ است، می توان $\mathcal{E}$ را کار چشمه در واحد بار نیز تفسیر کرد. توجه بکنید که نیروهای الکتروستاتیک به تنهایی نمی توانند برای شارش جریان در مدار کافی باشند. چون برای میدان های الکتروستاتیک $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ است. در این رابطه وضعیت زیر را در نظر بگیرید که می تواند گمراه کننده باشد

مثال ۷- بخشی از یک حلقه‌ی مستطیل به پهنای h برابر شکل (۱۲) در فضای بین صفحه های خازن تخت قرار دارد. صفحه‌ی حلقه با میدان $E = \sigma_e / \varepsilon_0$ خازن موازی است. بخش بزرگی از حلقه بیرون از فضای خازن، جایی که میدان اساسا صفر است، قرار دارد. اگر مقاومت کل حلقه R باشد چه جریانی از آن می‌گذرد؟



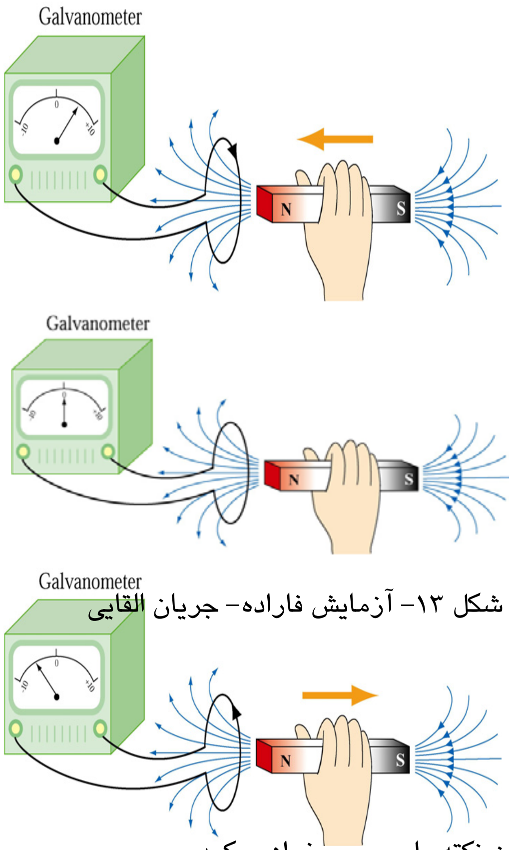
شکل ۱۲- حلقه در بین صفحه های خازن

حل: جریانی که از حلقه می گذرد صفر است. اما گمراه کنندگی در این است : به نظر می رسد باید داشته باشیم $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\sigma / \varepsilon_0)$. در واقع اگر به راستی میدان در فضای بین صفحه ها $E = \sigma_e / \varepsilon_0$ و در بیرون صفر می بود، همین نتیجه را هم می بایست داشته باشیم. اما واقعیت این است که همواره اثرهای لبه ای وجود دارد و به نظر می رسد که این اثر ها درست به مقداری است که سهم انتهای چپ حلقه در انتگرال $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ را خنثی می کند.

۴- نیروی محرکه‌ی حرکتی

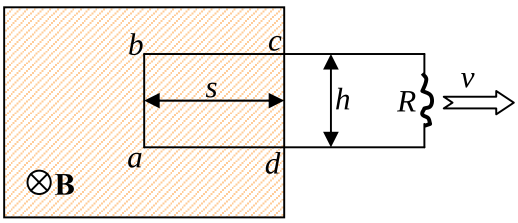
در بخش ۳ از باتری و چشمه های دیگر برای نیروی محرکه ی مدار نام بردیم. در اینجا به نوع دیگری از چشمه های نیروی محرکه می پردازیم. نیروی محرکه ای که در اثر جابه جایی سیمی در میدان مغناطیسی پدید می آید. به بیان دیگر، دیدیم که اگر به دو سر یک رسانا اختلاف پتانسیل اعمال کنیم و در رسانا میدان الکتریکی به وجود آوریم آنگاه در رسانا جریان تولید می شود و این جریان به نوبه ی خود میدان

مغناطیسی پدید می‌آورد. پرسش اینست که آیا می‌توان از میدان مغناطیسی هم میدان الکتریکی به وجود آورد؟ مایکل فاراده در سال۱۸۳۱ به این پرسش پاسخ داد. یکی از آزمایش‌های فاراده در شکل‌های (۱۳) نشان داده شده است. او با استفاده از یک حلقه و یا آهن‌ربای میله‌ای نشان داد که اگر آهن ربای میله‌ای نسبت به حلقه ساکن باشد، گالوانومتر عبور جریانی را نشان نمی‌دهد. اما اگر بین حلقه و آهن ربای میله‌ای حرکت نسبی وجود داشته باشد، جریانی در حلقه القاء می‌شود و گالوانومتر آن را نشان می دهد. به ویژه، با نزدیک شدن آهن‌ربا به حلقه عقربه‌ی گالوانومتر در یک سو و با دور شدن آهن‌ربا از حلقه، عقربه در سوی دیگر منحرف می‌شود. این آزمایش فاراده نشان می‌دهد که در اثر تغییر میدان مغناطیسی، در حلقه جریان الکتریکی القاء می شود. رفتار حلقه همانند این است که به یک نیروی محرکه وصل شده است. به طور تجربی دریافته شده که جریان القایی با آهنگ تغییر شار میدان مغناطیسی متناسب است. در این بخش جزییات این نکته را بررسی خواهیم کرد.



شکل ۱۳- آزمایش فاراده- جریان القایی

ناحیه‌ای از فضا را برابر شکل (۱٤) در نظر بگیرید . در این ناحیه میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ به سوی درون صفحه وجود دارد. اگر حلقه‌ی سیم مستطیل شکل با مقاومت R را با سرعت v به سمت راست حرکت دهیم به بارهای موجود در ضلع ab نیروی مغناطیسی qvB وارد می شود. جهت این نیرو از a به b است. این نیرو در حلقه جریان ساعتگرد تولید می کند. نیروی محرکه ی آن عبارت از



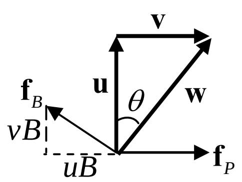
شکل ۱٤- حرکت حلقه در میدان $\mathbf{B}$ - نمای یک مولد

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_B \cdot d\mathbf{l} = vBh \tag{٤١}$$

که در آن h پهنای حلقه است. توجه کنید که ضلع‌های افقی سهمی در انتگرال ندارند؛ چون نیروی $\mathbf{f}_B$ بر bc و ad عمود است و به آن بخش از این ضلع‌ها که در بیرون میدان قرار دارند نیرو وارد نمی شود.

در این آرایه‌ی ساده ، ناسازه‌ی مهم و زیبایی نهفته است: اگرچه نیروی مغناطیسی $\mathbf{f}_B$ عامل ایجاد نیروی محرکه است، اما به یقین عامل انجام کار نیست؛ چون دیدیم که نیروی مغناطیسی هرگز کار انجام نمی‌دهد. کار را در اینجا کسی انجام می‌دهد که حلقه را به سوی راست حرکت می‌دهد. اما این فقط یک ادعاست و باید درستی آن را نشان داد. باید بتوانیم نشان دهیم که کار انجام شده به وسیله‌ی شخصی که حلقه را به سمت راست می‌کشد برابر است با vBh . این کار (یا اثبات ادعا) به اندکی حوصله نیاز دارد. در واقع، با

شارش جریان در حلقه، بارهای موجود در ضلع ab دو مولفه‌ی سرعت دارند یکی در راستای عمودی (در امتداد سیم ab) و دیگری مولفه‌ی سرعت افقی که بر اثر کشیده شدن سیم سوی به راست پدید می آید. اولی را $\mathbf{u}$ و دومی را $\mathbf{v}$ بنامید. بردار سرعت برآیند $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ است و در شکل (۱۵) نشان داده شده است. نیروی مغناطیسی وارد بر بار واحد $\mathbf{f}_B=\mathbf{w}\times\mathbf{B}$ است و یک مولفه ی با اندازه ی uB به سوی چپ دارد. مولفه ی دیگر آن vB و در راستای عمودی است. برای خنثی کردن مولفه ی افقی این نیرو، شخصی که حلقه را به راست می‌کشد باید نیرو در واحد باری برابر و به سوی *راست* به حلقه وارد کند



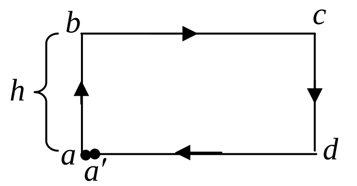
شکل ۱۵- مولفه های سرعت

$$f_P=uB \qquad (٤٢)$$

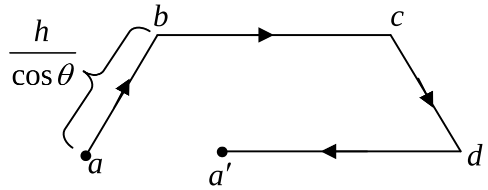
این نیرو توسط ساختار سیم به بار منتقل می شود. بنابراین، مسیر واقعی بار در راستای بردار $\mathbf{w}$ است و مسافتی را که می پیماید $h/\cos\theta$ است. پس ، کاری را که شخص انجام می دهد عبارت است از

$$\int \mathbf{f}_P\cdot d\mathbf{l}=(uB)\left(\frac{h}{\cos\theta}\right)\sin\theta=vBh \qquad (٤٣)$$

توجه کنید که $\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$ به خاطر ضرب داخلی است. می بینیم که کار انجام شده در واحد بار توسط شخص درست برابر نیروی محرکه است؛ اگرچه انتگرال گیری اینک روی مسیر کاملا متفاوتی انجام گرفته است. در شکل (١٦) مسیر انتگرال گیری برای نیروی محرکه ، رابطه ی (٤١) ، و در شکل (١٧) مسیر انتگرال گیری برای محاسبه ی کار شخص نشان داده شده اند.



شکل ١٦- مسیر انتگرال گیری برای $\mathcal{E}$



شکل ١٧- مسیر انتگرال گیری برای محاسبه ی کار

نکته ی مهم این است که $\mathbf{f}_P$ در نیروی محرکه نقشی ندارد، چون بر سیم عمود است و $\mathbf{f}_B$ سهمی در انجام کار ندارد چون بر حرکت بار عمود است.

روش زیبایی برای بیان نیروی محرکه ی تولید شده در حلقه وجود دارد. فرض کنید میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ همانند شکل (١٨) از سطح A می گذرد. بردار سطح عبارت است از $\mathbf{A}=A\hat{\mathbf{n}}$ که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه ی عمود بر سطح A است. شار مغناطیسی گذرنده از سطح به صورت زیر تعریف می شود

$$\Phi\equiv\int_A \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}=\int_A B\cos\theta\, da=BA\cos\theta \qquad (٤٤)$$

که در آن θ زاویه ی بین بردار یکه ی عمود بر سطح $\hat{\mathbf{n}}$ و میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ است. در سامانه ی یکاهای SI یکای Φ وبر (Wb) است:

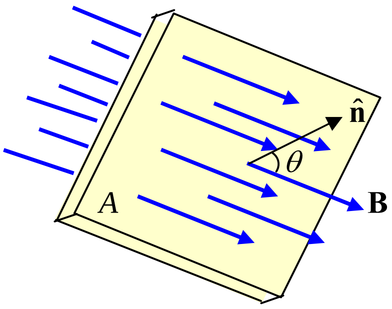
$$1\,Wb = 1\,T\cdot m^2 \tag{٤٥}$$

بنابراین ، شار گذرنده از سطح حلقه ی شکل (١٤) عبارت است از

$$\Phi = Bhs \tag{٤٦}$$

با حرکت حلقه به سوی راست، شار گذرنده از آن کاهش می یابد. آهنگ تغییر شار عبارت است از

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bh\frac{ds}{dt} = -Bhv \tag{٤٧}$$



شکل ١٨- شار مغناطیسی گذرنده از سطح A

علامت منها در رابطه ی بالا به این خاطر است که ds/dt منفی است. رابطه ی (٤٧) دقیقا نیروی محرکه ی رابطه ی (٤١) است. بنابراین می توان گفت که نیروی محرکه ی تولید شده در حلقه با منهای آهنگ تغییر شار گذرنده از حلقه برابر است.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{٤٨}$$

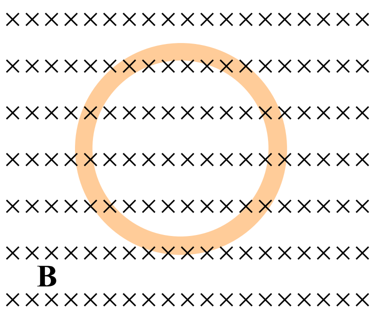
این قاعده ی شار برای نیروی محرکه ی حرکتی است. روشن است که برای حلقه ای با N دو ، نیروی محرکه ی القایی N برابر خواهد بود.

افزون بر سادگی رابطه ی (٤٨) ، می توان آن را برای هر حلقه با شکل های دلخواه که در میدان مغناطیسی نا یکنواخت و در جهت دلخواه حرکت می کند هم به کار برد. حتی لازم نیست که شکل حلقه بدون تغییر بماند. این گزاره را با توجه به رابطه های (٤٤) و (٤٨) می توان به صورت زیر بیان کرد.

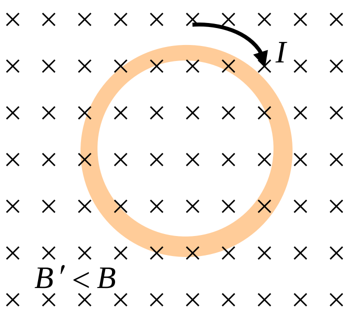
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(BA\cos\theta\right) = -\left(\frac{dB}{dt}\right)A\cos\theta - B\left(\frac{dA}{dt}\right)\cos\theta + BA\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \tag{٤٩}$$

بنابراین دیده می شود که به روش های زیر می توان نیروی محرکه در مدار القاء کرد:

(الف): با تغییر میدان مغناطیسی **B** نسبت به زمان؛ همانند شکل (١٩)

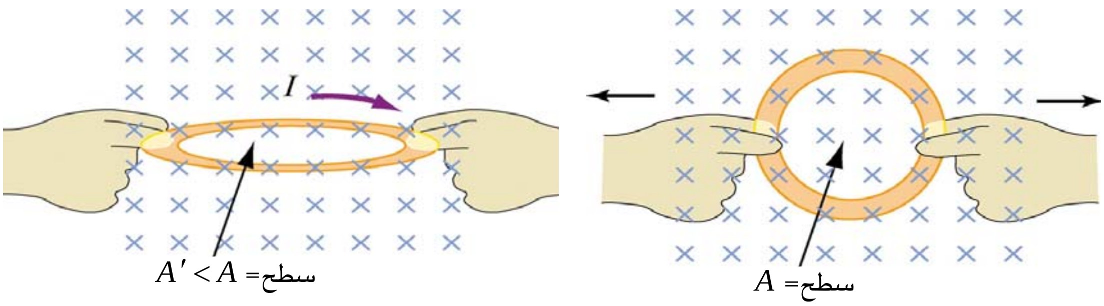


شکل ١٩- الف: حلقه د ر میدان **B**



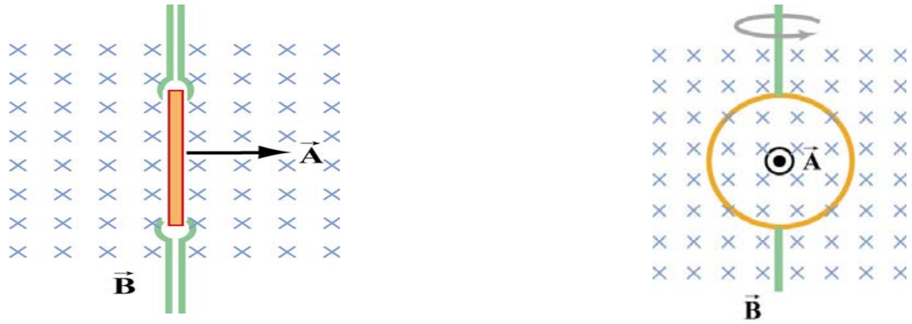
شکل ١٩- ب: جریان القایی با تغییر شدت میدان

ب: با تغییر اندازه ی **A**؛ یعنی تغییر سطح حلقه نسبت به زمان، همانند شکل (٢٠)



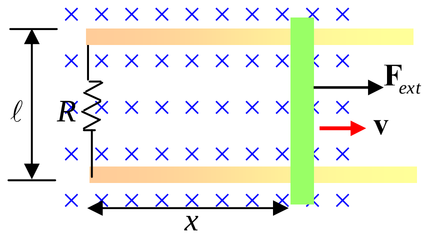
شکل ۲۰- القاء نیروی محرکه با تغییر دادن

پ: با تغییر دادن زاویه ی بین میدان $\mathbf{B}$ و بردار سطح $\mathbf{A}$، همانند شکل (۲۱)



شکل ۲۱- القاء نیروی محرکه به حلقه با تغییر دادن زاویه ی بین $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$

مثال ۸- میله ی فلزی به جرم m برابر شکل (۲۲) بر روی دو ریل رسانا ی موازی و به فاصله ی ℓ از هم می لغزد. مقاومت R انتهای ریل ها را به هم وصل می کند. این مجموعه در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = -B\,\hat{\mathbf{k}}$ به سوی درون صفحه قرار دارد.



شکل ۲۲- میله ی رسانا بر روی دو ریل

(الف): با نیروی خارجی $\mathbf{F}_{ext}$ میله را با سرعت ثابت $\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{i}}$ به راست حرکت می دهیم. چه جریانی و در چه جهتی در مقاومت شارش پیدا می کند؟

(ب) : نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_B$ وارد به میله را حساب کنید.

(پ): نیروی خارجی $\mathbf{F}_{ext}$ را به دست آورید. این نیرو چه توانی را به مقاومت R منتقل می کند؟

(ت): فرض کنید در زمان $t = 0$ میله در نبود نیروی خارجی $\mathbf{F}_{ext}$ با سرعت v_0 شروع به حرکت می کند. سرعت میله را در زمان $t > 0$ به دست آورید.

(ج): انرژی جنبشی اولیه ی میله $mv_0/2$ است. این انرژی به کجا می رود؟ ثابت کنید که در این فرایند انرژی پایسته می ماند. این کار را با نشان دادن این که مقدار انرژی تلف شده در مقاومت دقیقا $mv_0/2$ است.

حل: **الف**- شار گذرنده از حلقه ای که میله با ریل ها می سازد عبارت است از $\Phi = BA = B\ell x$. پس

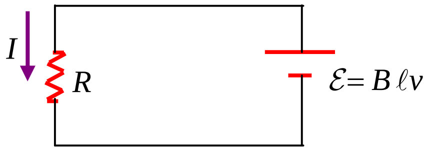
نیروی محرکه ی القائی عبارت است از

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(B\ell x)=-B\ell\frac{d}{dt}(x)=-B\ell v \qquad (۵۰)$$

که در آن $dx/dt=v$ سرعت میله است. جریانی که این نیروی محرکه در مدار القاء می کند برابر است با

$$I=\frac{|\mathcal{E}|}{I}=\frac{B\ell v}{R} \qquad (۵۱)$$

علامت منها در رابطه ی (۵۰) جهت شارش را نشان می دهد : $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ در میله رو به بالا ست و بنابراین در مقاومت رو به پایین است. به بیان دیگر جهت جریان پادساعتگرد است. مدار معادل با میله ی متحرک روی دو ریل در شکل (۲۳) دیده می شود.



شکل ۲۳- مدار معادل برای میله ی متحرک

(ب): نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_B$ وارد به میله وقتی میله به سوی راست در حال حرکت است، عبارت است از

$$\mathbf{F}_B=I(\ell\hat{\mathbf{j}})\times(-B\hat{\mathbf{k}})=-I\ell B\,\hat{\mathbf{i}}=-\left(\frac{B^2\ell^2 v}{R}\right)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۵۲)$$

یعنی جهت این نیرو در خلاف جهت سرعت v و به سوی چپ است.

(پ): برای این که میله با سرعت ثابت حرکت کند باید برآیند نیروهای وارد به آن صفر باشد. پس

$$\mathbf{F}_{ext}=-\mathbf{F}_B=+\left(\frac{B^2\ell^2 v}{R}\right)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۵۲)$$

توانی را که این نیرو به مقاومت انتقال می دهد با توان تلف شده در مقاومت برابر است:

$$P=\mathbf{F}_{ext}\cdot\mathbf{v}=F_{ext}v=\left(\frac{B^2\ell^2 v}{R}\right)v=\frac{(B\ell v)^2}{R}=\frac{\mathcal{E}^2}{R}=I^2R \qquad (۵۳)$$

(ت):

$$F=ma=m\frac{dv}{dt}=-\frac{B^2\ell^2 v}{R}\quad\Rightarrow\quad\frac{dv}{dt}=-\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)v$$

$$\Rightarrow\qquad v=v_0e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t} \qquad (۵۴)$$

(ج): انرژی در مقاومت به گرما تبدیل می شود. توان انتقالی به مقاومت I^2R است:

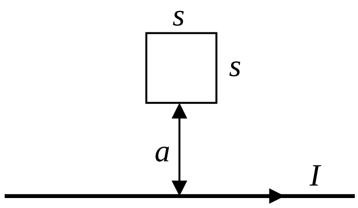
$$P=\frac{dW}{dt}=I^2R=\frac{B^2\ell^2v^2}{R^2}R=\frac{B^2\ell^2}{R}v_0^2e^{-2\alpha t}\qquad;\quad\alpha\equiv\frac{B^2\ell^2}{mR}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{dW}{dt}=\alpha m v_0^2e^{-2\alpha t}\quad\Rightarrow\Rightarrow\quad W=\alpha m v_0^2\int_0^\infty e^{-2\alpha t}\,dt$$

$$\Rightarrow\quad W=\alpha m v_0^2\left.\frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha}\right|_0^\infty=\alpha m v_0^2\frac{1}{2\alpha}=\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (۵۵)$$

که همان انرژی کل انتقال یافته به مقاومت است.

مثال ۹- حلقه ی مربع شکلی به ضلع s در فاصله ی a از سیم بسیار درازی در روی میز قرار دارد. از سیم دراز برابر شکل (۲٤) جریان I می گذرد .



شکل ۲٤- حلقه ی مربع و سیم حامل جریان

(الف): شار میدان $\mathbf{B}$ گذرنده از حلقه را حساب کنید.

(ب): اگر حلقه را با سرعت v و در جهت بالا از سیم دور کنیم، چه نیروی محرکه ای تولید می شود؟ در چه جهتی جریان در جلقه شارش پیدا می کند؟

(پ): اگر به جای دور کردن حلقه از سیم، آن را با سرعت v به سوی راست حرکت دهیم، چه نیروی محرکه ای در حلقه القاء می شود؟

حل: **الف**- میدان مغناطیسی سیم درازعبارت است از

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{٥٦}$$

شار گذرنده از حلقه:

$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^{a+s}\frac{1}{r}(s\,dr) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ell n\left(\frac{a+s}{a}\right) \tag{٥٧}$$

(ب): نیروی محرکه:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I s}{2\pi}\,\ell n\left(\frac{a+s}{a}\right) = -\frac{\mu_0 I s}{2\pi}\left(\frac{1}{a+s}\frac{da}{dt} - \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)\\ &= \frac{\mu_0 I s^2}{2\pi a(a+s)} \qquad ; \quad \frac{da}{dt} = v\end{aligned} \tag{٥٨}$$

میدان مغناطیسی به سوی بیرون از صفحه است، بنابراین، نیروی وارد به ضلع پایینی حلقه به سوی *راست* است. نیروی وارد به ضلع افقی بالایی هم به سوی راست است، اما میدان در روی این ضلع ضعیف تر است. بنابراین جریان پادساعتگرد است.

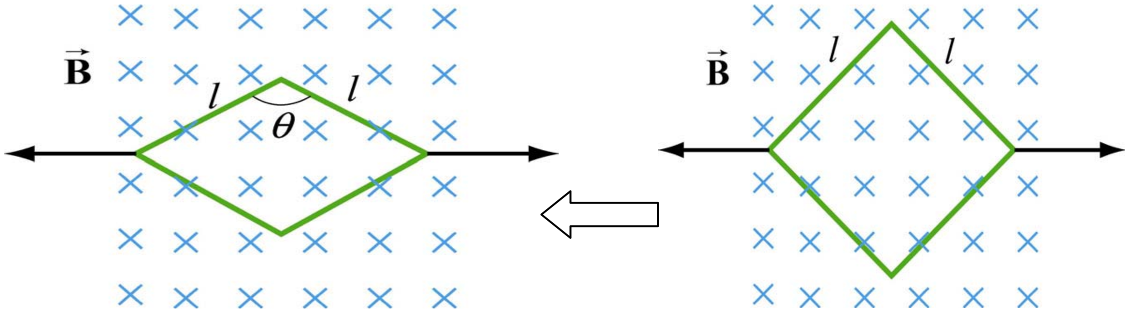
(پ): در این حالت شار تغییر نمی کند و در نتیجه $\mathcal{E} = 0$ است.

مثال ۱۰- **تغییر مساحت حلقه** : حلقه ی مربع شکلی به ضلع ℓ در میدان مغناطیسی یکنواخت و به سمت درون صفحه قرار دارد. برابر شکل (۲۵) دو گوشه ی قطری آن را می گیریم و در بازه ی زمانی Δt از هم دور می کنیم. حلقه به شکل لوزی در می آید. اگر مقاومت کل حلقه R باشد، جریان میانگین را که به حلقه القاء می شود حساب کنید.

حل: داریم

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right) \tag{٥٩}$$

مساحت اولیه ی حلقه $A_i = \ell^2$ است و مساحت نهایی آن $A_f = \ell^2\sin\theta$ است (به یاد بیاورید که مساحت یک چهار ضلعی با دو بردار $\mathbf{l}_1$ و $\mathbf{l}_2$ به صورت $A = |\mathbf{l}_1\times\mathbf{l}_2| = l_1 l_2 \sin\theta$ تعریف می شود.) میانگین آهنگ



شکل ۲۵– تولید نیروی محرکه با تغییر مساخت حلقه در میدان مغناطیسی

تغییر مساحت و نیروی محرکه عبارت اند از

$$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{A_f-A_i}{\Delta t}=-\frac{\ell^2(1-\sin\theta)}{\Delta t}<0 \quad (٦٠)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}=\frac{B\,\ell^2(1-\sin\theta)}{\Delta t}>0 \quad (٦١)$$

بنابراین ، جریان میانگین گذرنده ار حلقه برابراست با

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R}=\frac{B\,\ell^2(1-\sin\theta)}{R\,\Delta t} \quad (٦٢)$$

۵– قانون لنز

جهت جریان القایی با قانون لنز تعیین و به صورت زیر بیان می شود:

جریان القایی میدان مغناطیسی تولید می کند. شار این میدان چنان است که با تغییر شار به وجود آورنده ی جریان القایی مخالفت می کند.

برای این که کاربرد قانون لنز را نشان دهیم، حلقه ی سیمی را در نظر بگیرید که در میدان مغناطیسی قرار دارد و به صورت زیر عمل کنید: (۱) برای بردار سطح $\mathbf{A}$ جهت مثبتی را تعریف کنید. (۲) فرض کنید میدان $\mathbf{B}$ یکنواخت است و ضرب داخلی بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را حساب کنید. این کمیت علامت شار مغناطیسی Φرا به دست می دهد. (۳) با مشتق گیری از Φ آهنگ تغییر شار $d\Phi/dt$ را به دست آورید. سه حالت ممکن برای $d\Phi/dt$ عبارتند از

$$\frac{d\Phi}{dt}:\begin{cases}>0 \;\Rightarrow\; \mathcal{E}<0\\ <0 \;\Rightarrow\; \mathcal{E}>0\\ =0 \;\Rightarrow\; \mathcal{E}=0\end{cases} \quad (٦٣)$$

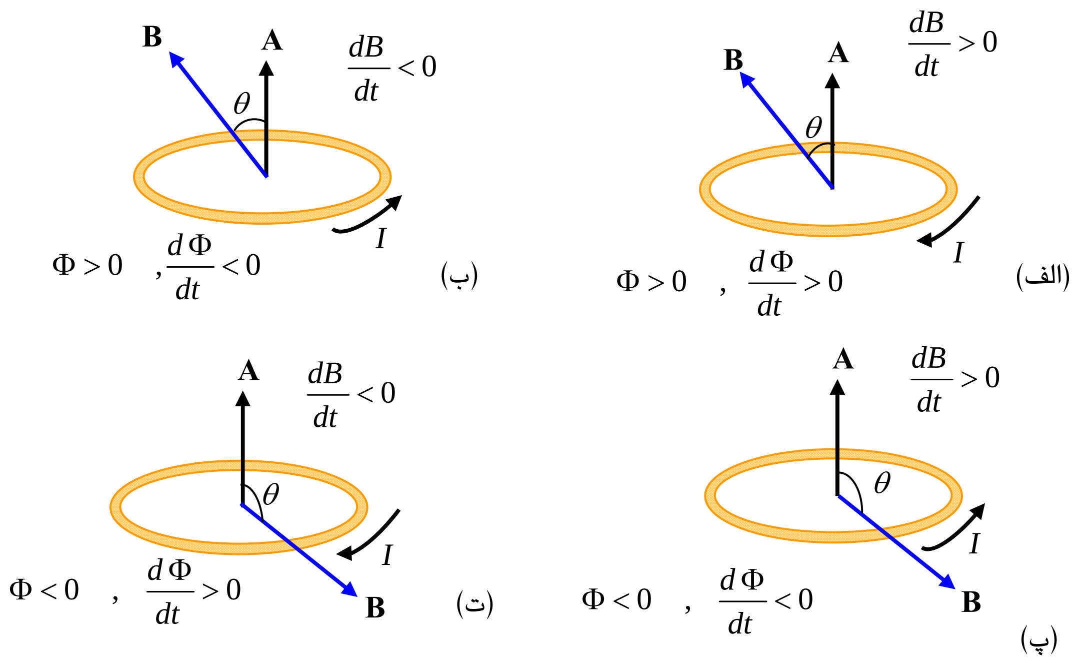
(٤) جهت جریان القایی را با قاعده ی انگشت های دست راست تعیین کنید: انگشت شست در راستای بردار $\mathbf{A}$ و جهت خمش چهار انگشت دیگر حول حلقه. اگر $\mathcal{E}>0$ باشد جهت جریان در حلقه همسو با جهت خمش چهار انگشت دست راست یکی است. اگر $\mathcal{E}<0$ باشد جهت جریان در حلقه در خلاف جهت خمش انگشت های دست راست است. در شکل (٢٦) این دو وضعیت نشان داده شده اند

شار مغناطیسی به شیوه های گوناگون می تواند تغییر کند. در شکل (٢٧) چهار حالت ممکن برای تغییر شار



شکل ۲٦– تعیین جهت جریان القائئ در حلقه با انگشت های دست راست

مغناطیسی نشان داده شده اند و جهت جریان القایی در حلقه به یاری قانون لنز مشخص شده است



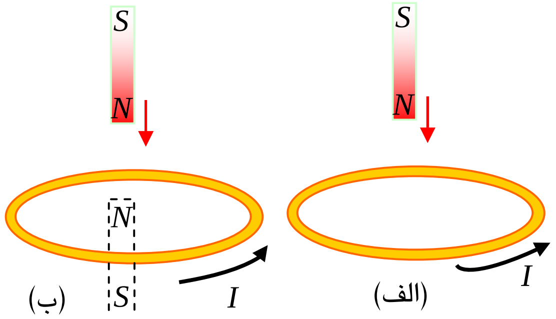
شکل ۲۷– تعیین جهت جریان القائئ به یاری قانون لنز

وضعیت های بالا را می توان در جدول زیر خلاصه کرد

I	$\mathcal{E}$	$d\Phi/dt$	Φ
-	−	+	+
+	+	−	+
−	−	+	−
+	+	−	−

علامت مثبت برای I به معنی پادساعتگرد و علامت منفی به معنی ساعتگرد بودن جریان اند.

بگذارید با مثالی شیوه ی استفاده از قانون لنز را نشان دهیم. وضعیتی را همانند شکل (۲۸ –الف) را در نظر بگیرید که یک آهن ربای میله ای به سوی حلقه حرکت می کند. فرض کنید قطب شمال آهن ربا به سوی پایین و بردار سطح $\mathbf{A}$ حلقه به سوی بالا باشند. در این صورت شار مغناطیسی منفی است، یعنی $\Phi = -BA < 0$ (چون زاویه ی بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در خلاف جهت یکدیگر اند و زاویه ی بین آنها ۱۸۰ درجه است.) A مساحت حلقه است. با نزدیک شدن آهن ربا به حلقه، میدان مغناطیسی در نقطه ای روی حلقه افزایش می یابد ($dB/dt > 0$) و شار بیشتری از سطح حلقه می گذرد. پس $\frac{d\Phi}{dt} = -A\left(\frac{dB}{dt}\right) < 0$ و در نتیجه نیروی محرکه $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} > 0$ می شود.

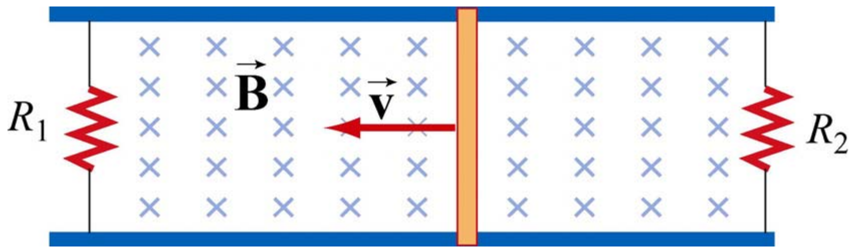


شکل ۲۸– تعیین جهت جریان با استفاده از نیروی مغناطیسی بین آهن ربا ی میله ای و حلقه

بنابراین، جریان القایی در حلقه پادساعتگرد شارش می کند. این جریان القایی میدان مغناطیسی خودش را پدید می آورد که شار مثبت دارد و با تغییر شار به وجود آورنده ی جریان مخالفت می کند. وضعیتی که در اینجا توصیف شد بر شکل (۲۷– پ) منطبق است.

یک جور دیگر هم می توان جهت جریان القایی را یافت. با بررسی نیروی مغناطیسی. قانون لنز می گوید نیروی محرکه ی القایی باید در جهتی باشد که با تغییر شار مخالفت کند. بنابراین، با نزدیک شدن آهم ربای میله ای به حلقه ، به خاطر نیروی محرکه ی القایی به آهن ربا نیروی رانشی وارد می شود. چون قطب های هم نام یکدیگر را می رانند، پس حلقه باید همانند یک آهن ربای میله ای رفتار کند که قطب شمالش رو به بالا است. با استفاده از قانون انگشت های دست راست می بینیم که اگر به حلقه از بالا نگریسته شود، جهت جریان القایی پادساعتگرد است. این رویکرد برای تعیین جهت جریان القایی در حلقه در شکل (۲۸– ب) نشان داده شده است.

مثال ۱۱– میله متحرک ودو مقاومت: میله ای رسانا به طول ℓ برروی دو ریل رسانای موازی می لغزد. دو



شکل ۲۹– میله وریل با دو مقاومت

انتهای ریل ها برابر شکل (۲۹) با دو مقاومت R_1 و R_2 به هم وصل اند. سامانه در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ به درون صفحه قرار دارد که جهتش به سوی درون صفحه است. فرض کنید عاملی خارجی میله را با سرعت ثابت v به سمت چپ حرکت می دهد. کمیت های زیر را حساب کنید

(الف): جریان در هر یک از مقاومت ها

(ب): توان کل انتقالی به مقاومت ها

(پ): نیروی خارجی لازم برای این که میله با سرعت ثابت حرکت کند.

حل: **الف**– نیروی محرکه ی القایی بین دو انتهای میله ی متحرک برابر است با

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v \qquad (٦٤)$$

بنابراین ، جریان در مقاومت ها عبارت اند از

$$I_1 = \frac{|\mathcal{E}|}{R_1} \quad ; \quad I_2 = \frac{|\mathcal{E}|}{R_2} \qquad (٦٥)$$

چون شار گذرنده (به سوی درون صفحه) از حلقه ی سمت چپ کاهش پیدا می کند، برای جبران این تغییر شار، جریان I_1 باید ساعتگرد باشد تا میدان مغناطیسی آن به سمت درون صفحه باشد . از سوی دیگر، شار گذرنده (به سوی درون صفحه) از حلقه ی سمت راست افزایش پیدا می کند و برای جبران این تغییر شار، بنا به قانون لنز، I_2 باید پادساعتگرد باشد تا میدان مغناطیسی بیرون از صفحه ی حلقه تولید کند.

(ب): توان کل تلف شده در دو مقاومت عبارت است از

$$P_R = I_1|\mathcal{E}| + I_2|\mathcal{E}| = (I_1 + I_2)|\mathcal{E}| = \mathcal{E}^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = B^2\ell^2v^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (٦٦)$$

(پ): جریان کل که از میله می گذرد $I = I_1 + I_2$ است. پس، نیروی مغناطیسی وارد به میله برابر است با

$$F_B = I\ell B = |\mathcal{E}|\ell B\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = B^2\ell^2v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (٦٧)$$

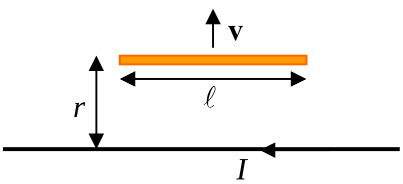
و جهت آن به سوی راست است. بنابراین، عامل خارجی باید نیرویی برابر و در خلاف جهت $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_B$ به سوی چپ به میله وارد کند تا سرعت آن را ثابت نگه دارد.

نکته: چون توان تلف شده در مقاومت ها با توان مکانیکی P_{ext} که نیروی خارجی فراهم می کند باید برابر باشد، در نتیجه می توان نوشت

$$P_{ext} = \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{v} = F_{ext}v \qquad (٦٨)$$

که همان پاسخ رابطه ی (٦٦) است.

مثال ١٢– میله ی در حال حرکت: میله ای رسانا به طول ℓ در راستای عمود بر سیم بسیار درازی با جریان I برابر شکل (٣٠) حرکت می کند. بین دو انتهای میله چه نیروی محرکه ای تولید می شود؟



شکل ٣٠– میله ی متحرک

حل: میدان مغناطیسی سیم راست بنا به قانون آمپر عبارت است از

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (٦٩)$$

جهت این میدان در سمتی که میله قرار دارد به سوی درون صفحه است. نیروی مغناطیسی در واحد بار وارد به میله به سمت چپ و برابر است با $|\mathbf{f}|=|\mathbf{v}\times\mathbf{B}|=vB$. پس نیروی محرکه عبارت است از

$$\mathcal{E}=\int \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}=\int vB\,d\ell=vB\int_0^{\ell} d\ell=vB\ell \qquad (۷۰)$$

بنابراین، نیروی محرکه بین دو انتهای میله برابر است با

$$|\mathcal{E}|=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}v\ell \qquad (۷۱)$$

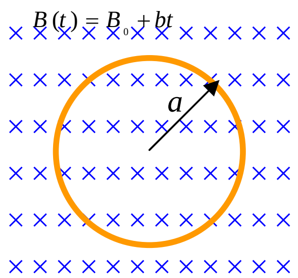
مثال ۱۳- میدان مغناطیسی وابسته به زمان: سیم دایره به شعاع a در میدان معناطیسی وابسته به زمان $B(t)=B_0+bt$ قرار دارد. B_0 و b کمیت های ثابت و مثبت اند. صفحه ی حلقه برابر شکل (۳۱) به میدان عمود است.

(الف): در زمان $t=0$ چه شاری از حلقه می گذرد؟

(ب): نیروی محرکه ی القایی را در حلقه حساب کنید.

(پ): اگر مقاومت کل حلقه R باشد، اندازه و جهت جریان القایی را در حلقه حساب کنید.

(ت): توان تلف شده در حلقه به خاطر مقاومت آن چقدر است؟



شکل ۳۱- حلقه رسانا در میدان وابسته به زمان

حل: **(الف)** شار مغناطیسی در هر زمان t عبارت است از

$$\Phi=BA=(B_0+bt)(\pi a^2)=\pi(B_0+bt)a^2 \qquad (۷۲)$$

در اینجا بردار سطح را به سوی درون صفحه برگزیدیم و بنابراین $\Phi>0$ است. در زمان $t=0$ داریم $\Phi=\pi B_0 a^2$.

(ب): نیروی محرکه ی القایی عبارت است از

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-A\frac{dB}{dt}=-(\pi a^2)\frac{d(B_0+bt)}{dt}=-\pi b a^2 \qquad (۷۳)$$

(پ): جریان القایی عبارت است از

$$I=\frac{|\mathcal{E}|}{R}=\frac{\pi b a^2}{R} \qquad (۷۴)$$

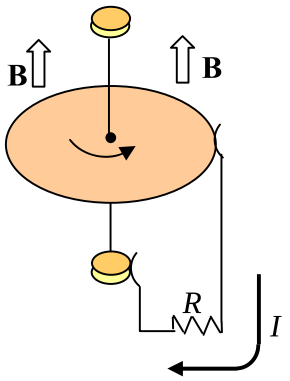
و جهت آن بنابه قانون لنز پادساعتگرد است.

(ت): توان تلف شده در مقاومت حلقه برابر است با

$$P=I^2R=\left(\frac{\pi b a^2}{R}\right)^2 R=\frac{(\pi b a^2)^2}{R} \qquad (۷۵)$$

مثال ۱۴- قرص چرخان: قرص فلزی به شعاع a برابر شکل (۳۲) در میدان مغناطیسی یکنواخت و در جهت

بالا، با سرعت زاویه ای ω حول محور عمودی خود می چرخد. یک انتهای مقاومت R با محور چرخش قرص و انتهای دیگرش با لبه ی قرص در تماس لغزشی اند. به این ترتیب یک مدار بسته ساخت می شود. جهت جریان در مدار در شکل (۳۲) نشان داده شده است. نیروی محرکه مدار را حساب کنید و جریان گذرنده از مقاومت را بیابید.



شکل ۳۲- قرص چرخان

حل: توجه کنید که استفاده از قاعده ی شار در اینجا مسئله آفرین است؛ چون در این قاعده فرض می کند که جریان در مسیری خوش تعریف شارش پیدا می کند. اما در این مثال جریان در همه جای قرص پخش می شود. اگر خوب فکرش را بکنید، حتی گزاره ی" شارگذرنده از مدار" هم معنی روشنی در اینجا ندارد. این مسئله را می توان با استفاده از قانون نیروی لورنتس حل کرد. داریم

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{v}\times\mathbf{B} \quad , \quad v = \omega r$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \omega B\int_0^a r\,dr = \frac{\omega B a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R} \tag{۷۶}$$

مثال ۱۵- کره ی چرخان: پوسته ی کروی رسانایی به شعاع R با سرعت زاویه ای ω حول محور z می چرخد. این پوسته در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{k}}$ قرار دارد. چه نیروی محرکه ای بین قطب شمال و صفحه ی استوای پوسته تولید می شود؟

حل: داریم $\mathbf{f} = \mathbf{v}\times\mathbf{B}$ و $\mathbf{v} = \omega R\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ بنابراین $\mathbf{f} = \omega R B_0\sin\theta(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\mathbf{k}})$ و $\mathcal{E} = \int \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}$. هم چنین $d\mathbf{l} = R\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است. پس

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l} = \omega R^2 B_0\int_0^{\pi/2}\sin\theta(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\mathbf{k}})\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}\,d\theta \tag{۷۷}$$

اما $\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{k}}\cdot(\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta$ است. در نتیجه

$$\mathcal{E} = \omega R^2 B_0\int_0^{\pi/2}\sin\theta(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\mathbf{k}})\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}\,d\theta = \omega R^2 B_0\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \omega R^2 B_0\left(\sin^2\theta/2\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\omega R^2 B_0 \tag{۷۸}$$

که همانند قرص چرخان مثال ۱۳ است.

۶- قانون فاراده و القاء الکترومغناطیسی

در بخش ٤ وضعیتی را بررسی کردیم که در آن حلقه ی سیم در میدان مغناطیسی ثابتی به سوی راست حرکت می کرد. نیروی محرکه ی تولید شده در حلقه با قاعده ی شار، رابطه ی (٤٨) ،

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{٤٨}$$

به دست آمد. در آن بخش به طور گذرا به حرکت نسبی حلقه – حرکت حلقه نسبت به میدان مغناطیسی – اشاره شد. آنچه که اهمیت دارد حرکت نسبی است. اگر حلقه را ثابت نگه بداریم و آهن ربایی را که میدان مغناطیسی تولید می کند به سمت چپ حرکت دهیم، همان نیروی محرکه در حلقه تولید خواهد شد. این مشاهده را فاراده کشف کرد. با توجه به آموزه های نظریه ی نسبیت خاص باید هم این چنین باشد، اما در زمان فاراده هنوز نسبیت خاص زاده نشده بود. این واقعیت که اگر میدان مغناطیسی ثابت باشد و حلقه به سوی راست حرکت کند یا حلقه ثابت بماند و میدان مغناطیسی به سمت چپ حرکت کند، هر دو به یک پدیده می انجامد از نگاه الکترودینامیک کلاسیک پی امد مهمی دارد. اگر حلقه حرکت کند نیروی مغناطیسی عامل به وجود آمدن نیروی محرکه می شود؛ اما اگر حلقه ثابت بماند نیرودیگر نمی تواند مغناطیسی باشد، چون بارهای ساکن حلقه وجود میدان مغناطیسی را حس نمی کنند. در این صورت نیرو یی که جریان تولید می کند و بارها را به حرکت وامی دارد کدام است؟ چه نوع میدانی به بارهای ساکن نیرو وارد می کند؟ پاسخ این است: میدان الکتریکی! اما این میدان الکتریکی از نوعی نیست که بارها ی الکتریکی چشمه های آن است. به بیان دیگر، این میدان الکتروستاتیک نیست. می دانیم که میدان الکتروستاتیک نیروی محرکه تولید نمی کند. این میدان الکتریکی از نوع دیگری است که وجودش را وام دار حرکت آهن ربا هستیم. با حرکت آهن ربا میدان مغناطیسی آن در مکان حلقه ی سیم تغییر می کند. بنابراین می توان گفت که ***تغییر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی به وجود می آورد.*** چون نیروی محرکه در هر دو حالت (۱) ثابت ماندن آهن ربا و حرکت حلقه و (۲) ثابت ماندن حلقه و حرکت آهن ربا یکسان اند، پس می توان نوشت

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (۷۹)$$

این رابطه بیان **قانون فاراده** در شکل انتگرالی آن است. به سادگی می توانیم آن را در شکل دیفرانسیلی هم بنویسیم. با استفاده از قضیه ی استوکس داریم

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۸۰)$$

بنابراین

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۸۱)$$

رابطه ی (۸۱) شکل دیفرانسیلی قانون فاراده است. این قانون برای میدان مغناطیسی **ثابت** به $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ کاهش می یابد که همان $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0$ آشناست.

نکته: در بالا دو وضعیت را توصیف کردیم که هر دو به یک قانون ($\mathcal{E} = -d\Phi/dt$) می انجامند. اما توجیح فیزیکی آنها کاملا با هم فرق دارند: وقتی که حلقه را به حرکت وامی داریم، قانون نیروی لورنتس است که در لباس قاعده ی شار ، رابطه ی (٤٨) یا (۷۹) ظاهر می شود و نیروی محرکه در اثر نیروی *مغناطیسی* پدید می آید. وقتی آهن ربا را به حرکت وامی داریم، نیروی محرکه را نیروی *الکتریکی* ایجاد می کند – میدان مغناطیسی متغیر میدان الکتریکی تولید می کند. در واقع، این هم خوانی بود که اینشتین را به نسبیت خاص رهنمون شد. او توصیفی ژرف بر این تطابق در الکترودینامیک کلاسیک فراهم آورد.

مهم نیست که تغییر میدان مغناطیسی بر اثر جابه جایی آهن ربا به وجود آمده باشد یا به هر شکل دیگری میدان $\mathbf{B}$ تغییر کند. میدان $\mathbf{B}$ شاید با یک پیچه تولید شود و جریان در پیچه متغیر باشد. در این صورت میدان هم تغییر خواهد کرد و هنوز هم قانون فاراده درست است. برای حلقه هیچ راهی وجود ندارد که بفهمد میدان مغناطیسی چگونه تغییر می کند. حلقه تنها می تواند تغییر میدان مغناطیسی را دریابد. این تغییر یک میدان الکتریکی تولید می کند و میدان الکتریکی تولید شده در حلقه جریان القاء می کند. جهت این جریان را قانون لنز تعیین می کند.

۷- محاسبه ی میدان الکتریکی

میدان مغناطیسی متغیر، میدان الکتریکی به وجود می آورد. این میدان الکتریکی را با استفاده از مانستگی بین قانون فاراده و قانون آمپر می توان حساب کرد. قانون فاراده در شکل دیفرانسیلی عبارت است از

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{۸۲}$$

شکل دیفرانسیلی قانون آمپر هم به صورت زیر است

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{۸۳}$$

ساختار ریاضی این دو رابطه یکسان است. تنها نام های نماد ها تغییر کرده اند: $-\partial \mathbf{B}/dt \to \mu_0 \mathbf{J}$ و $\mathbf{E} \to \mathbf{B}$. به نظر می رسد که شاید بتوان از رابطه ی (۸۲) میدان $\mathbf{E}$ را با دانستن $\mathbf{B}$ حساب کرد. اما این سخن درستی نیست. تاو یا کرل $\mathbf{E}$ به تنهایی برای محاسبه ی میدان برداری $\mathbf{E}$ کافی نیست. باید دیورژانس $\mathbf{E}$ را هم بدانیم. اما $\nabla \cdot \mathbf{E}$ چیست؟ توجه کنید که در اینجا میدان $\mathbf{E}$ را بار الکتریکی به وجود نیاورده است بلکه منشاء دیگری دارد ($\mathbf{B}$ متغیر آن را پدید آورده است). بنابراین تا جایی که $\mathbf{E}$ میدان برآمده از تغییر $\mathbf{B}$ باشد (بهتر است آن را میدان الکتریکی فاراده بنامیم) آنگاه قانون گوس می گوید

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho/\varepsilon_0) = 0 \tag{۸٤}$$

چون بار الکتریکی در کار نیست و $\rho = 0$ است. برای این که مانستگی بین قانون آمپر و قانون فاراده را کامل کنیم ، به یاد بیاورید که همواره داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{۸۵}$$

بگذارید این مانستگی را یکبار دیگر و پهلوی هم بنویسیم تا روشن تر دیده شود

(۸٦) برای میدان $\mathbf{B}$ $\qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

(۸۷) برای میدان $\mathbf{E}$ $\qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$

به جاست که اندکی به همانندی این دو رابطه توجه کنید. ساختار ریاضی آنها یکسان است. قانون آمپر را از قانون بیو- ساوار به دست آوردیم. میدان $\mathbf{B}$ در قانون آمپر ناگزیر است که در قانون بیو- ساوار صدق کند. بنابراین، ار قانون بیو- ساوار برای میدان $\mathbf{B}$ داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau \tag{۸۸}$$

رابطه ی (۸۸) پاسخ معادله ی (۸۷) است. چون معادله ی (۸٦) ساختاری همانند معادله ی (۸۷) دارد ، پاسخ

آن نیر باید همانند رابطه‌ی (۸۸) باشد. با این تفاوت که نام نمادها تغییر کرده است و به جای $\mathbf{B}$ اینک $\mathbf{E}$ و به جای $\mu_0\mathbf{J}$ حالا $-\partial\mathbf{B}/dt$ جانشین شده است. پس اگر این جاگرینی را در رابطه ی (۸۸) اعمال کنیم خواهیم داشت

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{(\partial\mathbf{B}/\partial t)\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}d\tau=\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{B}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}d\tau\right\} \qquad (۸۹)$$

عبارت داخل $\{\ \}$ **پتانسیل برداری** $\mathbf{A}$ نام دارد. چون دیورژانس $\mathbf{B}$ صفر است ($\nabla\cdot\mathbf{B}=0$) و نیز دیورژانس کرل هر برداری مانند $\mathbf{T}$ هم صفر است ($\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{T})=0$) نتیجه می گیریم که هر میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را می توان برحسب پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \qquad (۹۰)$$

حالا می توان رابطه ی (۸۹) را برحسب پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ نوشت

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \qquad (۹۱)$$

به سادگی می توان درستی این رابطه را آزمود:

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۹۱)$$

برگردیم به محاسبه ی $\mathbf{E}$ میدان فاراده. ما در پی یافتن همانندی بین قانون فاراده و قانون آمپر بودیم. اینک آن را یافتیم. اما فقط هنگامی می توانستیم از قانون آمپر در شکل انتگرالی آن استفاده کنیم که مسئله تقارن داشت. در اینجا هم اگر تقارن مسئله اجازه دهد، از همان شگرد قانون آمپر برای محاسبه ی میدان $\mathbf{E}$ فاراده می توان بهره برد. شکل انتگرالی قانون آمپر به صورت زیر است

$$\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\mu_0 I_{enc} \qquad (۹۲)$$

با جایگزینی های $\mu_0\mathbf{J}\to-\partial\mathbf{B}/dt$ و $\mathbf{B}\to\mathbf{E}$ رابطه ی بالا برای شکل انتگرالی قانون فاراده به دست می آید

$$\oint\mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{l}=\mu_0\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}\to\oint\mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{l}=-\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a}=-\frac{\partial}{\partial t}\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}=-\frac{\partial\Phi}{dt}$$

$$\Rightarrow\qquad\oint\mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{l}=-\frac{\partial\Phi}{dt} \qquad (۹۳)$$

آهنگ تغییر شار گذرنده از حلقه ی آمپر، $-\partial\Phi/\partial t$ ، اینک نقش $\mu_0 I_{enc}$ را بازی می کند.

مثال های ۱۵ و ۱۶برگرفته از $D.J.\,Griffiths$, "*An Introduction to Electrodynamics*", 2^{nd} *ed. Prentice Hall*, 1989. اند.

مثال۱۵ – میدان فاراده : میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}(t)=B_0(t)\,\hat{\mathbf{k}}$ ناحیه ی دایره ای هاشور خورده را در شکل (۳۳) پر کرده است. این میدان با زمان تغییر می کند. میدان الکتریکی القایی فاراده را حساب کنید.

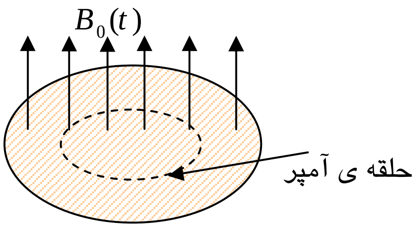
حل: حلقه ی آمپری به شعاع r در نطر بگیرید و قانون فاراده ، رابطه ی (۹۳) ، را به کار ببرید. داریم

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = E\,(2\pi r) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 B_0(t)\right) = -\pi r^2 \frac{dB_0(t)}{dt} \qquad (٩٤)$$

بنابراین

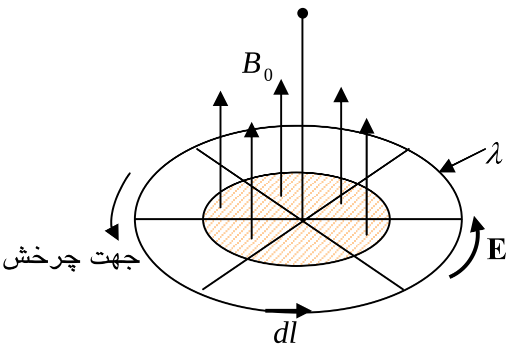
$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dt} \qquad (٩٥)$$

میدان E پیرامونی (سمتی) است؛ همانگونه که جهت میدان مغناطیسی در درون سیم درازی با چگالی جریان یکنواخت پیرامونی است. اگر B_0 با زمان افزایش یابد، آنگاه جهت E ساعتگرد است (اگر از بالا به آن بنگریم).



شکل ۳۳- میدان **B** متغیر

مثال ۱۶- چرخ باردار: چرخی به شعاع R به طورافقی در هوا نگه داشته شده است و می تواند آزادانه حول محورش بچرخد (شکل ٣٤ را نگاه کنید). چگالی بار خطی λ به لبه ی چرخ چسبانیده شده است (میله های چرخ از جنس نارسانا مانند چوب ساخته شده اند). در ناحیه ی درونی چرخ تا شعاع a میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{k}}$ وجود دارد. اگر کسی یک باره میدان مغناطیسی را قطع کند چه روی می دهد؟



شکل ٣٤- چرخی با لبه ی باردار در میدان **B**

حل: میدان مغناطیسی ناگهان صفر می شود. این تغییر ناگهانی میدان به تغییر در شار مغناطیسی گذرنده از صقحه ی چرخ می انجامد و در نتیجه یک میدان الکتریکی القاء می شود که حول محور چرخ می گردد. این میدان الکتریکی به بارهای روی لبه ی چرخ نیرو وارد می کند و آنها را به حرکت وامی دارد. چون بار به چرخ چسبیده است ، بنابراین چرخ شروع به چرخیدن حول محورش می کند. براساس قانون لنز ، چرخ باید در جهتی بچرخد که میدان مغناطیسی آن کاهش شار روبه بالا را جبان کند. بنابراین، حرکت چرخ باید پادساعتگرد باشد. از قانون فاراده داریم

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt} \qquad (٩٦)$$

گشتاور وارد به جزء طول dl برابر است با $|d\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{R}\times\mathbf{F}| = (R\lambda E)dl$ و گشتاور کل عبارت است از

$$\tau = R\lambda \oint E\, dl = -R\lambda\pi a^2 \frac{dB}{dt} \qquad (٩٧)$$

تکانه ی زاویه ای کل که این گشتاور به چرخ منتقل می کند برابر است با

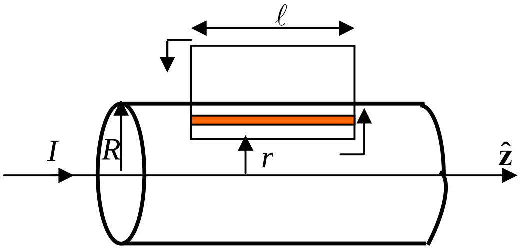
$$L = \int \tau\, dt = -R\lambda\pi a^2 \int_{B_0}^{0} dB = R\lambda\pi a^2 B_0 \qquad (٩٨)$$

نکته ۱: می دانیم که تکانه ی زاویه ای با رابطه ی $L = I\omega$ به سرعت زاویه ای مربوط است (I در این جا گشتاور لختی چرخ است). از رابطه ی (۹۸) می توان دریافت که سرعت زاویه ای چرخ به این که میدان مغناطیسی ناگهان قطع شود یا به تدریج صفر شود بستگی ندارد.

نکته ۲: تکانه ی زاویه ای از کجا آمده است؟ ما هنوز نمی توانیم به این پرسش پاسخ دهیم . میدان های الکترومغناطیسی همان گونه که انرژی دارند، تکانه و تکانه ی زاویه ای هم دارند. تکانه ی زاویه ای که چرخ به دست می آورد، به هزینه ی تکانه ی زاویه ای است که میدان از دست می دهد.

نکته ۳: چرخ را میدان الکتریکی می چرخاند. توجه کنید که در این مثال میدان مغناطیسی به ناحیه ای محدود است که بار الکتریکی وجود ندارد. در همه جای لبه ی چرخ که بار الکتریکی قرار دارد، میدان مغناطیسی صفر است. کسی که میدان مغناطیسی را قطع می کند شاید بگوید که او هرگز میدان الکتریکی برقرار نکرده است. اما با قطع میدان معناطیسی یک میدان الکتریکی پدید می آید و این میدان چرخ را به چرخش وامی دارد.

مثال ۱۷- جریان متناوب $I = I_0\cos(\omega t)$ از مغزی سیم هم محور می گذرد و بر روی پوسته ی رسانای استوانه ای بیرونی آن به شعاع قاعده ی R برمی گردد. جهت و اندازه ی میدان الکتریکی القائی را به دست آورید.



شکل ۳۵- حلقه ی" آمپر"

حل: میدان مغناطیسی پیرامونی است. درست مانند جریان یک سولونویید. بنابراین، میدان الکتریکی **موازی محور** است. برای محاسبه ی میدان $\mathbf{E}$ از حلقه ی آمپری که در شکل (۳۵) نشان داده شده است استفاده کنید. در بیرون سیم هم محور میدان مغناطیسی صفر است. بنابراین در این ناحیه $\mathbf{E} = 0$ است (درست مانند سولونویید که میدان $\mathbf{B}$ در بیرون صفر است). پس

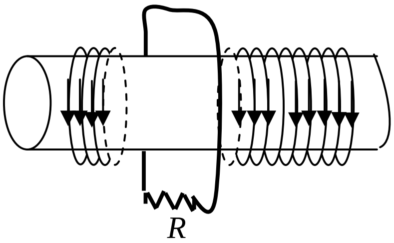
$$\begin{aligned}
&\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = E\,\ell = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt}\int_r^R \frac{\mu_0 I}{2\pi r'}\ell dr' \\
&\Rightarrow E = -\frac{\mu_0}{2\pi}\ell n\left(R/r\right)\frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\ell n\left(R/r\right)\left[-I_0\omega\sin\omega t\right] \\
&\mathbf{E} = \frac{\mu_0 I_0\omega}{2\pi}\sin(\omega t)\ell n\left(R/r\right)\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned} \tag{۹۹}$$

مثال ۱۸- سولونویید دراز: تعداد دورها در واحد طول سولونویید درازی N است. شعاع قاعده ی سولونویید a است. سولونویید را برابر شکل (۳٦) از درون حلقه ی سیمی با مقاومت R گذرانده ایم.

(الف): اگر جریان در سولونویید با آهنگ ثابت k افزایش یابد ($dI/dt = k$) در حلقه چه جریانی و در چه جهتی (چپ یا راست) از مقاومت می گذرد.

(ب): اگر جریان در سولونویید ثابت باشد اما سولونویید را از درون حلقه بیرون بیاوریم و دوباره در آن

فرو کنیم ، چه بار کلی از مقاومت می گذرد .



شکل ۳۶- سولونویید و حلقه

حل: (**الف**) میدان مغناطیسی در درون سولونویید $B = \mu_0 NI$ است. بنابراین اندازه ی میدان الکتریکی عبارت است از

$$\Phi = \pi a^2 \mu_0 NI \Rightarrow \mathcal{E} = -\pi a^2 \mu_0 N \frac{dI}{dt} \qquad (۱۰۰)$$

پس $|\mathcal{E}| = \pi a^2 \mu_0 N\ k$. چون داریم $\mathcal{E}= IR$، پس جریان در مقامت عبارت است از $I_R = \pi a^2 \mu_0 N\ k/R$.

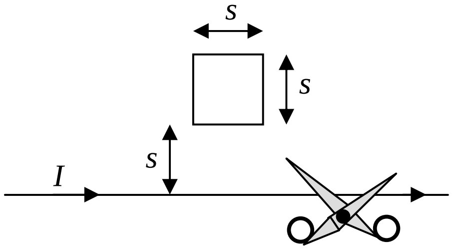
میدان $\mathbf{B}$ به سوی راست است و افزایش می یابد. بنابراین میدان مغناطیسی حلقه باید به سوی چپ باشد. در نتیجه، جریان در حلقه پادساعتگرد و در مقاومت از چپ به راست است.

(**ب**): تغییر شار عبارت است از $\Delta\Phi = 2\pi a^2 \mu_0 N\ I$ (ضریب ۲ به این خاطر است که یک بار سولونویید از حلقه بیرون کشیده شده و یک بار به آن فرو برده برده شده است.) بنابراین

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \Delta Q = \frac{1}{R}\Delta\Phi \Rightarrow \Delta Q = \frac{2\pi a^2 \mu_0 IN}{R} \qquad (۱۰۱)$$

مثال ۱۹- حلقه ی مربع و سیم راست: حلقه ی مربع شکل به ضلع s و مقاومت R در فاصله ی s از سیم راست بینهایت درازی با جریان I قرار دارد (شکل ۳۷) . سیم را با قیچی می بریم و جریان به طور ناگهانی صفر می شود. بیان ریاضی این تغییر جریان (بریدن سیم) را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$I(t) = \begin{cases} (1-\alpha t)I & ; \quad 0 \le t \le 1/\alpha \\ 0 & ; \quad t > 1/\alpha \end{cases} \qquad (۱۰۲)$$



شکل ۳۷- سیم راست، حلقه مربع و قیچی

جریان القایی در حلقه ی مربع در کدام جهت شارش پیدا می کند و در بازه ی زمانی که جریان در حلقه برقرار است، مقدار بار کل گذرنده از نقطه ای در روی حلقه چقدر است؟

حل: میدان مغناطیسی سیم راست عبارت است از $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. شار گذرنده از حلقه ی مربع عبارت است از

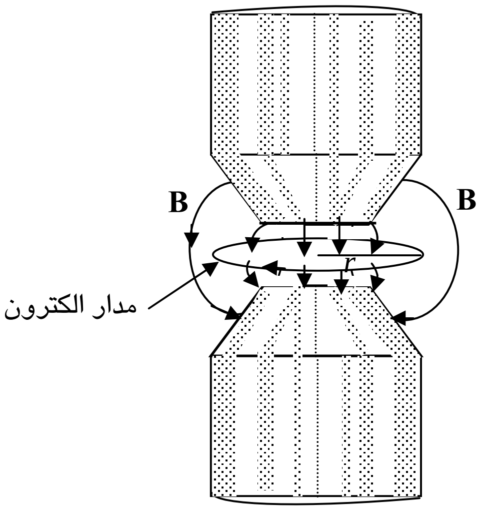
$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 Is}{2\pi}\int_s^{2s}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Is}{2\pi}\ell n\, 2 \qquad (۱۰۳)$$

هم چنین داریم

$$\mathcal{E} = I_{loop}R = \frac{dQ}{dt}R = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 s\,\ell n\, 2}{2\pi}\frac{dI}{dt} \Rightarrow Q = \frac{\mu_0 s\,\ell n\, 2}{2\pi R} \qquad (۱۰٤)$$

میدان مغناطیسی سیم راست در مکان حلقه به سوی بیرون از صفحه است و با زمان کاهش می یابد. بنابراین، میدان مغناطیسی جریان القایی باید در درون حلقه به سوی بیرون از صفحه باشد. برای این کار جریان القایی در حلقه باید پادساعتگرد باشد.

مثال ۲۰- بتاترون: الکترون های گردان در سیکلوترون را می توان با افزایش میدان مغناطیسی شتاب داد. تغییر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی القاء می کند و این میدان الکتریکی به الکترون ها شتاب مماسی می دهد. اساس کار **بتاترون** (یکی از نخستین شتاب دهنده ها) همین است. در عین حال می خواهیم در این فرایند شعاع مدار الکترون ثابت بماند. نشان دهید که این کار را می توان با طراحی آهن ربایی انجام داد که میانگین میدان مغناطیسی آن روی سطح مدار الکترون دو برابر میدان در پیرامون مدار باشد (شکل ۳۸ را ببینید). فرض کنید در نبود میدان الکترون از سرعت صفر آغاز به حرکت می کند و ابزار نسبت به مرکز مدار الکترون متقارن است. برای این که نگران اثر های نسبیتی نباشیم فرض کنید سرعت الکترون به سرعت های نسبیتی نمی رسد.



شکل ۳۸- میدان مغناطیسی بتاترون

حل: نخست فرمول سیکلوترون را در نطر بگیرید

$$qvB = mv^2/R \Rightarrow qBR = mv \qquad (۱۰۵)$$

حالا اگر قرار باشد که R ثابت بماند، باید داشته باشیم

$$qR\frac{dB}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma = F = qE \qquad (۱۰۶)$$

بنابراین

$$E = R\frac{dB}{dt} \qquad (۱۰۷)$$

اما همچنین داریم

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (۱۰۸)$$

پس

$$E(2\pi R) = -d\Phi/dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2\pi R}\frac{d\Phi}{dt} = R\frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi R^2}\Phi\right) + c \qquad (۱۰۹)$$

اگر در زمان $t = 0$ میدان مغناطیسی صفر باشد، آنگاه ثابت انتگرال گیری در رابطه ی (۱۰۹) صفر است و اندازه ی میدان برابراست با

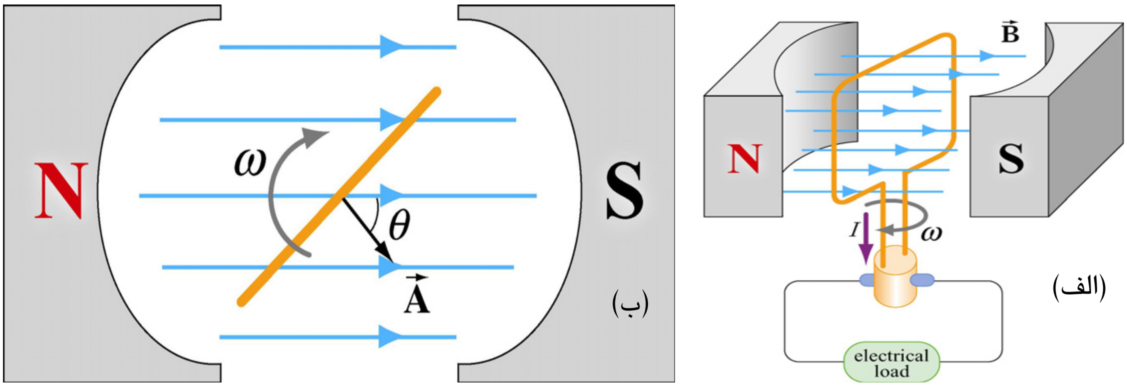
$$B = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi R^2}\Phi\right) \qquad (۱۱۰)$$

یا به بیان دیگر میدان معناطیسی در فاصله ی R باید نصف میدان میانگینی باشد که از سطح مدار الکترون می گذرد.

۸-مولدها

یکی از مهم ترین کاربردهای قانون فاراده در مولدها و موتورهاست. مولد انرژی مکانیکی را به انرژی

الکتریکی تبدیل و موتور انرژی الکتریکی را به انرژی مکانیکی بر می گرداند. شکل (۳۹) مولد ساده ای را نشان می دهد که از پیچه ای با N حلقه تشکیل شده است و در میدان مغناطیسی یکنواختی می چرخد.



شکل ۳۹ – (الف) نمای یک مولد. (ب) حلقه ی چرخان در میدان مغناطیسی– نمای از بالا

کار کرد دینام یک دوچرخه هم همین گونه است. شار مغناطیسی گذرنده از پیچه با زمان تغییر می کند و نیروی محرکه به وجود می آورد. از شکل (۳۹– ب) دیده می شود که می توان شار گذرنده از یک حلقه ی پیچه را به صورت زیر نوشت

$$\Phi = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = BA\cos\theta = BA\cos\omega t \tag{۱۱۱}$$

آهنگ تغییر شار حلقه عبارت است از

$$\frac{d\Phi}{dt} = -BA\omega\sin\omega t \tag{۱۱۲}$$

چون پیچه N حلقه دارد نیروی محرکه ی القایی کل بین دو سر پیچه عبارت است از

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi}{dt} = NBA\sin\omega t \tag{۱۱۳}$$

اگر این مولد را به مداری با مقاومت R (مانند چراغ دوچرخه) وصل کنیم از مدار جریانی برابر

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{NBA\omega}{R}\sin\omega t \tag{۱۱۴}$$

می گذرد. این جریان نوسانی (متناوب ، یعنی علامتش تغییر می کند) با دامنه ی $I_0 = NBA\omega/R$ است.

توانی که مولد به مدار انتقال می دهد برابر است با

$$P = I\,|\mathcal{E}| = \frac{(NBA\omega)^2}{R}\sin^2\omega t \tag{۱۱۵}$$

از سوی دیگر در میدان مغناطیسی به پیچه گشتاور وارد می شود و برابر است با

$$\tau = \mu B\sin\theta = \mu B\sin\omega t \tag{۱۱۶}$$

بنابراین ، توان مکانیکی برای چرخاندن پیچه برابر است با

$$P_m = \tau\omega = \mu B\omega\sin\omega t \tag{۱۱۷}$$

μ در رابطه های (۱۱۶) و (۱۱۷) گشتاور دوقطبی مغناطیسی پیچه است و برای پیچه ای با N حلقه برابر است با

$$\mu = N\,(IA) = \frac{N^2 A^2 B\omega}{R}\sin\omega t \qquad (۱۱۸)$$

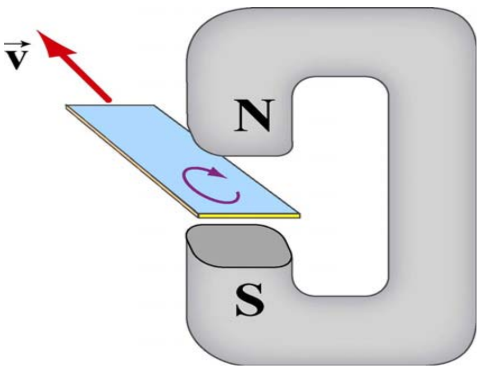
و در نتیجه، توان مکانیکی را می توان به صورت زیر نوشت

$$P_m = \left(\frac{N^2 A^2 B\omega}{R}\sin\omega t\right) B\omega \sin\omega t = \frac{(NAB\omega)^2}{R}\sin^2\omega t \qquad (۱۱۹)$$

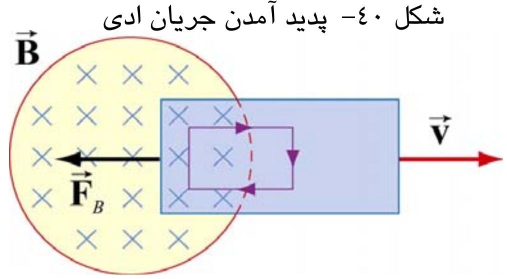
اما این همان نتیجه ای است که در رابطه ی (۱۱۵) به دست آوردیم. این چنین هم باید باشد: توان مکانیکی ورودی و توان الکتریکی خروجی با هم برابر اند.

۹- جریان های ادی (*Eddy Currents*)

در مثال هایی که تاکنون بررسی کردیم همواره از حلقه ی رسانا استفاده کردیم که در میدان مغناطیسی حرکت می کرد و در اثر تغییر شار گذرنده از آن، جریان القاء می شد. اگر به جای حلقه از رسانای صلب هم استفاده کنیم و در میدان مغناطیسی همانند شکل (۴۰) به حرکت در آوریم باز هم در رسانا جریان القاء می شود. این جریان چرخشی است و **جریان ادی** نامیده می شود. جریان ادی هم مانند هر جریان دیگر نیروی مغناطیسی تولید می کند که با حرکت رسانا در میدان آهن ربا مخالفت می کند و از این رو حرکت دادن رسانا در میدان مغناطیسی آهن ربا دشوارتر می شود. در شکل (۴۱ این نیرو نشان داده شده است.



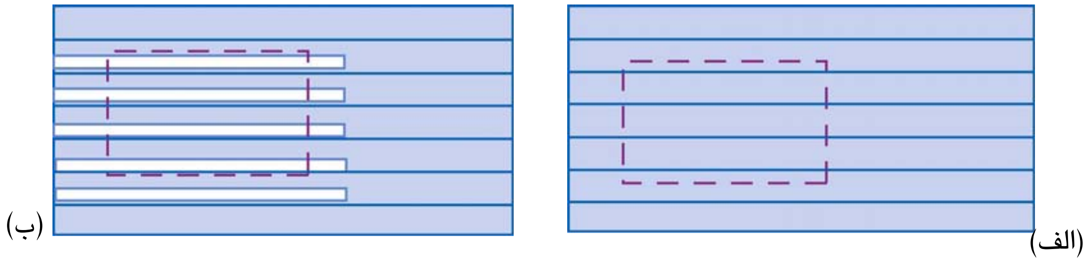
شکل ۴۰- پدید آمدن جریان ادی



شکل ۴۱- نیروی مغناطیسی جریان ادی که با حرکت رسانا در میدان مخالفت می کند

چون مقاومت رسانا صفر نیست، $R \neq 0$، در اثر گرم شدگی ژول در رسانا توانی به اندازه ی $P = \mathcal{E}^2/R$ تلف می شود. بنابراین، با افزایش R می توان از توان اتلافی کاست. یکی از راه های زیاد کردن R ، این است که جسم رسانا را به صورت ورقه در آوریم . برای این کار ورقه را می توان از به هم چسباندن باریکه های نازک ساخت وبین باریکه ها ماده ی نارسانا قرار دارد که آنها را از هم جدا نگه دارد شکل (۴۲-الف). روش دیگر برای زیاد کردن مقاومت و در نتیجه کاستن از جریان ادی ایجاد برش در ورقه ی رسانا، مانند شکل (۴۲- ب) است. با این کار در مسیر رسانش اخلال به وجود می آید و مقاومت افزایش می یابد.

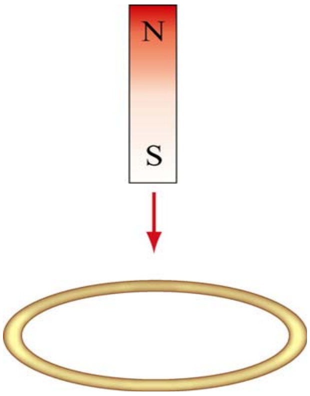
جریان های ادی کاربردهای مهم دارد. برای نمونه، می توان از آن برای حذف نوسان های مکانیکی ناخواسته استفاده کرد. کاربرد دیگر آن در سامانه های ترمزهای مغناطیسی در قطارهای پرسرعت است.



شکل۴۲- کاستن از جریان ادی به وسیله ی (الف) ورقه کردن رسانا، (ب) ایجاد برش در ورقه

پرسش های مفهومی

۱- در شکل (۴۳) آهن ربای میله ای به سوی حلقه ی رسانا سقوط می کند .

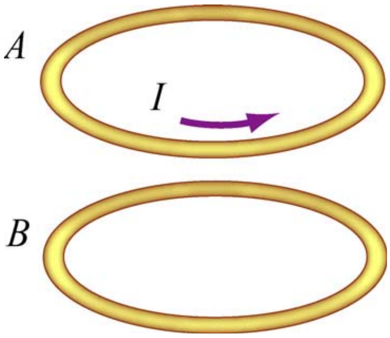


شکل ۴۳- آهن ربای در حال سقوط

(الف): تغییر شار گذرنده از حلقه را وقتی آهن ربا در بالای حلقه است و هنگامی که در زیر حلقه قرار دارد، به طور کیفی توصیف کنید.

(ب): نموداری برای جریان القایی در حلقه برحسب زمان رسم کنید. برای جریان پادساعتگرد جهت مثبت را برگزینید.

۲- صفحه های دو حلقه ی دایره شکل (۴۴) موازی اند. از حلقه ی A جریان پادساعتگرد می گذرد.



شکل ۴۴- دو حلقه ی موازی

(الف): اگر جریان در حلقه ی A با زمان کاهش پیدا کند، جهت جریان القایی در حلقه ی B چیست؟ آیا دو حلقه یکدیگر را می رانند یا می ربایند؟

(ب): اگر جریان در حلقه ی A با زمان افزایش پیدا کند، جهت جریان القایی در حلقه ی B چیست؟ آیا دو حلقه یکدیگر را می رانند یا می ربایند؟

۳- پوسته ی کروی رسانایی در میدان مغناطیسی متغیر با زمان قرار دارد. آیا جریان القایی در استوای کره می گردد؟

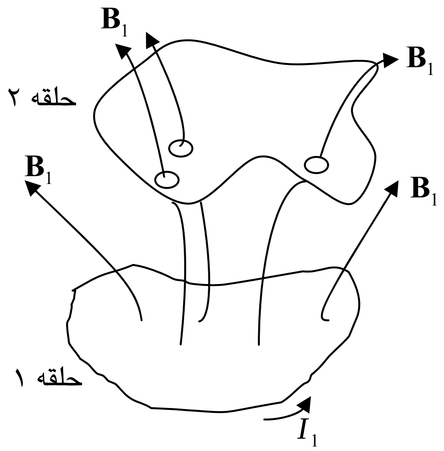
۴- حلقه ای مستطیل شکل در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می کند اما جریان القایی در حلقه صفر است. آیا این شدنی است؟ توضیح دهید.

القاوری و انرژی مغناطیسی

۱- القاء متقابل

دو حلقه سیم را برابر شکل (۱) در حال سکون در نظر بگیرید و فرض کنید که از حلقه سیم شماره ۱ جریان I_1 می گذرد. این جریان در پیرامون حلقه ی ۱ میدان مغناطیسی $\mathbf{B}_1$ تولید می کند. برخی از خط های میدان مغناطیسی از حلقه ی ۲ می گذرند. برای محاسبه ی میدان $\mathbf{B}_1$ ناگزیریم از قانون بیو- ساوار استفاده کنیم.

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{۱}$$



شکل ۱- القاوری

در حالت عمومی و برای حلقه ی با شکل دلخواه محاسبه میدان $\mathbf{B}_1$ کار دشواری است. اما اگر به قانون بیو- ساوار دقت کنیم می بینیم که این میدان با جریان I_1 متناسب است. این واقعیت مهمی است. چون برخی خط های این میدان از حلقه ی ۲ می گذرند، شار گذرنده از حلقه ی ۲

$$\Phi_2 = \int_2 \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 \tag{۲}$$

هم با جریان I_1 متناسب است. انتگرال روی سطح حلقه ی ۲ گرفته شده است. بنابراین داریم

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \tag{۳}$$

M_{21} ضریب تناسب بین شار گذرنده از حلقه ی ۲ ، Φ_2، و جریان گذرنده از حلقه ی ۱ است و **القاء متقابل** دو حلقه نام دارد. محاسبه ی القاء متقابل در بسیاری حالت ها کار بسیار دشواری است. با وجود این اگر آن را برحسب پتانسیل برداری بنویسیم، رابطه ای به دست می آید که به ظاهر ساده می آید :

$$\Phi_2 = \int_2 \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 = \oint_2 \left(\nabla \times \mathbf{A}_1\right) \cdot d\mathbf{a}_2 = \oint_2 \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \tag{۳}$$

پتانسیل برداری $\mathbf{A}_1$ با رابطه ی (۸۹) فصل پیش به صورت زیر داده شده است

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1}{r} \tag{٤}$$

که اگر در رابطه ی (۳) قرار دهیم خواهیم داشت

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_2 \left(\oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1}{r} \right) \cdot d\mathbf{l}_2 \tag{٥}$$

با توجه به رابطه ی (۳) دیده می شود که M_{21} عبارت است از

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_2 \left(\oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1}{r} \right) \cdot d\mathbf{l}_2 \tag{٦}$$

رابطه ی (٦) **فرمول نیومان** است و یک انتکرال دوگانه ی خطی است. یک انتگرال روی حلقه ی ۱ و دیگری روی حلقه ی ۲. محاسبه و کار کردن با این رابطه آسان نیست و ما هم تلاشی برای حساب کردنش نخواهیم کرد. با وجود این، رابطه بالا دو نکته ی مهم در باره القاء متقابل M_{21} را آشکار می کند.

۱- نشان می دهد که M_{21} یک کمیت کاملا هندسی است و به اندازه ی حلقه ها (dl_1 و dl_2) و به شکل و فاصله ی آنها از یکدیگر (r) بستگی دارد.

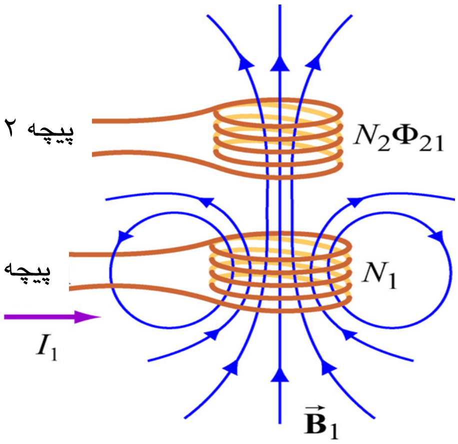
۲- اگر نقش حلقه های ۱ و ۲ را باهم عوض کنیم، یعنی جریان I_1 را از حلقه ی ۲ بگذرانیم و شار گذرنده از حلقه ی ۱ را حساب کنیم، انتگرال رابطه ی (٦) تغییر نمی کند. به بیان دیگر

$$M_{21} = M_{12} \equiv M \qquad (۷)$$

این نتیجه ی بسیار چشمگیری است: *اگر جریان I از حلقه ی ۱ بگذرد، شار گذرنده از حلقه ی ۲ درست برابر است با شار گذرنده از حلقه ی ۱ وقتی همان جریان از حلقه ی ۲ بگذرد. این نتیجه مستقل از شکل و مکان حلقه ها ست.* این **قضیه ی وارونی** است و خواهیم دید که برای حل مسئله بسیار سودمند است.

یکای M در سامانه ی یکاهای SI هنری (H) است: $1H = 1T \cdot m^2/A$ یا ولت- ثانیه بر آمپر است.

در شکل (۲) دو پیچه نشان داده شده است. تعداد حلقه های پیچه ی پایین N_1 است و از آن جریان I_1 می گذرد. تعداد حلقه های پیچه ی بالا N_2 است. اگر جریان I_1 با زمان تغییر کند شار گذرنده از پیچه ی ۲ هم با زمان تغییر خواهد کرد. با تغییر شار، در پیچه ی ۲ نیروی محرکه ی القایی تولید می شود



شکل ۲- القاء متقابل دو پیچه

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt}(MI_1) = -N_2 M \frac{dI_1}{dt} \qquad (۸)$$

این نیروی محرکه سبب می شود که در پیچه ی ۲ جریان القایی برقرار شود. اگر فکرش را بکنید، می بینید که این یک پدیده ی چشمگیری است. بدون هیچ سیم رابط یا باتری در پیچه ای که در مکان دیگری قرار دارد می توان جریان الکتریکی ایجاد کرد. کافی است در مدار دیگری جریان الکتریکی را تغییر دهیم. مقدار جریانی که از پیچه ۲ می گذرد به مقاومت وماهیت پیچه بستگی دارد.

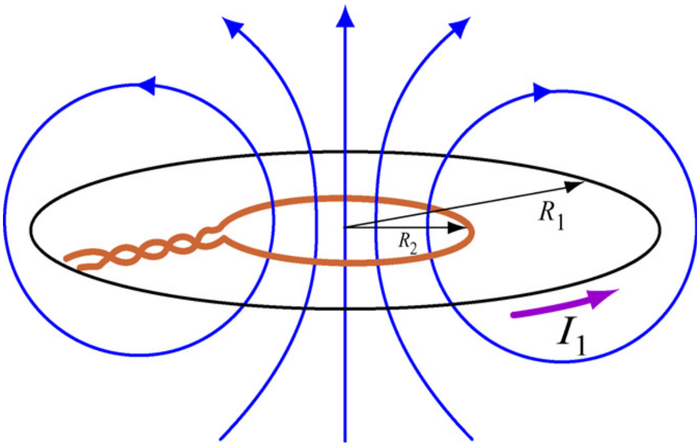
مثال ۱- القاء متقابل دو حلقه ی هم مرکز وهم صفحه: دو حلقه به شعاع های R_1 و R_2 ($R_2 \gg R_1$) را برابر شکل (۳) در نظر بگیرید. حلقه ها در یک صفحه قرار دارند و هم مرکز اند. القاء متقابل آنها را حساب کنید.

حل: جریان I_1 گذرنده از حلقه ی بیرونی در مرکز حلقه ی درونی میدانی به اندازه ی

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \qquad (۹)$$

تولید می کند. این همان میدان جریان دایره ای در مرکز دایره است. با فرض $R_2 \gg R_1$ می توانیم میدان را در همه جای حلقه ی درونی برابر B_1 فرض کنیم. بنابراین، شار گذرنده از حلقه ی دوم (حلقه ی درونی)

عبارت است از



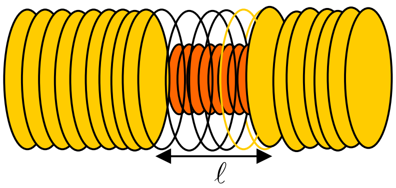
شکل ۳– القاء متقابل دو حلقه ی هم مرکز و هم صفحه

$$\Phi_2 = B_1 A_2 = \left(\frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\right)\pi R_2^2 = \frac{\mu_0 \pi I_1 R_2^2}{2R_1} \qquad (۱۰)$$

بنابراین، القاء متقابل M عبارت است از

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \qquad (۱۱)$$

مثال ۲– دو سولونویید هم محور: سولونویید کوتاهی به طول ℓ و شعاع R با N_1 دور در واحد طول برابر شکل (٤) در درون سولونویید بسیار درازی با N_2 دور در واحد طول و هم محور با آن قرار دارد. از سولونویید کوتاه جریان I می گذرد. شار گذرنده از سولونویید دراز را حساب کنید.



شکل ٤– سولونوید کوتاه و سولونویید دراز

حل: این مثال یکی از نمونه های زیبا ست که سودمندی قضیه ی وارونی را نشان می دهد. چون سولونویید درونی کوتاه است، میدان مغناطیسی آن بسیار پیچیده است. افزون بر این، شدت میدان آن از یک حلقه به حلقه ی دیگر سولونویید دراز فرق دارد. بنابراین ، شار گذرنده از هر حلقه ی سولونویید دراز با شار گذرنده از حلقه ی دیگر یکسان نیست. در نتیجه، برای حل مسئله باید میدان سولونویید کوتاه را در مکان تک تک حلقه های سولونویید دراز حساب کنیم و سپس شار گذرنده از هر حلقه را به دست آوریم. این کار دشواری است. قضیه ی وارونی در اینجا کارساز است. اگر جریان I را از سولونویید دراز بگذرانیم، چون میدان سولونویید دراز در درون آن یکنواخت است پس شار یکسانی از هر حلقه ی سولونویید کوتاه خواهد گذشت. میدان سولونویید دراز عبارت است از

$$B = \mu_0 N_2 I \qquad (۱۲)$$

و شار گذرنده از یک حلقه ی سولونویید کوتاه برابر است با

$$\Phi_1 = B\pi R^2 = \mu_0 N_2 I \pi R^2 \qquad (۱۳)$$

تعداد حلقه های سولونویید کوتاه $N_1\ell$ است و بنابراین شار کل گذرنده از آن برابر است با

$$\Phi = (N_1\ell)\Phi_1 = (\mu_0 \pi R^2 N_1 N_2 \ell) I \qquad (۱٤)$$

این هم چنین شاری است که اگر جریان I از سولونوييد کوتاه بگذرد، در سولونوييد دراز ایجاد می کند. بنابراین پاسخ مسئله نیر است. توجه کنید که القاء متقابل این دو پیچه هم از رابطه ی (۱٤) آشکار است

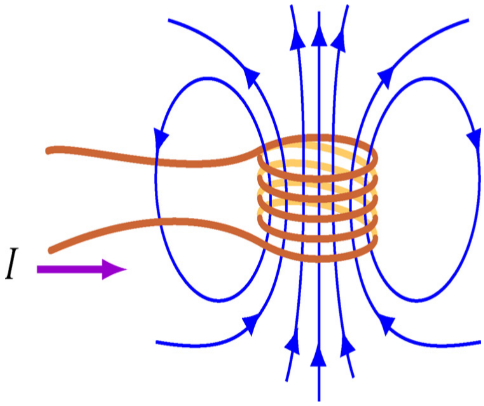
$$M = \frac{\Phi}{I} = (\mu_0 \pi R^2 N_1 N_2 \ell) \qquad (۱۵)$$

۲- خود القاء

در شکل ۱ دیدیم که اگر جریان در حلقه ی ۱ تغییر کند شار گذرنده از حلقه ی ۲ هم تغییر می کند و قانون فاراده می گوید که تغییر شار در حلقه ی ۲ نیروی محرکه ایجاد می کند.

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} \qquad (۱٦)$$

اما جریان متغیر در یک حلقه نه تنها شار گذرنده از حلقه ی همسایه را تغییر می دهد و در آن نیروی محرکه القاء می کند، بلکه در خودش هم نیروی محرکه تولید می کند. چون شار مغناطیسی گذرنده از خودش هم تغییر می کند. شکل (۵) پیچه ای را با N حلقه نشان می دهد که از آن جریان پادساعتگرد I می گذرد. اگر جریان پایا باشد، شار مغناطیسی گذرنده از پیچه هم مقدار ثابتی خواهد بود. اما اگر جریان I با زمان تغییر کند، بنا به قانون فاراده، نیروی محرکه ی القایی به وجود خواهد آمد و با تغییر شار گذرنده از پیچه مخالفت خواهد کرد. اگر $dI/dt > 0$ باشد، نیروی محرکه ی القایی،



شکل ۵- شار مغناطیسی گذرنده از پیچه

جریان القایی در مدار به وجود خواهد آورد که ساعتگرد است و اگر $dI/dt < 0$ جریان القایی پادساعتگرد است. ویژگی حلقه ای که در آن میدان مغناطیسی خود حلقه با تغییر جریان در آن مخالفت می کند "**خود القایی**" نامیده می شود و نیروی محرکه ای که تولید می شود" **نیروی محرکه ی خود القاء**" یا "**نیروی محرکه ی بازدارنده**" نام دارد و ما آن را با $\mathcal{E}_L$ نشان خواهیم داد. همه ی مدارهای حامل جریان از این ویژگی برخوردارند. به ویژه این که خودِ القاگر، عنصر مدار است . برای نشان دادن آن از نماد  استفاده می شود. به طور ریاضی داریم

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۱۷)$$

که در آن $\Phi = N\,\Phi_1$ شار کل گذرنده از پیچه است. چون میدان با جریان متناسب است، شار هم با جریان متناسب است و می توان نوشت

$$\Phi = LI \qquad (۱۸)$$

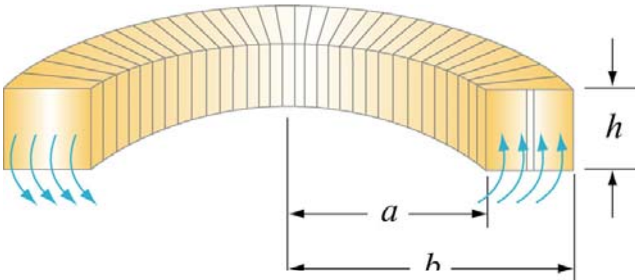
ضریب تناسب L **خودالقایی** مدار است و همانند M به هندسه (اندازه و شکل حلقه یا پیچه) بستگی دارد.

یکای خود القا ، L هنری است. از رابطه های (۱۷) و (۱۸) نتیجه می شود که

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad (۱۹)$$

از نظر فیزیکی، L سنجه ای برای مقاومت القاگر در برابر تغییر جریان است. هرچه L مدار بزرگتر باشد، آهنگ تغییر جریان هم کندتر است.

مثال ۳- خود القاء چنبره (توروئید): در شکل (٦) برشی از یک چنبره با سطح مقطع مستطیل نشان داده شده است. شعاع درونی چنبره a و شعاع بیرونی آن b است. ارتفاع چنبره h و تعداد دور سیم ها n است. خود القاء چنبره را حساب کنید.

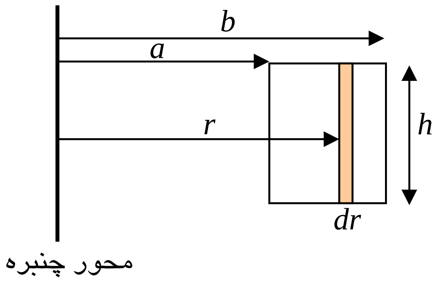


شکل ٦- چنبره ای با سطح مقطع مستطیل

حل: میدان مغناطیسی در درون چنبره عبارت است از

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2\pi r} \qquad (۲۰)$$

در شکل (۷) یکی از حلقه های چنبره نشان داده شده است. شار گذرنده از این حلقه برابر است با



شکل ۷- یکی از حلقه های چنبره

$$\Phi_1 = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 nI}{2\pi} h \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 nI}{2\pi} h \;\ell n\left(b/a\right) \qquad (۲۱)$$

پس ، شار کل گذرنده از n حلقه ی چنبره برابر است با

$$\Phi = n\Phi_1 = \frac{\mu_0 n^2 hI}{2\pi}\ell n\left(b/a\right) \qquad (۲۲)$$

با توجه به رابطه ی (۱۸)، یعنی $\Phi = LI$ نتیجه می گیریم که خود القاء چنبره عبارت است از

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 n^2 h}{2\pi}\ell n\left(b/a\right) \qquad (۲۳)$$

باز هم دیده می شود که خود القا L فقط به عمامل هندسی بستگی دارد. وضعیتی را در نظر بگیرید که در آن $a \gg b-a$ باشد. در این حد می توان قسمت لگاریتمی رابطه ی (۲۳) را بسط داد:

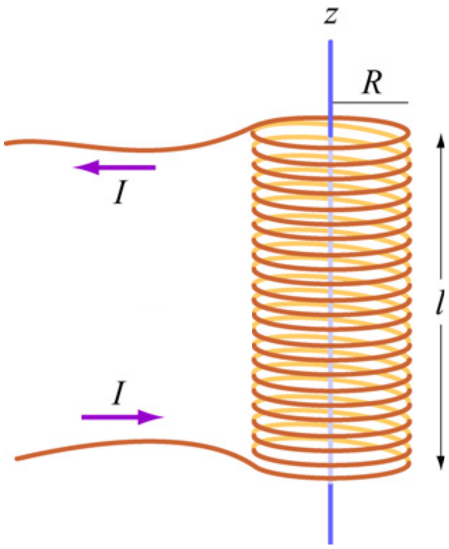
$$\ell n\left(\frac{b}{a}\right) = \ell n\left(1 - \frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a} \qquad (۲٤)$$

در این حد رابطه ی (۲۳) به صورت زیر در می آید

$$L = \frac{\mu_0 n^2 h}{2\pi}\frac{b-a}{a} = \frac{\mu_0 n^2 A}{2\pi a} = \frac{\mu_0 n^2 A}{\ell} \qquad (۲٥)$$

که در آن $A = h(b-a)$ مساحت سطح مقطع و $\ell = 2\pi a$ است. در این حد دیده می شود که خود القا توروپید همانند خود القا سولونوپید (مثال ٤ را در زیر ببینید) می شود.

مثال ۵- خود القا پیچه یا سولونویید: از پیچه ی شکل (۸) با n دور در واحد طول و به طول ℓ و شعاع R جریان I می گذرد. طول پیچه را دراز فرض کنید و از اثر های لبه چشم پوشی کنید و خود القا پیچه را حساب کنید



شکل ۸- پیچه ی دراز

حل: چون پیچه را دراز فرض کردیم، می توانیم از قانون آمپر برای محاسبه ی میدان آن استفاده کنیم:

$$\mathbf{B} = \mu_0 nI\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲۶)$$

شار گذرنده از هر حلقه عبارت است از

$$\Phi_1 = BA = \mu_0 nI\,(\pi R^2) \qquad (۲۷)$$

تعداد حلقه های پیچه $N = n\ell$ است و شار کل گذرنده از پیچه برابر است با

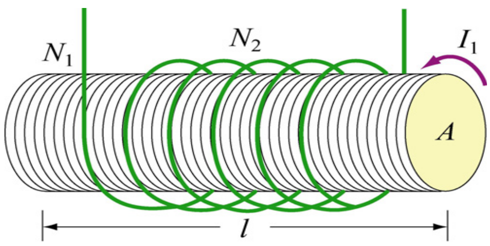
$$\Phi = N\,\Phi_1 = (n\ell)\mu_0 nI\,(\pi R^2) = \mu_0 n^2 I\,\pi R^2 \ell \qquad (۲۸)$$

و خود القا ء آن عبارت است از $L = \Phi/I$

$$L = \Phi/I = \mu_0 \pi n^2 R^2 \ell \qquad (۲۹)$$

باز هم دیده می شود که L فقط به هندسه (R, ℓ, n) وابسته است.

مثال ۶- القاء متقابل پیچه و حلقه های سیم: از پیچه ی درازی به طول ℓ ، سطح مقطع A و تعداد دور N_1 جریان I_1 می گذرد. سیم روپوش داری برابر شکل (۹) N_2 دور حول پیچه پیچیده شده است.



شکل ۹- پیچه و سیم دور آن

(الف) : فرض کنید تمام شار مغناطیسی پیچه از سیم روپوش دار می گذرد و القاء متقابل M آنها را حساب کنید.

(ب): رابطه ای بین القاء متقابل M و خود القاء های پیچه L_1 و سیم روپوش دار L_2 بیابید.

حل: **(الف)** شار مغناطیسی پیچه ی درونی از هر یک از حلقه های سیم روپوش دار می گذرد. میدان پیچه در درون آن یکنواخت و برابر است با $B = \mu_0 N_1 I_1/\ell$. شار گذرنده از حلقه های سیم برابر است با

$$\Phi_{21} = BA = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell}(N_2 A) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A I_1}{\ell} \quad \Rightarrow M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell} \qquad (۳۰)$$

(ب): در مثال ۵ دیدیم که خود القاء پیچه عبارت است از

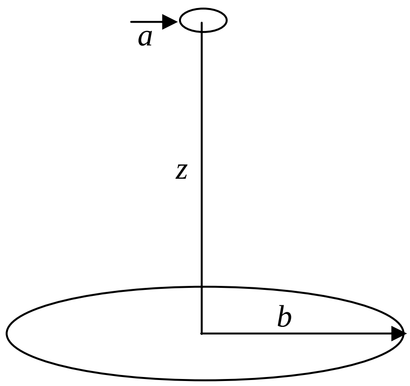
$$L_1 = \mu_0 \pi n^2 R^2 \ell = \mu_0 N_1^2 (\pi R^2) / \ell = \mu_0 N_1^2 A / \ell \qquad (۳۱)$$

به همین ترتیب برای پیچه ی روپوش دار داریم $L_2 = \mu_0 N_2^2 A/\ell$. بنابراین، برحسب L_1 و L_2 می توان M را به صورت زیر نوشت

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \qquad (۳۲)$$

در حالت عمومی تر القاء متقابل با $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ داده می شود که در آن $0 \le k \le 1$ است. k "ضریب جفت شدگی" نام دارد. در مثال ما $k = 1$ بود و به این معنی است که همه ی شار پیچه ی درونی از پیچه ی بیرونی می گذرد و برعکس.

مثال ۷- حلقه‌ی ریز و حلقه‌ی درشت: حلقه‌ی کوچکی به شعاع a برابر شکل (۱۰) در فاصله‌ی z از حلقه-ی بزرگ‌تر با شعاع b قرار دارد. صفحه‌های دو حلقه موازی و بر محور مشترکشان عمود است



شکل ۱۰- حلقه ی ریز، حلقه ی درشت

(الف): فرض کنید جریان I از حلقه ی بزرگ می گذرد. شار گذرنده از حلقه ی کوچک را حساب کنید. (حلقه ی کوچک به اندازه ای ریز است که می توانید میدان حلقه ی بزرگ را در صفحه ی حلقه ی کوچک ثابت فرض کنید.)

(ب): فرض کنید جریان I در حلقه ی کوچک جریان دارد. شار گذرنده از حلقه ی بزرگ را حساب کنید (چون حلقه ی کوچک خیلی ریز است آن را همانند یک دو قطبی آرمانی فرض کنید.)

(پ): القاء متقابل را حساب کنید و نشان دهید که $M_{12} = M_{21}$.

حل: **(الف)** میدان حلقه ی بزرگ در فاصله ی z از مرکز آن و در روی محورش را پیش تر حساب کردیم (نگاه کنید به رابطه ی (۲٤) فصل "چشمه ی میدان مغناطیسی")

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{\left(b^2 + z^2\right)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \qquad (۳۳)$$

بنابراین، شار گذرنده از حلقه ی کوچک با مساحت πa^2 عبارت است از

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2} \frac{\pi I a^2 b^2}{\left(b^2 + z^2\right)^{3/2}} \qquad (۳٤)$$

(ب): حلقه ی کوچک یک دو قطبی مغناطیسی آرمانی است. میدان آن به صورت زیر است (نگاه کنید به رابطه های (۷٦) و (۷۷) فصل "چشمه ی میدان مغناطیسی")

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} (2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) \qquad (۳۵)$$

که در آن $\mu = I\pi a^2$ گشتاور دو قطبی است. اگر از این میدان روی رویه ای "عرقچین مانند" (که مرکزش در حلقه ی کوچک است وبا حلقه ی بزرگ محدود شده است) انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\pi a^2}{r^3}\int (2\cos\theta)(r^2 \sin\theta d\theta d\phi) = \frac{\mu_0 I a^2}{2r}2\pi\int_0^{\theta}\cos\theta' \sin\theta' d\theta' \tag{۳۶}$$

در در آن $r = \sqrt{b^2 + z^2}$ و $\sin\theta = b/r$ اند. بنابراین داریم

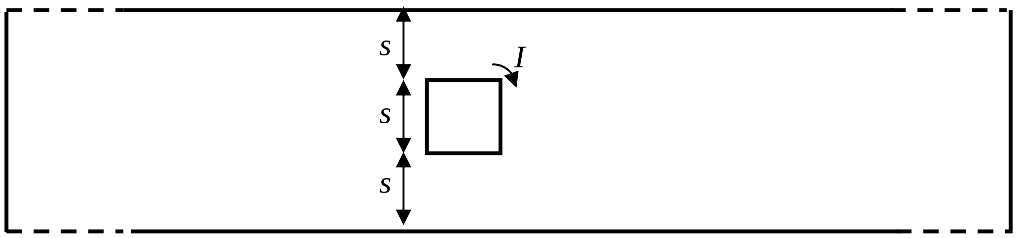
$$\Phi = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{r}\frac{\sin^2\theta'}{2}\bigg|_0^{\theta} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 b^2}{2\left(b^2+z^2\right)^{3/2}} \tag{۳۷}$$

که با پاسخ قسمت (الف) در رابطه ی (۳٤) یکی است !

(پ): از تقسیم رابطه های (۳٤) و (۳۷) به I (توجه کنید: $\Phi_2 = M_{21} I_1$ ، $\Phi_1 = M_{12} I_2$) داریم

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2\left(b^2+z^2\right)^{3/2}} \tag{۳۸}$$

مثال ۸- حلقه ی مربع بین دو سیم بینهایت دراز: حلقه ی سیمی مربع شکل به ضلع s در وسط دو سیم بینهایت دراز به فاصله ی $3s$ از یکدیگر قرار دارد (در واقع سیم های بینهایت دراز دو ضلع یک مستطیل اند که پهناهایش در بینهایت قرار دارند.) شکل (۱۱) را ببینید. جریان ساعتگرد I در حلقه ی مربع جاری است و با آهنگ ثابتی افزایش می یابد: $dI/dt = k$. نیروی محرکه ی القایی را در حلقه ی بزرگ به دست آورید. جهت جریان القایی در حلقه ی بزرگ چیست؟



شکل ۱۱- حلقه ی مربع در وسط دو سیم بینهایت دراز

حل: داریم $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = M\, dI/dt = Mk$. اما محاسبه ی M برحسب جریان گذرنده از حلقه ی کوچک دشوار است. زیرا میدان مغناطیسی حلقه ی مربع در نقاط مختلف حلقه ی بزرگ متفاوت است و محاسبه ی شار گذرنده از حلقه ی بزرگ را دشوار می کند. بهتر است از برابری القاء متقابل ، یعنی قضیه ی وارونی استفاده کنیم. فرض کنید جریان I از حلقه ی بزرگ می گذرد و شار گذرنده از حلقه ی مربع را حساب کنید: $\Phi = MI$. میدان یک سیم بینهایت دراز عبارت است از $B = \mu_0 I/(2\pi r)$. پس، شاری که در اثر این میدان از حلقه ی مربع می گذرد برابر است با

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_s^{2s}\frac{1}{r}dr = \frac{\mu_0 I s}{2\pi}\ell n 2 \tag{۳۹}$$

شار کل گذرنده از حلقه ی مربع در اثر میدان هر دو سیم دراز دو برابر این مقدار است (سیم های پهنا سهمی در شار گذرنده از مربع ندارند چون آنها در بینهایت اند و میدانشان در مکان حلقه ی مربع صفر

است.)

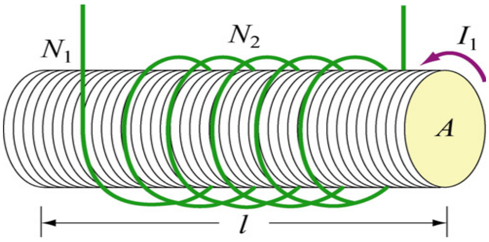
$$\Phi = 2\Phi_1 = \frac{\mu_0 I s}{\pi}\ell n 2 \tag{٤٠}$$

پس اندازه ی نیروی محرکه ی القایی برابر است با

$$M = \frac{\mu_0 s\ \ell n 2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{\mu_0 k\ s\ \ell n 2}{\pi} \tag{٤١}$$

جهت آن چیست؟ شار خالصی که در اثر جریان درحلقه ی مربع از حلقه ی بزرگ می گذرد به سوی درون صفحه است (چرا؟ خط های میدان حلقه ی مربع در ناحیه ی درون آن به سوی *درون صفحه* است و در بیرون آن به سوی *بیرون از صفحه* است . حلقه ی بزرگ همه ی خط های درون سو را در بر دارد اما تنها بخشی از خط های میدان برون سو را در بر می گیرد. بنابراین شار خالص گذرنده از حلقه ی بزرک درون سو است.) این شار افزایشی است و بنابراین، جریان القایی در حلقه ی بزرگ چنان است که میدان آن به سوی بیرون از صفحه است. در نتیجه این جریان پادساعتگرد است.

مثال ۹- مبدل یا ترانسفورماتور: یک بار دیگر آرایه ی مثال ٦ را در نظر بگیرید و فرض کنید که سیم ها چنان پیچیده شده اند که شار یکسانی از هر حلقه می گذرد (در عمل این کار با داخل کردن مغزی آهنی در استوانه انجام می گیرد. اثر مغزی این است که شار را متمرکز می کند.) تعداد دورهای پیچه ی "اولیه" N_1 و تعداد دورهای پیچه ی"ثانوی" N_2 اند (شکل ۱۲) . اگر جریان I_1 در پیچه ی اولیه متغیر باشد، نشان دهید که نیروی محرکه ی القایی در پیچه ی ثانوی با رابطه ی زیر داده می شود



شکل ۱۲- مبدل یا ترانسفورماتور

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{٤٢}$$

$\mathcal{E}_1$ نیروی محرکه ی بازدارنده یا خود القا در پیچه ی اصلی است. این مدار، ساختار یک مبدل یا ترانسفورماتور است ؛ وسیله ای که نیروی محرکه ی جریان متناوب را افزایش یا کاهش می دهد. با انتخاب تعداد دورهای مناسب ، هر نیروی محرکه ی دلخواه ثانوی را می توان به دست آورد.

حل: شار میدان B گذرنده از تک حلقه ی هریک از پیچه ها را Φ بنامید. بنابراین داریم $\Phi_1 = N_1\Phi$ و $\Phi_2 = N_2\Phi$. پس

$$\mathcal{E}_1 = -N_1\frac{d\Phi}{dt} \quad , \quad \mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{٤٣}$$

۳- انرژی در میدان های مغناطیسی

هر مداری القاوری دارد. آن را با L نشان دادیم و گفتیم که L همانند یک مقاومت رفتار می کند وسنجه ای برای مقاومت مدار در برابر تغییر شار مغناطیسی گذرنده از آن یا تغییر جریان در مدار است. بنابراین ، اگر بخواهیم جریانی در مدار برقرار کنیم باید مقداری کار انجام دهیم و بر این مقاومت در برابر تغییر جریان در مدار چیره شویم. برای به راه انداختن جریان در یک مدار به انرژی نیار داریم. منظور من آن انرزی نیست که در مقاومت ها به صورت گرما تلف می شود، بلکه انرژی مورد نظر ما کاری است که در برابر نیروی محرکه ی بازدارنده باید هزینه شود تا جریان در مدار شارش پیدا کند. این انرژی را مدار دوباره به ما پس می دهد (شاید دیده باشید که وقتی رادیوی اتوموبیل را خاموش می کنید برای مدت کوتاهی پس از آن هنوز هم صدای رادیو شنیده می شود. این همان انرژی است که برای روشن کردن رادیو هزینه می شود و دوباره از مدار رادیو پس گرفته می شود.) می توان این انرژی یا کار را نوعی انرژی پتانسیل مدار پنداشت و خواهیم دید که در میدان مغناطیسی ذخیره می شود. از قضیه ی کار– انرژی نتیجه می گیریم که می توان انرژی را در خود القا ذخیره کرد. تقش خود القا در مغناطیس (مدار مغناطیسی) مانسته ی خازن در الکتریسیته (مدار الکتریکی) است.

توان یا آهنگی که نیروی محرکه ی خارجی $\mathcal{E}_{ext}$ (مانند باتری) برای چیره شدن به نیروی محرکه ی بازدارنده (یا نیروی محرکه ی خود القا) $\mathcal{E}_L$ هزینه می کند تا جریان I در مدار برقرار شود عبارت است از

$$P_L = \frac{dW_{ext}}{dt} = I\,\mathcal{E}_{ext} \qquad (٤٤)$$

اگر در مدار فقط نیروی محرکه ی خارجی (مثلا باتری) و خودالقا وجود داشته باشد، آنگاه $\mathcal{E}_{ext} = -\mathcal{E}_L$ است و بنابراین داریم

$$P_L = \frac{dW_{ext}}{dt} = -I\,\mathcal{E}_L = +LI\,\frac{dI}{dt} \qquad (٤٥)$$

اگر جریان افزایشی باشد، $dI/dt > 0$ آنگاه $P > 0$ است؛ یعنی کار عامل خارجی برای انتقال انرزی به خود القا مثبت است. بنابراین ، انرژی درونی U_B خود القا افزایش می یابد. اگر جریان کاهشی باشد، $dI/dt < 0$ توان منفی می شود، $P < 0$. در این صورت عامل خارجی از خود القا انرژی پس می گیرد و انرزی درونی آن را کاهش می دهد. کار کل عامل خارجی برای افزایش جریان از صفر به I برابر است با

$$W_{ext} = \int dW_{ext} = \int_0^I LI'\,dI' = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (٤٦)$$

کار عامل خارجی به مدت زمانی که طول می کشد تا جریان از صفر به مقدار نهایی آن برسد ،بستگی ندارد و فقط به هندسه ی حلقه یا مدار (از طریق L) و جریان نهایی I وابسته است .

کار عامل خارجی در رابطه ی (٤٦) با مقدار انرزی مغناطیسی که در خود القا ذخیره می شود برابر است

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (٤٧)$$

این رابطه مانسته ی انرژی الکتریکی است که در خازن ذخیره می شود:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (٤٨)$$

نکته: از دیدگاه انرژی، بین خود القا و مقاومت تفاوت مهمی وجود دارد. شارش جریان I در مقاومت انرژی را به مقاومت منتقل می کند و انرژی در آنجا به صورت گرما تلف می شود (توان تلف شده در مقاومت $P_R = IV_R = I^2R$ است). این فرایند مستقل از این است که جریان پایا باشد یا با زمان تغییر کند. اما فقط هنگامی انرژی در یک خود القاء آرمانی (بدون مقاومت) شارش پیدا می کند که تغییر جریان نسبت به زمان مثبت باشد، $dI/dt > 0$. انرژی در خود القا تلف نمی شود بلکه در آن ذخیره می شود و در زمانی دیرتر که جریان نسبت به زمان کاهش پیدا می کند، $dI/dt < 0$ ، دوباره آزاد می شود. اگر جریان گذرنده از خود القا پایا باشد، در انرژی تغییری روی نمی دهد چون $P_L = LI\left(dI/dt\right)$.

مثال ۱۰- انرژی پیچه: از پیچه‌ی درازی با طول ℓ ، شعاع R و تعداد دورهای N جریان I می گذرد. انرژی انباشته شده در این سامانه را حساب کنید.

حل: خود القایی پیچه ی دراز را در رابطه ی (۲۹) به دست آوردیم و برابر است با $L = \mu_0 \pi n^2 R^2 \ell$. پس

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 \pi n^2 R^2 \ell)I^2 \qquad (۴۹)$$

که در آن ($n = N/\ell$) است. این نتیجه را می توان برحسب میدان مغناطیسی پیچه، $B = \mu_0 nI$ ، نوشت:

$$U_B = \frac{1}{2}(\mu_0 \pi n^2 R^2 \ell)I^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\mu_0 nI\right)^2\left(\pi R^2 \ell\right) = \frac{B^2}{2\mu_0}\left(\pi R^2 \ell\right) \qquad (۵۰)$$

چون $\left(\pi R^2 \ell\right)$ حجم پیچه است و میدان نغناطیسی در درون پیچه یکنواخت است ، برای چگالی انرژی داریم

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (۵۱)$$

اگر میدان مغناطیسی یکنواخت هم نباشد، این رابطه باز هم برقرار است. رابطه (۵۱) مانسته ی چگالی انرژی الکتریکی انباشته شده در میدان الکتریکی است:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad (۵۲)$$

رابطه ی (۵۱) نمونه ای بر درستی ادعای ماست که انرژی در میدان مغناطیسی انباشته می شود. اثبات عمومی تر آن را در بخش بعدی خواهیم دید.

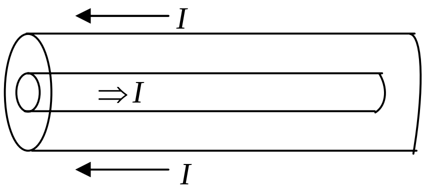
مثال ۱۱- سیم هم محور: سیم دراز هم محوری از دو پوسته ی استوانه ای تودر تو ساخته شده است. شعاع استوانه ی درونی a و شعاع استوانه ی بیرونی b است. جریان I همانند شکل (۱۳) از روی سطح استوانه ی درونی می گذرد و از روی سطح استوانه ی بیرونی برمی گردد . انرژی انباشته شده در طول ℓ سیم را حساب کنید

حل: بنا به قانون آمپر، میدان مغناطیسی در فضای بین استوانه ها عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (۵۳)$$

و در بقیه ی جاها صفر است. پس انرژی در واحد حجم برابر است با

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \qquad (٥٤)$$



شکل ۱۳- شارش جریان درسیم هم محور

بنابراین، انرژی در پوسته ی استوانه ای به شعاع r و ضخامت dr عبارت است از

$$dW = \left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\right)\ell 2\pi r\, dr = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\frac{dr}{r} \qquad (٥٥)$$

با انتکرال گیری از a تا b خواهیم داشت

$$W = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ell n\left(b/a\right) \qquad (٥٦)$$

نکته: این رابطه ، شیوه ی دیگری برای یافتن خود القایی سامانه را نشان می دهد. بنا به رابطه ی (٤٦) انرژی را هم چنین می توان به صورت $LI^2/2$ نوشت. از مقایسه ی آن با رابطه ی (٥٦) داریم

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ell n\left(b/a\right) \qquad (٥٧)$$

این روش محاسبه‌ی خود القا در هنگامی که جریان به یک مسیر یا سیم محدود نیست و در حجم یا سطح توزیع شده است، بسیار سودمند است. در چنین وضعیت هایی بخش های مختلف جریان شارهای متفاوت تولید می کنند و محاسبه ی L از رابطه هایی مانند $\Phi = LI$ سخت دشوار می شود.

**** ۴- محاسبه ی انرژی میدان مغناطیسی- حالت عمومی**

روش زیبایی برای نوشتن رابطه ی (٤٦)، $W = LI^2/2$ ، وجود دارد و از این برتری برخوددار است که به آسانی می توان به جریان های سطحی و حجمی تعمیم داد. به یاد بیاورید که شار گذرنده از یک حلقه با رابطه ی (۱۸) به صورت $\Phi = LI$ داده شد. از سوی دیگر شار میدان مغناطیسی عبارت است از

$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = \oint_S \left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \qquad (٥٨)$$

که در آن S سطحی است که مرزهایش خم C است. بنابراین داریم

$$LI = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \qquad (٥٩)$$

و در نتیجه

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2}\oint_C (\mathbf{A}\cdot\mathbf{I})dl \qquad (٦٠)$$

در این شکل ، می توان به سادگی W را برای حالت عمومی جریان حجمی تعمیم داد و نوشت

$$W = \frac{1}{2}\oint_V (\mathbf{A}\cdot\mathbf{J})\, d\tau \tag{٦١}$$

فراتر از این ، می توان یک گام پیش تر رفت و W را برحسب میدان مغناطیسی نوشت. با استفاده از قانون آمپر ، $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$ ، می توان $\mathbf{J}$ را از رابطه ی (٦١) حذف کرد:

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\oint_V \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\, d\tau \tag{٦٢}$$

با استفاده از اتحاد برداری

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\underbrace{(\nabla\times\mathbf{A})}_{\mathbf{B}} - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$
$$\Rightarrow \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) = B^2 - \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{٦٣}$$

می توان نوشت

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int B^2 d\tau - \int \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\, d\tau\right]$$
$$= \frac{1}{2\mu_0}\left[\int_V B^2 d\tau - \oint_S (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{a}\right] \tag{٦٤}$$

حالا، انتگرال گیری روی تمامی ناحیه ای است که چگالی جریان به آن ناحیه محدود است. هر ناحیه ای که بزرگتر از آن باشد در انتگرال بالا سهمی نخواهد داشت. چون در فضاهای بزرگتر از آن چگالی جریان وجود ندارد. بنابراین، در انتکرال های رابطه ی (٦٤) هر چه فضای انتگرال گیری را بزرکتر برگزینیم، سهم انتگرال B^2 زیادتر می شود (چون مقدارها ی مثبت را برهم می افزاییم) و بنابراین سهم انتگرال سطح باید کوچک تر شود تا W ثابت بماند. پس، اگر انتگرال گیری را روی تمام عالم انجام دهیم، انتگرال سطح به صفر می گراید و خواهیم داشت

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty B^2 d\tau \tag{٦٥}$$

با توجه به این نتیجه است که می گوییم انرژی در میدان مغناطیسی ذخیره می شود. چگالی انرژی در میدان مغناطیسی $u_B = (1/2\mu_0)(B^2)$ است. رابطه ی (٦٥) با انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی همانندی زیبایی دارد:

$$W_{elec} = \frac{1}{2}\int (V\rho)\, d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2 d\tau \tag{٦٦}$$

$$W_{mag} = \frac{1}{2}\int (\mathbf{A}\cdot\mathbf{J})\, d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty B^2 d\tau \tag{٦٧}$$

مثال ١٢- انرژی چنبره: انرژی انباشته شده در چنبره‌ی مثال ٣ را با استفاده از رابطه‌ی (٦٥) به دست آورید و با پاسختان درستی رابطه ی (٢٣) را بیازمایید.

حل: میدان مغناطیسی چنبره عبارت است از

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r} \tag{٦٨}$$

در نتیجه، داریم

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 d\tau \quad \Rightarrow W = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 n^2 I^2}{4\pi^2}\int \frac{1}{r^2} h\, r d\phi dr$$

$$= \frac{\mu_0 n^2 I^2 h}{8\pi^2} 2\pi\, \ell n\left(b/a\right) \quad \Rightarrow W = \frac{1}{4\pi}\mu_0 n^2 I^2 h\, \ell n\left(b/a\right) \tag{٦٩}$$

$$\therefore\ L = \frac{\mu_0}{2\pi} n^2 h\, \ell n\left(b/a\right) \tag{٧٠}$$

مثال ۱۳- خود القاء کابل : جریان در سطح مقطع دایره ای کابل درازی به شعاع R به طور یکنواخت توزیع شده است و در یک سو شارش می کند و بر روی سطح کابل بر می گردد (مانند سیم هم محور. صفحه ی بسیار نازک عایق دو جریان رفت و برگشت را در کابل از هم جدا می کند) . خود القاء در واحد طول کابل را حساب کنید.

حل: از قانون اهم میدان مغناطیسی به صورت زیر به دست می آید

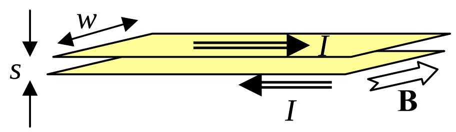
$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 I\left(r^2/R^2\right) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \tag{٧١}$$

پس ، انرژی عبارت است از

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 R^4}\int_0^R r^2(2\pi r)\ell dr = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi R^4}\left(r^4/4\right)\Big|_0^R = \frac{\mu_0 \ell}{16\pi} I^2$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0 \ell}{16\pi}I^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\mu_0 \ell}{16\pi} \Rightarrow \mathcal{L} \equiv \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{16\pi} \tag{٧٢}$$

مثال ۱۴- خط انتقال نیرو: یک خط انتقال جریان برق از دو باریکه ی" روبان" فلزی به پهنا های w ساخته شده است و به فاصله ی اندک s ($s \ll w$) از هم قرار دارند، شکل (۱٤) . جریان در یک روبان شارش می یابد و از روبان دیگر برمی گردد. در هر دو حالت رفت و برگشت، جریان به طور یکنواخت بر سطح روبان توزیع می شود.



شکل ١٤- خط انتقال نیرو

(الف): ظرفیت در واحد طول آرایه $\mathcal{C}$ را حساب کنید.

(ب): خود القایی در واحد طول آرایه $\mathcal{L}$ را حساب کنید.

(پ): مقدار عددی حاصل ضرب $\mathcal{LC}$ را حساب کنید. [روشن است که $\mathcal{C}$ و $\mathcal{L}$ برای خط های انتقال متفاوت باهم فرق خواهند داشت، اما اگر در خلاء باشند، حاصل ضرب آنها یک ثابت جهانی است . این ادعا را با مثال ۱۱ بیازمایید. در نظریه ی خط های انتقال نیرو- گرایش قدرت در مهندسی برق- این ثابت جهانی به سرعت انتشار میدان های الکترومغناطیسی در خط انتقال $v = 1/\sqrt{\mathcal{LC}}$ مربوط است.]

حل: **(الف)** دو روبان یک خازن تخت می سازد. میدان الکتریکی در فضای بین آنها $E=\sigma/\varepsilon_0$ است و اختلاف پتانسیل بین صفحه ها برابر است با $V=Es=Qs/(\varepsilon_0 w\,\ell)$. پس، ظرفیت خازن عبارت است از

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\varepsilon_0 w\,\ell}{s}\;\Rightarrow\;\mathcal{C}\equiv\frac{C}{\ell}=\frac{\varepsilon_0 w}{s} \tag{۷۳}$$

(ب): میدان مغناطیسی حاصل از چگالی جریان سطحی K عبارت است از $B=\mu_0 K$. بنابراین داریم

$$\Phi=B\cdot s\cdot\ell=\frac{\mu_0 I}{w}s\,\ell=LI\;\Rightarrow\;L=\frac{\mu_0 s}{w}\ell\;\Rightarrow\;\mathcal{L}\equiv\frac{L}{\ell}=\frac{\mu_0 s}{w} \tag{۷۴}$$

(پ): مقدار عددی $\mathcal{LC}$

$$\begin{aligned}\mathcal{LC}&=\mu_0\varepsilon_0=4\pi\times10^{-7}\,\frac{Nt.}{Amp^2}\cdot(8.85)\times10^{-12}\,\frac{Coul^2}{Nt\cdot m^2}\\&=\left(4\pi(8.85)\right)\times10^{-19}\,\frac{\sec^2}{m^2}=1.112\times10^{-17}\,\sec^2/m^2\end{aligned} \tag{۷۵}$$

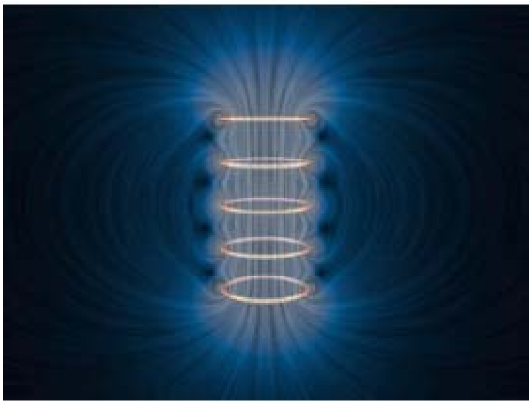
سرعت انتشار عبارت است از

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mathcal{LC}}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=2.999\times10^{8}\,m/\sec\equiv c \tag{۷۶}$$

۵- تولید و نابود کردن انرژی مغناطیسی

۵-۱ تولید انرژی مغناطیسی

اینک فرایند تولید و نابودی انرژی مغناطیسی را با جزییات بیشتر بررسی می کنیم. نخست فرایند تولید را در نظر بگیرید. برای تولید انرژی مغناطیسی یک عامل خارجی نیاز است (باتری یا جرکت دادن حلقه در میدان مغناطیسی را به یاد می آورید). در شکل (۱۵) فرایند تولید انرژی مغناطیسی نشان داده شده است: فرض کنید پنج حلقه داریم و تعدادی بار مثبت و آزاد ساکن در هر حلقه وجود دارند. چون جریان وجود ندارد و بارها ساکن اند، میدان مغناطیسی هم وجود ندارد. حال فرض کنید، پنج عامل خارجی یکسان (هر یک برای یکی از حلقه ها) به طور همزمان با آهنگی یکسان بارهای را پادساعتگرد به حرکت وا می دارند . با شتاب گرفتن بارها ی حلقه ها، در فضای بین حلقه ها میدان مغناطیسی پدید می آید. این میدان بیشتر موازی محور مشترک حلقه هاست و در درون حلقه ها قوی تر از بیرون آنهاست. این البته همان آرایش سولونویید یا پیچه است. شار مغناطیسی گذرنده از حلقه ها افزایش می یابد (نخست صفر بود) و با این افزایش شار، بنا به قانون فارادە، تغییر شار مغناطیسی میدان الکتریکی القا می کند که جهت آن وقتی از بالا به آن بنگریم ساعتگرد است. نیرویی که میدان الکتریکی القایی به بارها وارد می کند در خلاف جهت



شکل ۱۵- فرایند تولید انرژی مغناطیسی

عامل خارجی است که می خواهد حلقه ها را پادساعتگرد بچرخاند. در واقع با عامل خارجی مخالفت می کند. برای این که عامل خارجی به این نیروی بازدارنده چیره شود و به حرکت دادن بارها ادامه دهد باید کار بیشتری انجام دهد. این کار اضافی عامل خارجی منشاء انرژی است که در میدان مغناطیسی بین حلقه ها پدید می آید.

با عامل خارجی می خواهیم جریان معینی را در مدار (در این پیکربندی: سولونویید) برقرار کنیم. برای این کار مدت زمانی ، هرچند کوتاه، لازم است. در این بازه ی زمانی عامل خارجی در حال افزایش سرعت بارها (برعلیه میدان الکتریکی القایی) است و به طور پیوسته کار انجام می دهد. انرژی الکترومغناطیسی که عامل های خارجی در مکان انجام کار (مسیر حرکت بارها) تولید می کنند، هم به سوی درون و هم به سوی بیرون شارش دارند. جهت شارش انرژی در شکل (۱۵) با طرح بافتاری نشان داده شده است. با بیشتر و بیشتر شدن سرعت بارها، این شارش انرژی مغناطیسی سبب افزایش شدت میدان معناطیسی در فضای بین حلقه ها می شود. هنگامی که عامل خارجی سرعت بارها را به حد معین از پیش تعیین شده (جریان مورد نطر) رساند، دیگربه بارها شتاب نمی دهد و بارها باسرعت ثابت حرکت می کنند. در نتیجه، میدان مغناطیسی در درون پیچه ثابت باقی می ماند و میدان الکتریکی" القایی" بنا بر قانون فاراده صفر می شود.

۲-۵ نابود کردن انرژی مغناطیسی

این فرایند به صورت زیر انجام می گیرد. شکل (۱۵) را دوباره در نظر بگیرید که در مدار آن جریان به مقدار معین خود رسیده است. عامل های خارجی ما حالا می خواهند سرعت بارها ی حلقه ها را (که پادساعتگر می چرخند) به طور همزمان و با آهنگی یکسان (و به شیوه ای که از پیش تصمیم گرفته شده است) کند کنند. هنگامی که بارهای روی حلقه ها شروع به واشتابیدن می کنند، اندازه ی میدان مغناطیسی بین حلقه ها هم کاهش پیدا می کند. وبنابراین، شار معناطیسی گذرنده از حلقه ها هم کاهش می یابد. بنابه قانون فاراده ، حالا میدان مغناطیسی متغیربا زمان ، میدان الکتریکی القا می کند که اگر از بالا به آن نگاه کنیم، پادساعتگرد می چرخد. نیرویی که این میدان الکتریکی به بارها وارد می کند هم جهت با جهت حرکت بارها است . در این وضعیت، کار بر علیه عامل های خارجی انجام می گیرد. این مقدار کار را انرژی میدان مغناطیسی فراهم می کند: در مدت زمانی که" انرژی از بین می رود"، شدت میدان مغناطیسی کاهش می یابد و انرژی از میدان به مسیر حرکت بارها پس داده می شود و در اختیار عامل های خارجی قرار می گیرد که می خواهند از سرعت بارها بکاهند. مقدار انرژی که در دسترس عامل های خارجی برای از بین بردن میدان مغناطیسی قرار می گیرد درست با مقدار انرژی که این عامل ها برای ایجاد میدان مغناطیسی خرج کرده اند برابر است (البته اگر از انرژی که به صورت تابش از بین می رود چشم پوشی کنیم. اگر سرعت بارها در مقایسه با سرعت نور اندک باشد، انرژی تابشی بسیار کم است). با چشم پوشی از تلف شدن انرژی تابشی، می بینیم که فرایند "نابود" کردن انرژی مغناطیسی کاملا وارون تولید آن است. بنابراین، مقدار انرژی که عامل خارجی برای تولید انرژی مغناطیسی هزینه می کند با نابود کردن انرژی مغناطیسی به عامل خارجی بازگردانده می شود. و سرانجام یک نکته ی پایانی: هر گاه انرژی الکترومغناطیسی تولید می شود، بار الکتریکی برعلیه میدان الکتریکی ($q\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} < 0$) حرکت می کند (یا وادار به حرکت می شود). هر گاه انرژی

الکترومغناطیسی نابود می شود، بار الکتریکی در جهت میدان الکتریکی ($q\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}>0$) حرکت می کند (یا وادار به حرکت می شود). این همان قاعده ای است که در بالا برای توصیف فرایند تولید و نابوردی انرژی الکترومغناطیسی دیدیم.

۶- مدارهای مغناطیسی

۶-۱ خود القایی و تعمیم قانون کرکهوف

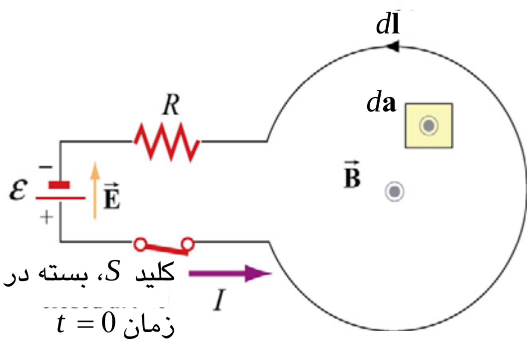
در مدار هایی که تاکنون آنها را بررسی کرده ایم، نقش میدان مغناطیسی متغیر با زمان را در نظر نگرفتیم. می دانیم که با برقراری جریان در مدار، میدان مغناطیسی به وجود می آید و با زمان هم تغییر می کند. اگر این پدیده را در بررسی مدارها در نظر بگیریم باید بپذیریم که دیگر انتگرال میدان الکتریکی روی مسیر بسته ی مدار صفر نیست، بلکه اینک داریم

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۷۷)$$

در هر مداری که جریان با زمان تغییر کند، میدان مغناطیسی متغیر با زمان به وجود می آید و بنابراین، میدان الکتریکی القاء می شود. با در نظر گرفتن این پدیده و این میدان الکتریکی القایی فاراده، چگونه باید مدار های ساده را حل کرد؟ برای فهمیدن پی آمدهای میدان مقناطیسی متغیر با زمان در نظریه ی مدارها، ما روشی خود سازگار را دنبال خواهیم کرد.

به مجرد این که میدان مغناطیسی متغیر با زمان را در نظر بگیریم دیگر اختلاف پتانسیل بین دو نقطه ی مدار خوش تعریف نخواهد بود؛ چون اگر انتگرال خط میدان الکتریکی حول مدار صفر نباشد ، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه ی مثلا a و b هم دیگر مستقل از مسیر نخواهد بود. یعنی میدان الکتریکی دیگر پایسته نیست و پتانسیل الکتریکی هم مفهوم مناسبی نیست. به بیان دیگر ، نمی توان میدان $\mathbf{E}$ را به صورت گرادیان پتانسیل نوشت. با وجود این، هنوز هم می توان معادله ای یافت که رفتار مدار را توصیف کند. برای این که چگونگی این کار را در یابیم، مدار شکل (۱٦) را در نظر بگیرید. این مدار یک باتری، یک مقاومت، یک کلید که در زمان $t=0$ بسته می شود و یک خود القا دارد.

با پیشروی ، پی آمد های خود القا روشن تر خواهد شد. در زمان های $t>0$ جریان در جهتی که در شکل نشان داده شده است، شارش می کند (مانند همیشه ، از پایانه ی مثبت باتری به پایانه ی منفی آن). چه معادله ای رفتار جریان $I(t)$ را درزمان ها ی $t>0$ توصیف می کند؟



شکل ١٦- حلقه ی مدار خود القا

برای پاسخ به این پرسش، قانون فاراده را به سطحی که مرزهایش حلقه ی مدار است اعمال کنید. جهت $d\mathbf{a}$ را به سوی بیرون از صفحه بر گزیده ایم و $d\mathbf{l}$ نسبت به این جهت برگزیده راست گرد (پادساعتگرد)

است. نخست می پرسیم انتگرال میدان الکتریکی حول این مدار چیست؟ در باتری میدان الکتریکی وجود دارد و جهتش از پایانه ی مثبت به پایانه ی منفی باتری است. وقتی از درون باتری می گذریم در جهت $d\mathbf{l}$ و برخلاف میدان الکتریکی حرکت می کنیم. بنابراین $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}<0$ است. پس سهم باتری در انتگرال میدان $-\mathcal{E}$ است. در مقاومت هم میدان الکتریکی وجود دارد و جهتش با جهت جریان هم سوست. وقتی در جهت جریان از مقاومت می گذریم $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}>0$ است و بنابراین، سهم آن در $\int\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ برابر $+IR$ است. به آن بخش از مدار بالا که دایره ای است خود القاء L نسبت داده می شود. (در واقع، هر مدار بسته یک خود القاء دارد. در اینجا برای روشن بودن بحث، L را محدود به آن بخش از مدار می کنیم که دایره است.) اگر سیمی که بخش دایره ای مدار را می سازد، مقاومت نداشته باشد، آنگاه در این دایره میدان الکتریکی هم وجود ندارد. بنابراین، اگر روی مدار بسته ساعتگرد حرکت کنیم (در خلاف جهت جریان) خواهیم داشت

$$\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\mathcal{E}+IR \tag{۷۸}$$

تا اینجا فقط قانون کرکهوف را مانند پیش به کار برده‌ایم. اینک می‌پرسیم شار مغناطیسی گذرنده از سطحی که حلقه‌ی دایره ای مرزهای آن است چیست؟ توجه کنید که هندسه‌ی مدار بالا را چنان آراسته ایم که شار گذرنده از بخشی که شامل باتری، مقاومت و کلید است در مقایسه با بخش دایره‌ای ناچیز است (مساحت بخش دایره‌ای بسیار بزرگ‌تر است). هم چنین می‌دانیم که Φ گذرنده از بخش دایره‌ای مثبت است؛ چون جریان پادساعتگرد است وجهت میدان مغناطیسی که تولید می‌شود به‌سوی بیرون از صفحه و هم‌سو با جهت انتخابی $d\mathbf{a}$ است و بنابراین $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}>0$ است. توجه کنید که $\mathbf{B}$ میدانی است که جریان مدار تولید می‌کند و نتیجه‌ی عامل خارجی نیست.

در بخش‌های پیش آموختیم که شار Φ با جریان متناسب است: $\Phi=L\,I$ که L خود القا مدار است و به هندسه‌ی آن بستگی دارد. آهنگ تغییر شار گذرنده از مدار برابر است با $L\,(dI/dt)$ و بنابراین، از قانون فاراده داریم

$$\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\mathcal{E}+IR=-\frac{d\Phi}{dt}=-L\frac{dI}{dt} \tag{۷۹}$$

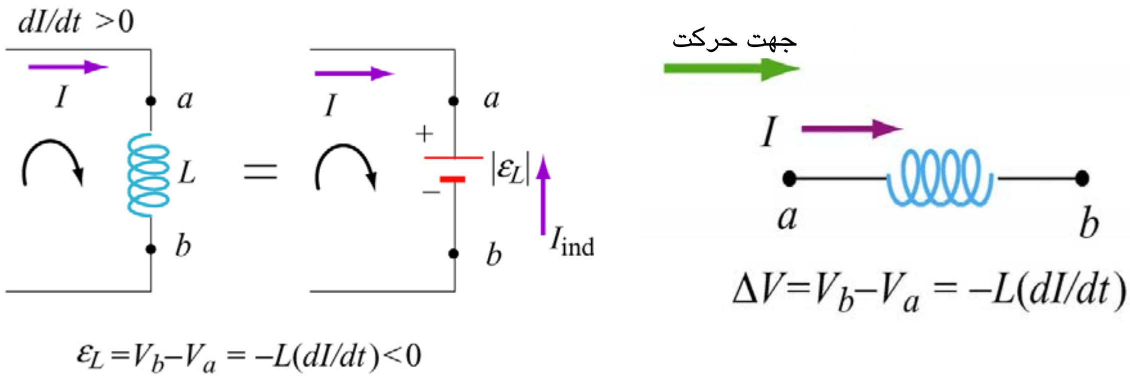
چون $\Delta V=-\int\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ است، از رابطه‌ی بالا می توانیم رابطه‌ی مدار را به‌صورت زیر بنویسیم

$$-\Delta V=-\mathcal{E}+IR=-L\frac{dI}{dt}\quad\Rightarrow\quad\Delta V=\mathcal{E}-IR-L\frac{dI}{dt}=0 \tag{۸۰}$$

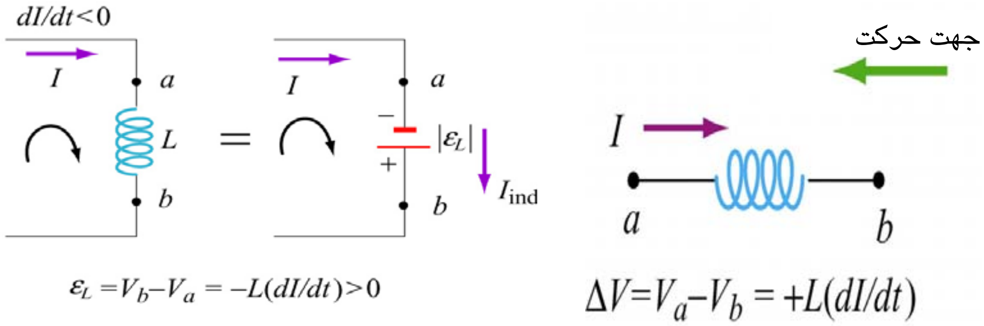
این رابطه به شکل قانون کرکهوف نوشته شده است. یعنی جمع اختلاف پتانسیل اجزاء مدار صفر است. برای حفظ قانون مدار کرکهوف باید اختلاف پتانسیل دو سر خود القا را مشخص کنیم.

بنابه قانون لنز، قطبایی نیروی محرکه ی خود القا ، $\mathcal{E}_L$، به گونه‌ای است که با تغییر جریان در مدار مخالفت می کند. اگر آهنگ تغییر جریان همانند شکل (۱۷– الف) مثبت باشد، $dI/dt>0$، آنگاه جریان القایی I_{ind} که نیروی محرکه‌ی خود القا تولید می‌کند باید در خلاف جهت جریان اصلی مدار، I، باشد تا بتواند از افزایش جریان اصلی جلوگیری کند. در این وضعیت، می‌توان خودالقا را با یک نیروی محرکه (یا یک باتری) با $|\mathcal{E}_L|=L\,|dI/dt|=+L\,|dI/dt|$ و با قطبایی همانند شکل (۱۷– ب) جایگزین کرد. از سوی دیگر، اگر آهنگ تغییر جریان در مدار منفی باشد، $dI/dt<0$ ، جریان القایی که نیروی محرکه‌ی خود القا، $\mathcal{E}_L$، به وجود

می‌آورد همانند شکل (۱۸) در همان جهتی خواهد بود که جریان اصلی مدار داشت تا از کاسته جریان اصلی در مدار جلوگیری کند.



شکل ۱۷ – قانون کرکهوف تعمیم یافته برای خود القا با جریان افزایشی



شکل ۱۸– قانون کرکهوف تعمیم یافته برای خود القا به جریان کاهشی

پس، وقتی در جهت جریان از نقطه ی a مدار به تقطه ی b حرکت می کنیم و از یک خود القا می گذریم، چه آهنگ تغییر جریان مثبت ($dI/dt>0$) و چه منفی ($dI/dt<0$) باشد، در هر دو حالت اختلاف پتانسیل بین دو نقطه (یا دو سر خود القا) عبارت است از

$$V_b - V_a = -L\frac{dI}{dt} \qquad (۸۱)$$

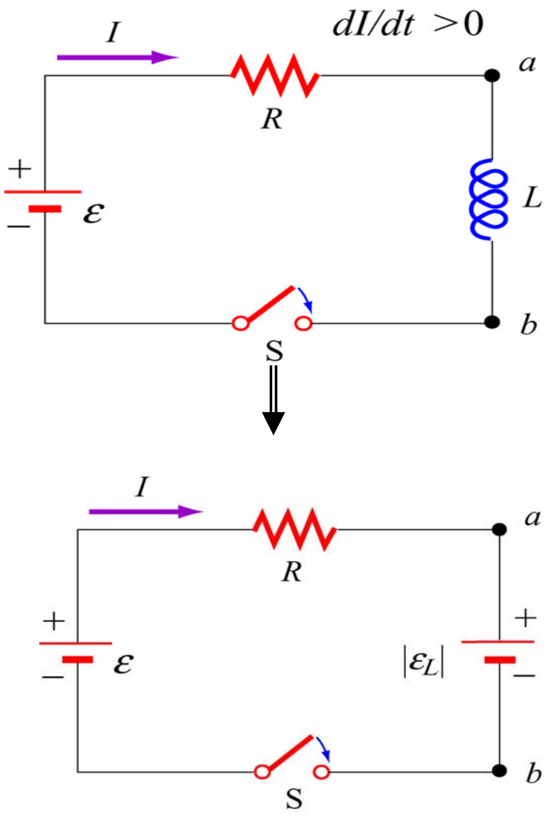
بنابر آنچه که گفته شد، اینک می توانیم قاعده ی کرکهوف رابرای خود القا به صورت زیر بیان کنیم:

اگر در هنگام رفتن از یک نقطه ی مدار به نقطه ی دیگر از خودالقا در جهت جریان عبور کنیم، اختلاف پتانسیل دو سر خود القا $-L\, dI/dt$ است. اگر پیمایش خود القا در خلاف جهت جریان باشد، اختلاف پتانسیل دو سر خود القا $+L\, dI/dt$ است.

استفاده از این قاعده برای خود القا در قانون مدار کرکهوف همواره معادله ی درستی برای مدار با خودالقا به دست می دهد. اما باید در نظر داشت که این قاعده گمراه کننده و در سطحی دقیق تر از نظر فیزیکی نادرست است. توجه کنید که قانون کرشهوف براین اساس پایه گذاری شده است که انتگرال $\mathbf{E}$ حول مدار

صفر است. این گزاره با وجود میدان مغناطیسی متغیر با زمان دیگر درست نیست. بنابراین، "جمع اختلاف پتانسیل‌های دو سر اجزاء مدار" (اگر آن را به معنی $-\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ بپنداریم) دیگر **صفر نیست** بلکه $+L\, dI/dt$ است .

مثال ۱۵- مدار LR با جریان افزایشی: در زمان $t=0$ کلید مدار شکل (۱۹) بسته می شود. این مدار از یک مقاومت و یک خودالقا تشکیل شده است. جریان به طور آنی به مقدار بیشینه ی $\mathcal{E}/R$ خود نمی رسد. این تاخیر به خاطر خودالقاء مدار است. جریان وابسته به زمان $I(t)$ را در مدار حساب کنید.



شکل ۱۹- مدار RL با $dI/dt > 0$

حل: معادله ی دیفرانسیل مدار بنا به قانون کرکهوف عبارت است از

$$\mathcal{E} - IR - |\mathcal{E}_L| = \mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (۸۲)$$

به تفاوت مهم بین مقاومت و خود القا توجه کنید: اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت به جریان I بستگی دارد، اما اختلاف پتانسیل دوسر خود القا به dI/dt وابسته است. نیروی محرکه ی خودالقا با خود جریان مخالفت نمی کند بلکه با dI/dt مخالفت می کند. رابطه ی (۸۲) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{dI}{I - \mathcal{E}/R} = \frac{dt}{L/R} \qquad (۸۳)$$

اگر از دو طرف انتگرال بگیریم وشرط این که در زمان $t=0$ جریان صفراست، $I(t=0)=0$ ، را اعمال کنیم خواهیم داشت

$$\ell n(I - \mathcal{E}/R)\Big|_0^I = -\frac{t}{L/R} \qquad (۸٤)$$

اگر ثابت زمانی مدار LR را به صورت زیر تعریف کنیم

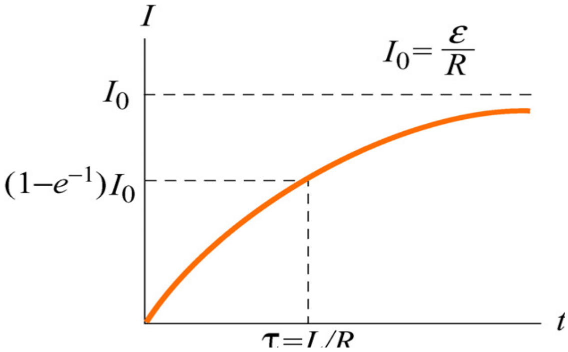
$$\tau \equiv \frac{L}{R} \qquad (۸٥)$$

از رابطه ی (۸٤) به دست می آید

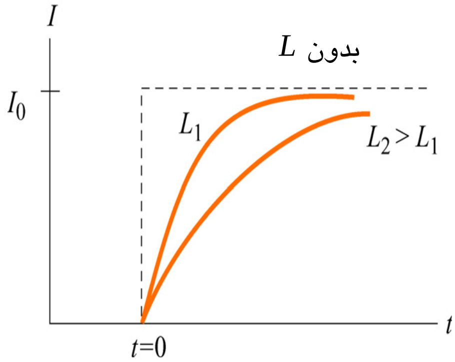
$$\ell n\left(\frac{I - \mathcal{E}/R}{-\mathcal{E}/R}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{I - \mathcal{E}/R}{-\mathcal{E}/R} = e^{-t/\tau} \Rightarrow \quad I - \mathcal{E}/R = -\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad (۸٦)$$

نمودار رفتار کیفی جریان برحسب زمان در شکل (۲۰) نشان داده شده است. .همان طور که از نمودار پیدا است، پس از گذشت زمان به اندازه ی کافی دراز، جریان به مقدار تعادلی خود، $\mathcal{E}/R$، می رسد. ثابت زمانی τ سنجه ای برای این است که با چه سرعتی این حالت تعادلی فرامی رسد. هر اندازه که مقدار L بزرگتر باشد زمان طولانی تری برای رسیدن به جریان نهایی وقت لازم است. در نمودار شکل (۲۱) رفتار جریان برای مدار با L و بدون L مقایسه شده است. اندازه ی نیروی محرکه ی القایی، $\mathcal{E}_L$، را هم به سادگی می توان حساب کرد. داریم



شکل ۲۰- نمودار جریان در مدار LR برحسب زمان



شکل ۲۱- مقایسه ی جریان در مدار با L و بدون L

$$|\mathcal{E}_L| = \left| -L\frac{dI}{dt} \right| = \mathcal{E}e^{-t/\tau} \tag{۸۷}$$

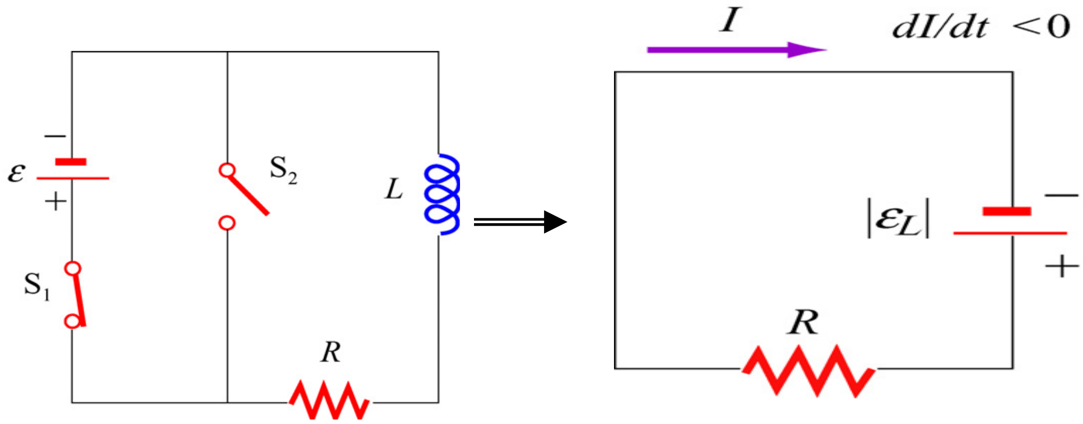
که در زمان $t = 0$ بیشینه مقدار خود را دارد و با $t \to \infty$ به صفر می گراید. این رفتار نشان می دهد که پس از زمان به اندازه ی کافی طولانی پس از بسته شدن کلید مدار، خودالقا یی از مدار ناپدید می شود و خود القا همانند یک سیم رسانا رفتار می کند که دو قسمت مدار را به هم می پیوندد.

برای این که پایستگی انرژی را در این مدار ببینید رابطه ی (۸۲) را در I ضرب کنید. خواهیم داشت

$$I\mathcal{E} = I^2R + LI\frac{dI}{dt} \tag{۸۸}$$

سمت چپ این رابطه آهنگ انتقال انرژی توسط باتری به مدار است. جمله ی نخست سمت راست انرژی تلف شده در مقاومت به صورت گرماست و جمله ی دوم سمت راست آهنگ ذخیره شدن انرژی در خود القاست. انرژی گرمایی تلف شده در مقاومت را نمی توان بازیافت اما انرژی مغناطیسی انباشته شده در خود القا را می توان آزاد کرد.

مثال ۱۶- مدار LR با جریان کاهشی: مدار LR شکل (۲۲) را در نظر بگیرید. فرض کنید کلید S_1 مدت زمانی طولانی بسته بوده است و جریان در مدار به مقدار تعادلی خود $\mathcal{E}/R$ رسیده است. در زمان $t = 0$ کلید S_1 را قطع و کلید S_2 را می بندیم. رفتار جریان را توضیف کنید و نمودار تغییر آن را برحسب تابعی از زمان رسم کنید.



شکل۲۲- مدار LR با تغییر جریان $dI/dt < 0$ - مدار فروافت جریان

حل: این مدار فروافت جریان است ($dI/dt < 0$) . قاعده ی تعمیم یافته ی کرشهوف را برای مدار معادل سمت راست به کار ببرید. خواهیم داشت

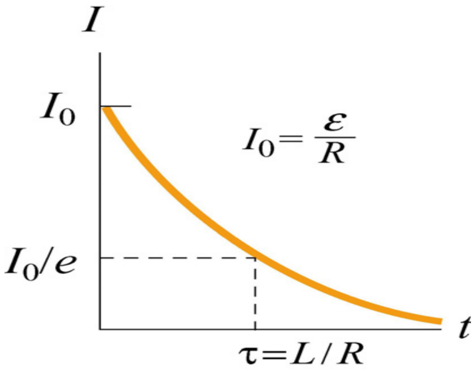
$$|\mathcal{E}_L| - IR = -IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dI}{I} = \frac{dt}{L/R} \qquad (۸۹)$$

پاسخ این معادله ی دیفرانسیل عبارت است از

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau} \qquad (۹۰)$$

نمودار تغییر جریان نسبت به زمان در شکل (۲۳) نشان داده شده است.

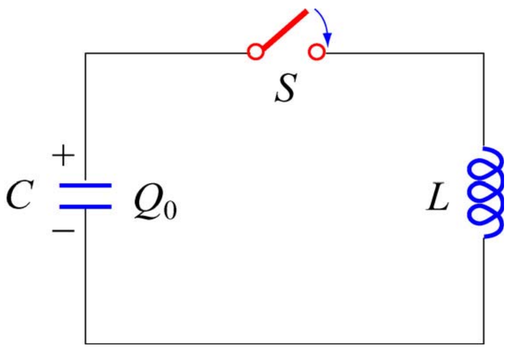


شکل ۲۳- نمودار جریان در مدار فروافت نسبت به زمان

مثال بالا وضعیتی را نشان می دهد که جریان I در مدار برقرار است. اگر قطع جریان در مدار ناگهانی باشد، آنگاه افت جریان به صفر" آنی" رخ می دهد. این افت آنی جریان یعنی حتی اگر خود جریان I بزرگ هم نباشد، dI/dt بسیار بزرگ است. به این دلیل است که وقتی اتوی برقی را از پریز می کشید خیلی وقت ها جرقه تولید می شود: القاء الکترومغناطیسی به هر قیمتی می کوشد جریان را در مدار حفظ کند ، حتی اگر مجبور باشد از کاف تولید شده در مدار بپرد. این تلاش مدار است که جرقه ایجاد می کند.
به ندرت دیده می شود که وقتی اتو را به پریز و.صل کنید ، جرقه روی بدهد. این وضعیتی است که با مثال ۱۵ قابل توصیف است. در این حالت خودالقا با شارش ناگهانی جریان در مدار مخالفت می کند و همان گونه که از نمودار شکل (۲۰) پیداست، رسیدن جریان به مقدار نهایی آن پیوسته و هموار و به تدریج صورت می گیرد.

مثال ۱۷- مدار نوسانی LC

در مدار LC یک خازن و یک خود القا همانند شکل (۲٤) وجود دارد. فرض کنید خازن بار داری با بار اولیه ی Q_0 در مدار قرار می گیرد. وقتی کلید S مدار بسته می شود، بارهای خازن به مدار نشت می کنند. جریان برقرار می شود و خازن شروع به خالی شدن می کند و در نتیجه انرژی الکتریکی آن کاهش می یابد. جریانی که با خالی شدن خازن در مدار به وجود می آید انرژی مغناطیسی تولید می کند که در خود القا ذخیره می شود. وقتی خازن کاملا خالی شد، خود القا نقش نیروی محرکه ی مدار را به عهده می گیرد و جریان را در مدار برقرار می کند. به این ترتیب، دو باره به باردار کردن خازن می پردازد؛ انرژی مغناطیسی و به صورت انرژی الکتریکی در خازن ذخیره می شود . اگر در مدار هیچ مقاومتی وجود نداشته باشد، این فرایند تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی مغنایطسی و برعکس ادامه می یابد و انرژی کل مدار بین دو حالت انرژی الکتریکی خازن و انرژی مغناطیسی خودالقا رفتار نوسانی پیدا می کند.



شکل ۲٤- مدار نوسانی LC

در لحظه ای پس از بسته شدن کلید مدار LC ، بخشی از انرژی کل مدار به صورت انرژی الکتریکی در خازن (U_C) و بخش دیگر آن به صورت انرژی مغناطیسی (U_L) در خودالقا توزیع می شود. می توانیم بنویسیم

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2 \qquad (۹۱)$$

چون انرژی کل ، U ، ثابت است و با زمان تغییر نمی کند ، داریم

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (۹۲)$$

چون $I = -dQ/dt$ است ، بنابراین داریم $dI/dt = -d^2Q/dt^2$ که اگر در رابطه ی (۹۲) قرار دهیم ، این رابطه به صورت زیر در می آید

$$\frac{Q}{C}(-I) + LI\left(-d^2Q/dt^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \qquad (۹۳)$$

به قرار دار علامت توجه کنید. در $I = -dQ/dt$ علامت منفی به این معنی است که درست پس از بسته شدن کلید مدار، جریان با آهنگ *کاهش* بار خازن برابر است. رابطه‌ی بالا را از قاعده‌ی کرکهوف نیز می‌توان به دست آورد. اگر در مدار ساعتگرد حرکت کنیم، قاعده ی کرکهوف می‌گوید

$$\frac{Q}{C}-L\frac{dI}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{C}-L\left[\frac{d}{dt}\left(-\frac{dQ}{dt}\right)\right]=0 \qquad (٩٤)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q}{C}+L\frac{d^2Q}{dt^2}=0 \qquad (٩٥)$$

پاسخ عمومی معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو (٩٣) یا (٩٥) عبارت است از

$$Q(t)=Q_0\cos\left(\omega_0 t+\phi\right) \qquad (٩٦)$$

که در آن Q_0 دامنه ی بار و ϕ فاز اند. بسامد زاویه ای ω_0 عبارت است از

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (٩٧)$$

اگر از رابطه ی (٩٦) نسبت به زمان مشتق بگیریم ، جریان نسبت به زمان به دست می آید

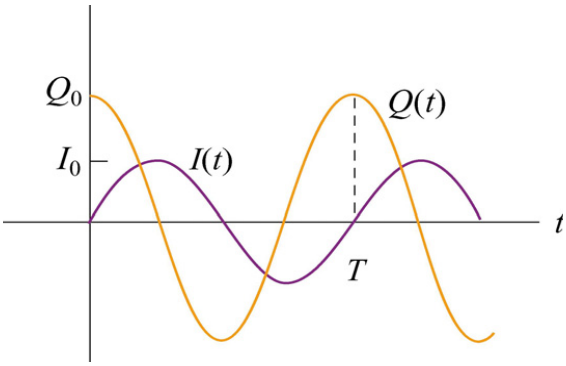
$$I=-\frac{dQ}{dt}=\omega_0 Q_0\sin\left(\omega_0 t+\phi\right)=I_0\sin\left(\omega_0 t+\phi\right) \qquad (٩٨)$$

که در آن $I_0\equiv\omega_0 Q_0$ است. فاز ϕ با استفاده از شرایط اولیه ی مسئله ، یعنی $Q(t=0)=Q_0$ و $I(t=0)=0$ به دست می آید و برابر است با $\phi=0$. در نتیجه، پاسخ های (٩٦) و (٩٨) به صورت زیر در می آیند

$$Q(t)=Q_0\cos\omega_0 t \qquad (٩٩)$$

$$I(t)=I_0\sin\omega_0 t \qquad (١٠٠)$$

وابستگی زمانی $Q(t)$ و $I(t)$ در شکل (٢٥) نشان داده شده اند



شکل ٢٥- نمودار تغییر نسبت به زمان بار الکتریکی و جریان در مدار نوشانی LC

با استفاده از رابطه های (٩٩) و (١٠٠) دیده می شود که در هر لحظه انرژی الکتریکی عبارت است از

$$U_E=\frac{Q^2(t)}{2C}=\left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)\cos^2\omega_0 t \qquad (١٠١)$$

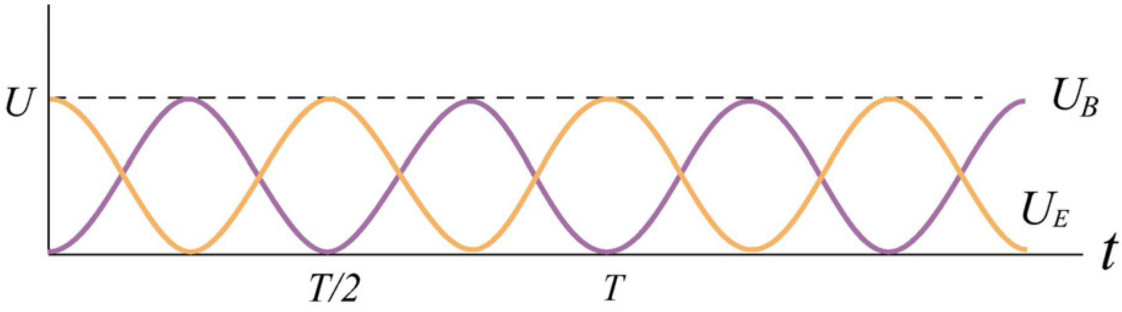
و برای انرژی مغناطیسی داریم

$$U_B=\frac{1}{2}LI^2(t)=\frac{LI_0^2}{2}\sin^2\omega_0 t$$
$$=\frac{L(-\omega_0 Q_0)}{2}\sin^2\omega_0 t=\left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)\sin^2\omega_0 t \qquad (١٠٢)$$

به سادگی می توان نشان داد که انرژی کل پایسته است.

$$U=U_C+U_B=\left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)\cos^2\omega_0 t+\left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)\sin^2\omega_0 t=\frac{Q_0^2}{2C} \qquad (١٠٣)$$

نوسان انرژی های الکتریکی و مغناطیسی در نمودار شکل (٢٦) نشان داده شده است.



شکل ۲۶– نمودار تغییرات انرژی الکتریکی و انرژی مغناطیسی با زمان

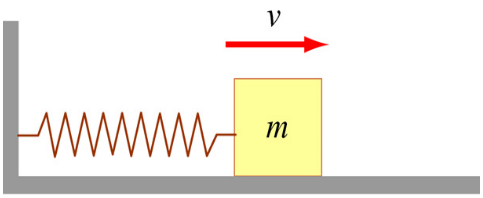
سامانه ی جرم و فنر شکل (۲۷) مانسته ی مکانیکی مدار نوسانی LC است. اگر سرعت جرم v و ثابت فنر k باشند و جرم به اندازه ی x از مکان ترازمندیش جابه جا شود، انرژی مکانیکی کل سامانه برابر است

$$U = T + U_{sp} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \qquad (۱۰۴)$$

T انرژی جنبشی جرم و U_{sp} انرژی پتانسیل فنر اند.

اگر اصطکاک نباشد U پایسته می ماند و داریم

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) = 0 \qquad (۱۰۵)$$



شکل ۲۷– جرم و فنر– مانسته ی مکانیکی مدار LC

با توجه به این که $v = dx/dt$ و $dv/dt = d^2x/dt^2$ ، رابطه ی (۱۰۵) به صورت زیر در می آید.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (۱۰۶)$$

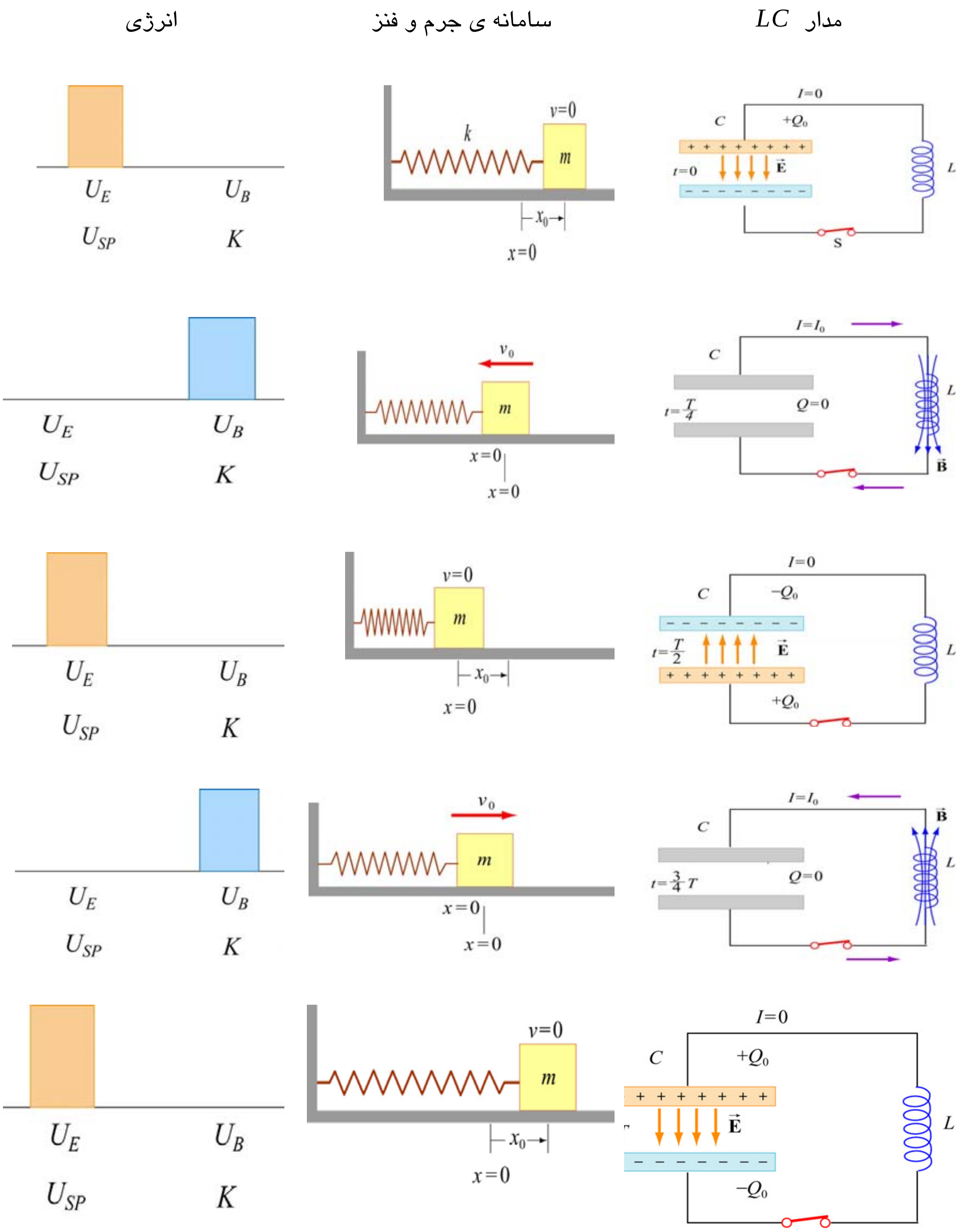
پاسخ عمومی این معادله ی دیفرانسیل مرتبه دو همانند رابطه ی (۹۶) است

$$x(t) = x_0 \cos\left(\omega_0 t + \phi\right) \qquad (۱۰۷)$$

که در آن $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ بسامد زاویه ای است و x_0 دامنه ی نوسان است. پس، در هر لحظه از زمان می توان انرژی سامانه را به صورت زیر نوشت

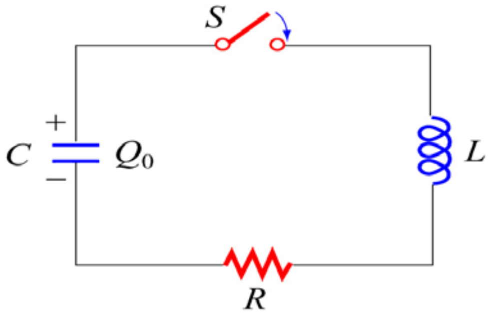
$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kx_0^2\left[\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi)\right] = \frac{1}{2}kx_0^2 \end{aligned} \qquad (۱۰۸)$$

در شکل (۲۸) نوسان انرژی در سامانه ی جرم و فنر و مدار LC نشان داده شده است



شکل ۲۸- نوسان انرژی در مدار LC و سامانه ی جرم و فنز (نوسانگر هماهنگ)

مثال ۱۸- مدار RLC : مداری را در نظر بگیرید که مقاومت R، خودالقاء L و خازن C برابر شکل (۲۹) به طور سری به هم بسته شده اند. بار اولیه ی خازن Q_0 است. پس از بسته شدن کلید S، در مدار جریان برقرار می شود. برعکس مدار LC، این بار انرژی با آهنگ



شکل ۲۹- مدار RLC

$$\frac{dU}{dt} = -I^2R \qquad (۱۰۹)$$

در مقاومت به گرما تبدیل و تلف خواهد شد. علامت منفی در سمت راست رابطه ی بالا نشان می‌دهد که انرژی کاهش می‌یابد. اگر برای dU/dt از رابطه‌ی (۹۲) جایگزین کنیم، به معادله‌ی دیفرانسیل زیر میرسیم.

$$\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -I^2R \qquad (۱۱۰)$$

چون قرار داد ما چنان است که $I = -dQ/dt$ و $dI/dt = -d^2Q/dt^2$ ، در نتیجه، رابطه ی (۱۱۰) را می توان به صورت زیر نوشت

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \qquad (۱۱۱)$$

اگر R کوچک باشد (کند میرایی- پیوست را نگاه کنید) می توان دید که پاسخ این معادله را می توان به صورت زیر نوشت

$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (۱۱۲)$$

که در آن $\lambda \equiv R/2L$ ضریب میرایی است و

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad (۱۱۳)$$

بسامد زاویه ای نوسانگر میراست. کمیت های حقیقی Q_0 و ϕ با شرایط اولیه ی مسئله به دست می آیند. در حد $R = 0$ نوسانگر مدار LC را با $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ باز می یابیم. سه حالت ممکن تندمیرایی، کندمیرایی و میرایی بحرانی می توانند روی دهند که جزییاتشان را به پیوست واگذار می کنیم.

مثال ۱۹- **مدار** RL : مدار شکل (۳۰) را در نظر بگیرید.

(الف): جریان را درست پس از بسته شدن کلید در هر یک از مقاومت ها به دست آورید.

(ب) : پس از گذشت زمان طولانی از بسته شدن کلید، جریان را در هر یک از مقاومت ها حساب کنید.

فرض کنید، پس از آن که کلید مدار برای مدت طولانی بسته بود، آن را قطع کردیم.

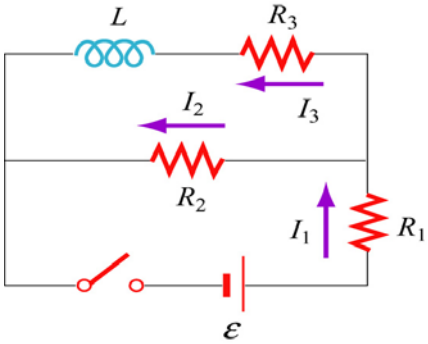
(پ): درست پس از قطع کلید جریان را در هر یک از مقاومت ها به دست آورید.

(ت): پس از گذشت مدی زمانی طولانی از قطع کلید، جریان را در هر یک از مقاومت ها حساب کنید.

حل: (**الف**) درست پس از بسته شدن کلید، جریان در خود القا صفر است، چون نیروی محرکه ی خودالقا از

جهش ناگهانی جریان در مدار جلوگیری می کند. پس $I_3 = 0$ می شود. چون $I_1 = I_2 + I_3$ ، پس $I_1 = I_2$. حال اگر قانون کرکهوف را برای حلقه‌ی ۱ در شکل (۳۱) به کار ببریم، خواهیم داشت

$$I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} \qquad (۱۱٤)$$



شکل ۳۰- مدار RL

(ب): وقتی کلید مدار برای مدت درازی بسته باشد، دیگر نیروی محرکه ی القایی در خودالقا وجود ندارد و جریان مقدار ثابتی می شود.

از قانون کرشهوف برای حلقه های (۱) و (۲) در شکل (۳۱) داریم

$$\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \qquad (۱۱۵)$$

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 \qquad (۱۱٦)$$

این دو رابطه ی به همراه قاعده ی شاخگی

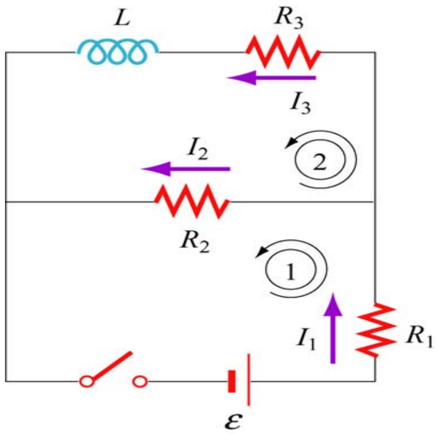
$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (۱۱۷)$$

سه معادله و سه مجهول به دست می دهند. از حل هم زمان آنها به دست می آید

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\mathcal{E}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_2 = \frac{R_3 \mathcal{E}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \qquad (۱۱۸)$$

$$I_3 = \frac{R_2 \mathcal{E}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$



شکل ۳۱- حلقه های کرکهوف برای مدار شکل ۳۰

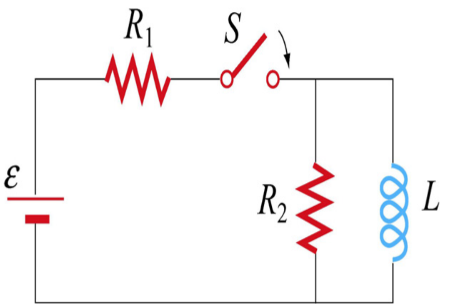
(پ): درست پس ار قطع کلید، جریان در R_1 صفر می شود (یعنی $I_1 = 0$) این یعنی $I_2 + I_3 = 0$. از سوی دیگر، حلقه ی (۲) در شکل (۳۱) حالا همانند مدار RL فروافتی رفتار می کند و I_3 کاهش می یابد. پس

$$I_3 = -I_2 = \frac{R_2 \mathcal{E}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \qquad (۱۱۹)$$

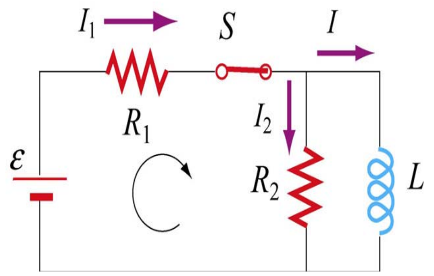
(ت): پس از آنکه کلید به ودت درازی قطع شود همه ی جریان ها صفر خواهند شد $I_1 = I_2 = I_3 = 0$.

مثال ۲۰- باز هم مدار RL: در مدار شکل (۳۲) ، فرض کنید کلید مدار در زمان $t = 0$ بسته می شود. در زمان دیرتر t چه جریانی از خودالقا می گذرد

حل : جریان های گذرنده از مقاومت های R_1 و R_2 را به ترتیب I_1 و I_2 بنامید. جریانی را که از L می گذرد I بنامید. این جریان ها در شکل (۳۳) نشان داده شده اند. از قانون شاخگی کرکهوف داریم: $I_1 = I_2 + I$. اگر قانون کرکهوف را برای حلقه ی سمت چپ شکل (۳۳) به کار ببریم به دست می آید



شکل ۳۲- یک مدار RL



شکل ۳۳- مدار RL و قانون کرشهوف

$$\mathcal{E}-(I+I_2)R_1-I_2R_2=0 \qquad (۱۲۰)$$

هم چنین از قانون کرکهوف برای حلقه‌ی سمت چپ داریم

$$\mathcal{E}-(I+I_2)R_1=L\frac{dI}{dt} \qquad (۱۲۱)$$

این دو معادله را می توان با هم ترکیب کرد. خواهیم داشت

$$I_2R_2=L\frac{dI}{dt} \;\Rightarrow\; I_2=\frac{L}{R_2}\frac{dI}{dt} \qquad (۱۲۲)$$

اگر در رابطه ی (۱۲۰) به ازای I_2 از رابطه ی (۱۲۲) قرار دهیم به دست می آید

$$\mathcal{E}-I\left(I+\frac{L}{R_2}\frac{dI}{dt}\right)R_1-L\frac{dI}{dt}=0$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{E}-IR_1-\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)L\frac{dI}{dt}=0 \qquad (۱۲۳)$$

اگر دو طرف رابطه ی (۱۲۳) را به $(R_1+R_2)/R_2$ تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\mathcal{E}'-IR'-L\frac{dI}{dt}=0 \qquad (۱۲٤)$$

که در آن

$$\mathcal{E}'\equiv\frac{R_2\mathcal{E}}{R_1+R_2} \quad , \quad R'\equiv\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \qquad (۱۲٥)$$

معادله ی دیفرانسیل رابطه ی (۱۲٤) را می توان حل کرد. پاسخ آن عبارت است از

$$I(t)=\frac{\mathcal{E}'}{R'}\left(1-e^{-R't/L}\right) \qquad (۱۲٦)$$

چون

$$\frac{\mathcal{E}'}{R'}=\frac{\mathcal{E}R_2/(R_1+R_2)}{R_1R_2/(R_1+R_2)}=\frac{\mathcal{E}}{R_1} \qquad (۱۲۷)$$

می توان جریان گذرنده از خودالقا را به صورت زیر نوشت

$$I(t)=\frac{\mathcal{E}}{R_1}\left(1-e^{-R't/L}\right)=\frac{\mathcal{E}}{R_1}\left(1-e^{-t/\tau}\right) \qquad (۱۲۸)$$

که در آن $\tau\equiv L/R'$ ثابت زمانی است.

مثال ۲۱ مدار LC : مدار شکل (۳٤) را در نظر بگیرید و فرض کنید که کلید برای مدت زمان درازی به نقطه a مدار وصل بوده است و ناگهان در زمان $t=0$ آن را به نقطه ی b برمی گردانیم. کمیت های زیر را

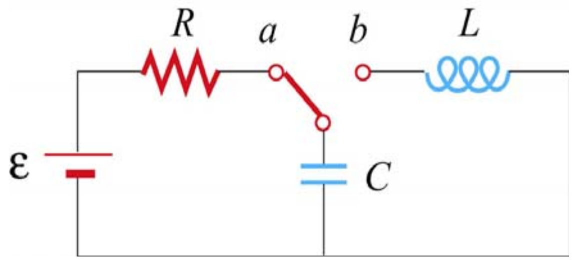
حساب کنید

(الف): بسامد نوسان مدار LC

(ب): بیشینه بار که در خازن ظاهر می شود.

(پ): بیشینه جریان گذرنده از خودالقا

(ت): انرژی کل مدار در هر زمان t



شکل ۳٤- مدار LC

حل: (الف) بسامد (زاویه ای) مدار LC از رابطه ی $\omega = 2\pi f = 1/\sqrt{LC}$ به دست می آید. بنابراین داریم

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{۱۲۹}$$

(ب): بیشینه بار انباشته شده در خازن پیش از آنکه کلید را به b برگردانیم عبارت است از

$$Q = C\mathcal{E} \tag{۱۳۰}$$

(پ): انرژی ذخیره شده در خازن پیش از آنکه کلید را به b برگردانیم، براب راست با

$$U_E = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 \tag{۱۳۱}$$

از سوی دیگر انرژی مغناطیسی ذخیره شده در خازن برابر است با

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 \tag{۱۳۲}$$

بنابراین، وقتی جریان به مقدار بیشینه‌ی خود می‌رسد، همه ی انرژی که در آغاز در خازن ذخیره شده بود اینک در خودالقا ذخیره می شود:

$$\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 \tag{۱۳۳}$$

و از اینجا جریان بیشینه در خودالقا به دست می آید

$$I_0 = \mathcal{E}\sqrt{C/L} \tag{۱۳٤}$$

(ت): در هر زمانی انرژی کل مدار عبارت است از

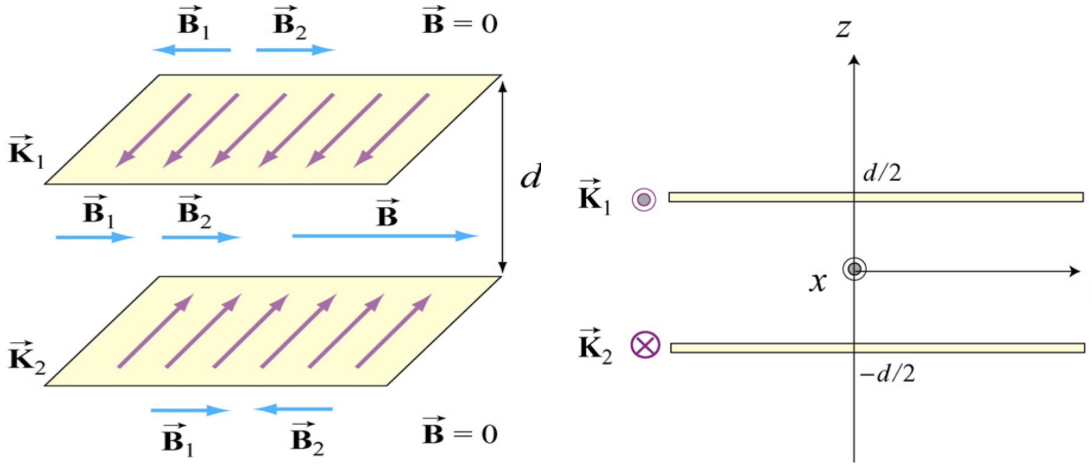
$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 \tag{۱۳۵}$$

۷- انتقال تنش با میدانهای مغناطیسی

در فصل مربوط به قانون آمپر نشان دادیم که میدان مغناطیسی صفحه‌ی بینهایت گسترده در صفحه‌ی xy با چگالی جریان سطحی $\mathbf{K} = K\,\hat{\mathbf{i}}$ (مثال ۵ و رابطه ی (۲۸) را در آن فصل نگاه کنید) عبارت است از

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{\mathbf{j}} & ; \quad z > 0 \\ \dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{\mathbf{j}} & ; \quad z < 0 \end{cases} \tag{۱۳٦}$$

اینک دو صفحه را در نظر بگیرید که برابر شکل (۳۵) به فاصله ی d از یکدیگر قرار دارند و چگالی جریان سطحی یکسان، اما در خلاف جهت هم در آنها شارش دارد.



شکل ۳۵- دو صفحه ی بینهایت گسترده ی جریان های موازی و غیر هم جهت

با استفاده از اصل برنهش می توان نشان داد که میدان فقط در فضای بین دو صفحه غیر صفر و برابر است با

$$B=\mu_0 K\,\hat{\mathbf{j}}\quad,\quad -d/2<z<d/2 \tag{۱۳۷}$$

اگر مساحت صفحه را A بنامیم ، انرژی مغناطیسی انباشته شده در این سامانه عبارت است از

$$U_B=\frac{B^2}{2\mu_0}(Ad)=\frac{(\mu_0 K)^2}{2\mu_0}(Ad)=\frac{\mu_0}{2}K^2(Ad) \tag{۱۳۸}$$

و بنابراین چگالی انرژی مغناطیسی برابر است با

$$u_B=\frac{U_B}{Ad}=\frac{\mu_0}{2}K^2 \tag{۱۳۹}$$

در صفحه ی بالایی جزء جریان $Id\mathbf{l}_1=K(\Delta x)(\Delta y)\,\hat{\mathbf{i}}$ را در نظر بگیرید. به این جزء جریان از طرف میدان مغناطیسی صفحه ی پایینی نیروی مغناطیسی وارد می شود و برابر است با

$$d\mathbf{F}_{21}=Id\mathbf{l}_1\times\mathbf{B}_2=\left(K\,\Delta x\;\Delta y\;\hat{\mathbf{i}}\right)\times\left(\frac{\mu_0}{2}K\;\hat{\mathbf{j}}\right)=\frac{\mu_0}{2}K^2\left(\Delta x\;\Delta y\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۴۰}$$

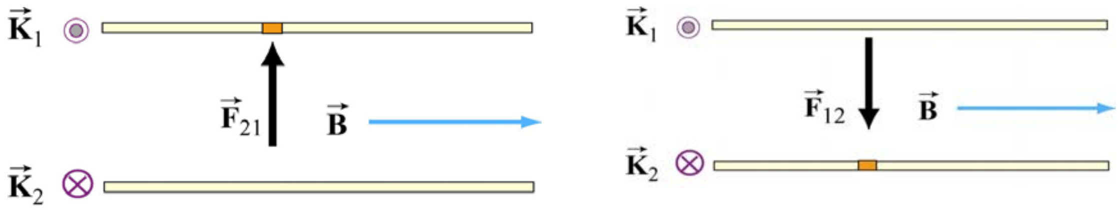
این نیرو در جهت $+\hat{\mathbf{k}}$ و بنابراین، رانشی است. این را انتظار داشتیم، چون جریان ها در خلاف جهت هم اند. چون $d\mathbf{F}_{21}$ با مساحت جزء جریان متناسب است، بگذارید نیرو در واحد سطح را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\mathbf{f}_{21}\equiv\mathbf{K}_1\times\mathbf{B}_2=\frac{\mu_0}{2}K^2\hat{\mathbf{k}}=u_B\,\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۴۱}$$

پس، می بینیم که نیروی وارد بر واحد سطح، f_{21}، درست با چگالی انرژی مغناطیسی u_B برابر است. از نظر فیزیکی می توان f_{21} را به صورت فشار مغناطیسی توصیف کرد

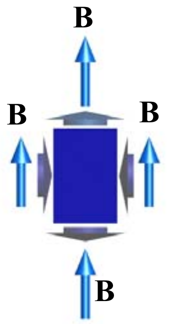
$$f_{21}\equiv P=u_B=\frac{B^2}{2\mu_0} \tag{۱۴۲}$$

در شکل (٣٦) نیروی رانشی وارد به صفحه ها نشان داده شده است.



شکل ٣٦- نیروی مغناطیسی وارد به صفحه ی پایین (سمت راست) و صفحه ی بالا (سمت چپ)

اینک می خواهیم حالتی عمومی تر از انتقال تنش (فشار یا کشش) را بررسی کنیم. در شکل (٣٧) یک سطح بسته ی پنداری (جعبه ای پنداری) در یک میدان مغناطیسی نشان داده شده است. اگر به وجه سمت چپ این جعبه ی فرضی نگاه کنیم، می بینیم که میدان مغناطیسی موازی سطح و به سوی بالاست و به بردار یکه ی عمود بر آن سطح(و به سمت چپ) عمود است. با توجه به شکل (٣٦) می بینیم که میدان مغناطیسی در جهت عمود بر خودش به آن سطح فشار وارد می کند و سطح را به سوی *راست* هل می دهد. پیکان کلفت و کوتاه جهت فشار را نشان می دهد. هم چنین اگر به وجه سمت راست جعبه ی پنداری نگاه کنیم، می بینیم که میدان مغناطیسی به این سطح هم فشاری به سوی چپ وارد می کند. اگر بخواهیم تنش کل را که میدان مغناطیسی درراستای چپ- راست به درون این جعبه ی پنداری انتقال می دهد، حساب کنیم انها را باهم جمع می کنیم. اگر میدان مغناطیسی یکنواخت باشند، نیروی الکترومغناطیسی کل که به درون جعبه انتقال می یابند عبارت است از یک هل دادن به سوی چپ و یک هل دادن برابر به سوی راست. بنابراین در راستای چپ- راست جمع آنها صفر است.



شکل ٣٧- جعبه ای پنداری در میدان مغناطیسی

اگر وجه سمت راست این جعبه در درون یک پیچه ی (سولونویید) دراز و وجه سمت چپ در بیرون پیچه قرار داشتند، چون میدان در درون پیچه به سوی بالاست و در بیرون آن صفر است، آنگاه فشاری به سوی چپ به جعبه وارد می شد . در این صورت گوییم میدان مغناطیسی فشار برون سویی به دیواره ی پیچه وارد می کند. با نگاهی ساده به توپولوژی میدان مغناطیسی می توان به این نتیجه رسید. در میدان مغناطیسی به اندازه ی کافی قوی یک چنین نیرویی سبب می شود که دیواره ی پیچه به سوی بیرون برآمدگی پیدا کند.

حال اگر به سطح بالایی جعبه ی فرضی نگاه کنید، دیده می شود که میدان و بردار یکه ی عمود بر آن سطح هم سو اند و می توان نشان داد که میدان مغناطیسی کششی در راستای خودش به این سطح منتقل می کند. در این حالت کشش به سوی بالاست. درست مانند این که به سطح ریسمانی وصل کرده باشیم و آن را به بالا بکشیم (تعیین واقعی جهت نیرو نیازمند بحثی پیشرفته و استفاده از تانسور تنش مکسول است.) در سطح پایینی جعبه ی پنداری میدان و بردار یکه ی عمود بر آن سطح پاد موازی اند و نیروی تنش وارد به

سطح به سوی به سوی پایین است. توجه کنید که چه میدان مغناطیسی به سوی صفحه یا بیرون از آن باشد، این نیرو، کششی موازی بردار یکه ی عمود بر سطح است. چون تنش یا فشار با مربع اندازه ی میدان متناسب است.

برای این که تنش کل انتقالی به درون جعبه ی پنداری را در راستای بالا- پایین حساب کنیم، این دو تنش انتقالی را باهم جمع می کنیم. اگر میدان معناطیسی یکنواخت باشد، نیروی مغناطیسی که در راستای بالا- پایین به ناجیه ی درونی جعبه ی پنداری ما انتقال می یابد از یک کشش رو به بالا و یک کشش برابر اما در خلاف جهت به سوی پایین است و جمعشان صفر می شود.

اندازه ی این تنش ها و فشارها ی وارد به سطوح مختلف جعبه ی پنداری ما برابر $B^2/2\mu_0$ است.

جمع بندی این بحث را می توان به صورت زیر خلاصه کرد: *نیروهای الکترومغناطیسی تبادل کننده های برهم‌کنش بین اجسام مادی اند. میدان تنش را در فضا انتقال می دهد. میدان مغناطیسی تنش را در راستای خود و فشار را در جهت عمود بر خود منتقل می‌کند. اندازه ی تنش یا فشار که به وسیله ی میدان مغناطیسی انتقال پیدا می‌کند برابر است با*

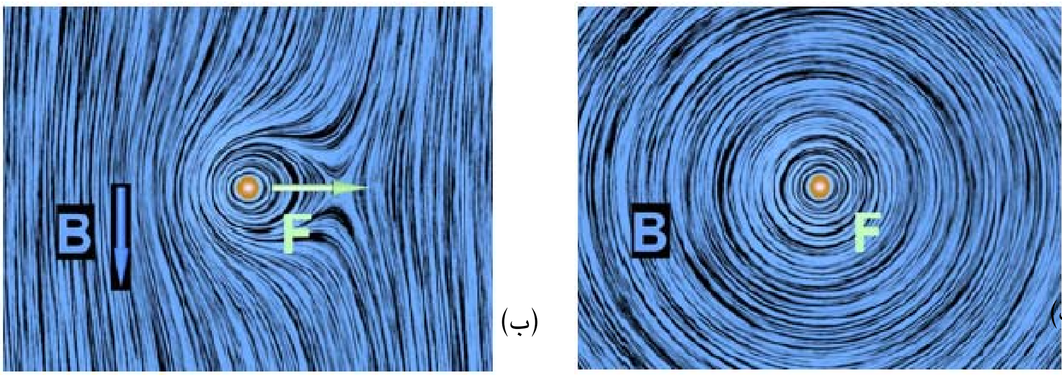
$$P = u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (١٤٣)$$

٨- بار الکتریکی در میدان مغناطیسی متغیر با زمان

به عنوان مثالی از تنش هایی که میدان مغناطیسی منتقل می کند، بار نقطه ای مثبت را در مبداء مختصات در نظر بگیرید. این بار الکتریکی در میدان مغناطیسی خارجی که نسبت به زمان تغییرات تندی دارد حرکت می کند. میدان مغناطیسی خارجی نسبت به فضا یکنواخت است اما نسبت به زمان به صورت زیر تغییر می کند.

$$\mathbf{B} = -B_0 \sin^4\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (١٤٤)$$

فرض ما براین است که تغییرات این میدان نسبت به زمان چنان سریع است که جابه جایی بار در یک دوره، T ، قابل چشم پوشی است. در شکل (٣٨) بار الکتریکی در دو زمان در این میدان نشان داده شده است.



(الف) (ب)

شکل ٣٨- بار مثبت در میدان مغناطیسی متغیر با زمان. بار به سوی بیرون از صفحه حرکت می کند.

شکل (۳۸–الف) بار الکتریکی را در زمان $t=0$ نشان می دهد که میدان معناطیسی عمودی صفر است و ما تنها خط های میدان مغناطیسی بار متحرک را می بینیم (بار به سوی بیرون از صفحه حرکت می کند و بنابراین خط های میدان آن دایره های ساعتگرد اند). شکل (۳۸– ب) وضعیت را در زمان $t=T/4$ نشان می دهد. در این زمان میدان مغناطیسی عمودی و به سوی پایین بیشین مقدار خود را دارد. در سمت چپ بار الکتریکی میدان مغناطیسی بار و میدان خارجی هم سو (در جهت پایین) اند و در نتیجه میدان افزایش یافته است. در سمت راست بار، میدان مغناطیسی بار و میدان خارجی در خلاف جهت یکدیگر اند و میدان کاهش یافته است (در یک نقطه در سمت راست بار میددان صفر است). وضعیت شکل (۳۸– ب) را می توان این گونه توصیف کرد که نیروی خالصی به سوی راست به بار الکتریکی متحرک وارد می شود. این پدیده به این علت روی می دهد که فشار میدان مغناطیسی در سمت چپ بار بسیار بیشتر از سمت چپ آن است. اگر جهت حرکت بار به درون صفحه می بود، نیرو به سوی چپ می شد. در این شکل شارش انرژی به اطراف بار با افزایش میدان خارجی به خوبی دیده می شود. در اثر این شارش انرژی، تنش شکل می گیرد و نیرویی را در راستای نشان داده شده به بار مثبت متحرک منتقل می کند.

مقدار نیروی وارد به بار متحرک در شکل (۳۸– ب) را می توان به صورت زیر تخمین زد.

میدان مغناطیسی در حد سرعت های غیر نسبیتی به تفریب برابر است (رابطه ی (۲۹) فصل چشمه ی میدان مغناطیسی را نگاه کنید) با

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2} \qquad (۱٤٥)$$

در وضعیتی که در شکل (۳۸– ب) نشان داده شده است مربوط به $t=T/4$ است در این زمان اندازه ی میدان مغناطیسی خارجی B_0 است. فرض کنید در این زمان نقطه ای که در آن میدان مغناطیسی بار و میدان مغناطیسی خارجی یکدیگر را خنثی می کنند در فاصله ی r_0 باشد. بنابراین داریم

$$B_0=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r_0^2} \qquad (۱٤٦)$$

کره ای به شعاع r_0 را در نظر بگیرید که بار الکتریکی را در درون خود دارد. مساحت کره را می توان برحسب میدان نوشت:

$$A=4\pi r_0^2=\frac{\mu_0 qv}{B_0} \qquad (۱۴۷)$$

بنابه رابطه ی (۱٤۲) فشار (نیرو بر واحد سطح) یا تنش انتقالی به این کره از مرتبه ی $P=B^2/2\mu_0$ است. چون میدان مغناطیسی در روی سطح کره از مرتبه ی B_0 است، نیروی کلی که میدان مغناطیسی منتقل می کند از مرتبه ی زیر است

$$F=PA=\frac{B_0^2}{2\mu_0}(4\pi r_0^2)=\frac{B_0^2}{2\mu_0}\frac{\mu_0 qv}{B_0}\approx qvB_0 \qquad (۱٤۸)$$

البته این نیرو ترکیبی از دو نیروست: فشاری که از سمت چپ به کره وارد می‌شود و آن را به راست هل می‌دهد و تنشی است که در سمت راست کره به وجود می اید و آن را به راست می کشد.

رابطه‌ی دقیق برای نیروی مغناطیسی وارد به بار در حال حرکت عبارت است از $\mathbf{F}_B = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. با وجود این ، تقریبی را که ما در بالا به دست آوردیم نشان می دهد که فشار و تنش که از سطح کره ای که بار را احاطه کرده است، منتقل شده اند از مرتبه ی $B^2/2\mu_0$ است. افزون بر این ، بحث بالا نشان می دهد که چرا نیروی مغناطیسی وارد به بار متحرک به جهت حرکت آن و به میدان مغناطیسی که بار در آن قرار دارد، عمود است.

پیوست ۱ حل عمومی مدار RLC

در مثال ۱۸ نشان دادیم که مدار RLC را می توان با معادله ی دیفرانسیل زیر توصیف کرد:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0 \qquad \text{(پ-۱-۱)}$$

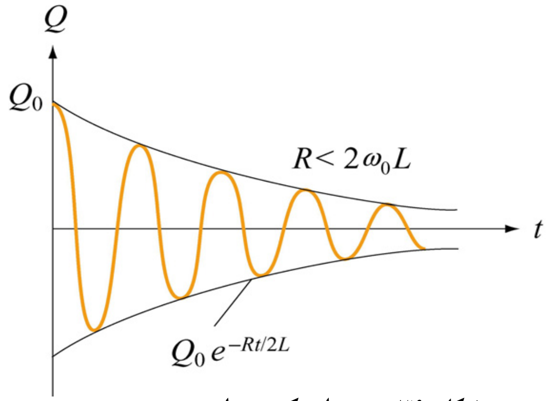
پاسخ این معادله عبارت است از

$$Q(t)=Q_0\,e^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\phi) \qquad \text{(پ-۲-۱)}$$

که در آن $\gamma\equiv R/2L$ ضریب میرایی و $\omega'\equiv\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ بسامد نوسان های میراست. $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ بسامد مدار نوسانی نامیرا(LC) است. برحسب این که مقادیر نسبی γ و ω_0 چگونه باشند، سه حالت ممکن برای پاسخ پ-۲-۱ پیش می آید. در زیر به آنها می پردازیم.

(الف): کندمیرایی

اگر $\omega_0>\gamma$ یا به طور هم ارز ω' مثبت و حقیقی باشد، گوییم سامانه کندمیراست. وقتی این وضعیت روی می دهد که مقاومت مدار کوچک باشد. در این حالت نوسان مقدار بار (تابع کسینوسی در رابطه ی پ-۲-۱) با دامنه ی فروافتی $Q_0\,e^{-\gamma t}$ همراه است. بسامد این نوسان میرا کمتر از بسامد نوسان نامیراست: $\omega'<\omega_0$. در شکل (۳۹) تغییرات بار خازن به صورت تابعی از زمان نشان داده شده است. برای نمونه، فرض کنید که شرایط اولیه چنان فراهم شده است که داریم $Q(t=0)=Q_0$. بنابراین در رابطه ی (پ-۲-۱) فاز $\phi=0$ است. در این صورت رابطه ی (پ-۲-۱) به صورت زیر در می آید



شکل ۳۹- نوسان کندمیرا

$$Q(t)=Q_0\,e^{-\gamma t}\cos\omega' t \qquad \text{(پ-۳-۱)}$$

و جریان متناظر با آن عبارت است از

$$I(t)=-\frac{dQ}{dt}=Q_0\omega' e^{-\gamma t}[\sin\omega' t+(\gamma/\omega')\cos\omega' t] \qquad \text{(پ-٤-۱)}$$

برای R کوچک ، رابطه ی بالا را می توان به تقریب به صورت زیر نوشت

$$I(t) \approx \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\gamma t}[\sin\omega' t + \delta] \qquad , \qquad \delta \equiv \tan^{-1}(\gamma/\omega') \tag{پ-۵-۱}$$

(ب): تندمیرایی

حالت تند میرایی هنگامی روی می دهد که $\omega_0 < \gamma$ باشد. در این صورت ω' موهومی می شود و رفتار نوسانی به وجود نمی آید. با نوشتن ω' به صورت $\omega' = i\,\beta$ و $\beta \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ می توان نشان داد که عمومی ترین پاسخ معادله ی (پ-۱-۱) عبارت است از

$$Q(t) = Q_1 e^{-(\gamma+\beta)t} + Q_2 e^{-(\gamma-\beta)t} \tag{پ-۶-۱}$$

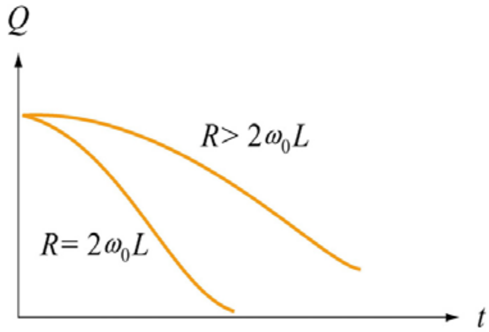
که در آن Q_1 و Q_2 مقادیر ثابت اند و با شرایط اولیه تعیین می شوند.

(پ): میرایی بحرانی

میرایی بحرانی هنگامی روی می دهد که $\omega_0 = \gamma$ و $\omega' = 0$ باشد. در این حالت هم رفتار نوسانی وجود ندارد و پاسه عمومی عبارت است از

$$Q(t) = (Q_1 + Q_2\, t)e^{-\gamma t} \tag{پ-۷-۱}$$

باز هم Q_1 و Q_2 مقادیر ثابت اند و با شرایط اولیه تعیین می شوند. در این حالت می توان نشان داد که انرژی سامانه با زمان به سرعت فروافت می کند. رفتار کیفی حالت های تندمیرایی و میرایی بحرانی در شکل (۴۰) نشان داده شده اند.



شکل ۴۰- نمودار رفتار کیفی $Q(t)$ برای نوسان تندمیرا و نوسان بحرانی

ضریب کیفیت

وقتی مقاومت مدار RLC کوچکباشد، سامانه کندمیرا می شود و بار خازن با دامنه ی فروافتی $Q_0 e^{-\gamma t}$ نوسان می کند. کیفیت این نوسان کندمیرا با "ضریب کیفیت" Q_f سنجیده می شود (نماد Q_f را با نماد بار الکتریکی اشتباه نکنید!). هرچه Q_f بزرگتر باشد میرایی کمتر و در نتیجه کیفیت نوسان افزایش می یابد . Q_f به طور ریاضی به صورت زیر تعریف می شود

$$Q_f \equiv \omega' \frac{U}{|dU/dt|} \tag{پ-۸-۱}$$

که عبارت است ازحاصل ضرب ω' و نسبت انرژی سامانه به توان اتلافی میانگین. انرژی الکتریکی سامانه دو بخش دارد: انرژی ذخیره شده در خازن و انرژی مغناطیسی. انرژی خازن عبارت است از

$$U_E = \frac{Q(t)^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega' t + \phi) \tag{پ-۹-۱}$$

برای این که انرژی مغناطیسی را به دست بیاوریم، با فرض $\omega' \gg \omega$ و $\omega'^2 \approx \omega_0^2 = 1/LC$ جریان به تقریب به صورت زیر در می آید

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = Q_0\omega' e^{-\gamma t}[\sin(\omega' t+\phi) + (\gamma/\omega')\cos(\omega' t+\phi)]$$

$$\approx Q_0\omega' e^{-\gamma t}\sin(\omega' t+\phi) \approx \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\gamma t}\sin(\omega' t+\phi) \quad \text{(پ-۱۰-۱)}$$

بنابراین، انرژی مغناطیسی انباشته در خودالقا برابر است با

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 \approx \frac{LQ_0^2}{2}\omega'^2 e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega' t+\phi) \approx \frac{Q_0^2}{2C}e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega' t+\phi) \quad \text{(پ-۱۱-۱)}$$

از جمع کردن رابطه های (پ-۹-۱) و (پ-۱۱-۱) انرژی کل سامانه ی به صورت زیر به دست می آید.

$$U = U_E + U_B \approx \frac{Q_0^2}{2C}e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega' t+\phi) + \frac{Q_0^2}{2C}e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega' t+\phi) = \left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)e^{-2\gamma t} \quad \text{(پ-۱۲-۱)}$$

مشتق این رابطه نسبت به زمان آهنگ تغییر انرژی را به دست می دهد

$$\frac{dU}{dt} = -2\gamma\left(\frac{Q_0^2}{2C}e^{-2\gamma t}\right) = -2\gamma U \quad \text{(پ-۱۳-۱)}$$

بنابراین، ضریب کیفیت Q_f به صورت زیر در می آید

$$Q_f \equiv \omega' \frac{U}{|dU/dt|} = \frac{\omega'}{2\gamma} = \frac{\omega' L}{R} \quad \text{(پ-۱٤-۱)}$$

همان گونه که انتظار داشتیم، هر چه مقدار R کوچک تر باشد، کیفیت نوسان بیشتر است.

مدارهای جریان متناوب

۱- نیروی محرکه ی متناوب

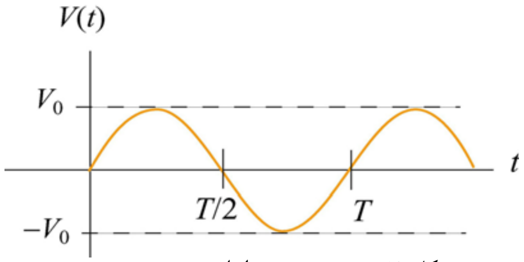
بنابه قانون القاء فاراده، شار مغناطیسی متغیر می تواند نیروی محرکه تولید کند. به ویژه، اگر پیچه ای در میدان مغناطیسی بچرخد (مولد) نیروی محرکه ی آن به طور سینوسی با زمان تغییر می کند و جریان متناوب به وجود می آورد. پس، می توان مولد را چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب پنداشت. چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب را در یک مدار الکتریکی با نماد شکل (۱) نشان می دهند. برای مثال ، ولتاژ متناوب را می توان با رابطه ی زیر نشان داد.


شکل ۱- نماد چشمه ی ولتاژ متناوب

$$V(t) = V_0 \sin \omega t \qquad (۱)$$

بیشینه ی ولتاژ، V_0 ، **دامنه** نامیده می شود.

با تغییر سینوس بین ۱+ و ۱-، ولتاژ بین $+V_0$ و $-V_0$ تغییر می کند. نمودار ولتاژ $V(t)$ برحسب زمان در شکل (۲) نشان داده شده است. تابع سینوس نسبت به زمان دوره ای است ؛ یعنی اندازه ی ولتاژ در زمان t با مقدار آن در زمان بعدی $t' = t + T$ برابر است.



شکل ۲- چشمه ی ولتاژ سینوسی

زمان T *دوره ی* آن است. بسامد f ولتاژ با

$$f = 1/T \qquad (۲)$$

تعریف می شود. یکای بسامد هرتز (Hz) یا s^{-1} است. بسامد زاویه ای با $\omega \equiv 2\pi f$ به بسامد و در نتیجه به دوره مربوط است.

وقتی چشمه ی ولتاژ متناوب به مدار RLC وصل می شود به مدار انرژی می دهد تا انرژی تلف شده در مقاومت را جبران کند. با این کار از میرایی نوسان بار ، جریان و اختلاف پتانسیل جلوگیری می کند و نوسان بار و جریان و اختلاف پتانسیل نوسان های واداشته می شوند. پس از سپری شدن" زمان گذرا " ، شارش جریان در مدار در اثر این ولتاژ وادارنده روی می دهد و واکنش مدار به این ولتاژ است. جریانی را که در مدار شارش می کند می توان به صورت زیر نوشت

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi) \qquad (۳)$$

این جریان با همان بسامد ولتاژ نوسان می کند. دامنه ی جریان I_0 و فاز آن ϕ است که به بسامد وادارنده بستگی دارد.

۲- مدارهای متناوب ساده

پیش از بررسی مدار واداشته ی RLC ، مدارهای ساده را در نظر می گیریم که تنها یک عنصر (یک مقاومت ، یک خودالقا ، یک خازن) به چشمه ی ولتاژ متناوب سینوسی وصل است.

۲-۱- مدار مقاومت

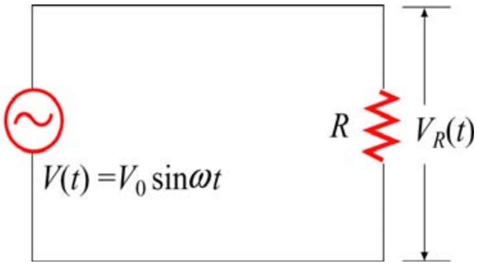
مداری را برابر شکل (۳) در نظر بگیرید که فقط یک مقاومت به چشمه ی ولتاژ سینوسی وصل است (این مدار متناظر با مدار RLC است که در آن ظرفیت $C = \infty$ و خودالقا $L = 0$ است. این را خواهیم دید.) اگر قانون کرشهوف را برای این مدار به کار ببریم ، می بینیم که داریم

$$V(t) - V_R(t) = V(t) - I_R(t)R = 0 \qquad (٤)$$

که در آن $V_R(t) = I_R(t)R$ اختلاف پتانسیل لحظه ای دو سر مقاومت است. جریان لحظه ای در مدار با رابطه ی زیر داده می شود

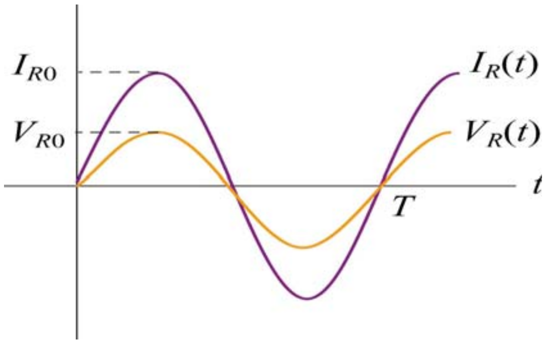
$$I_R(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_{R0}(t)\sin\omega t}{R} = I_{R0}\sin\omega t \qquad (٥)$$

که در آن $V_{R0} = V_0$ و $I_{R0} = V_{R0}/R$ جریان بیشینه است. از مقایسه ی رابطه های (٥) و (٣) می بینیم که $\phi = 0$ است. یعنی $I_R(t)$ و $V_R(t)$ هم فاز اند. هم فاز بودن به این معنی است که

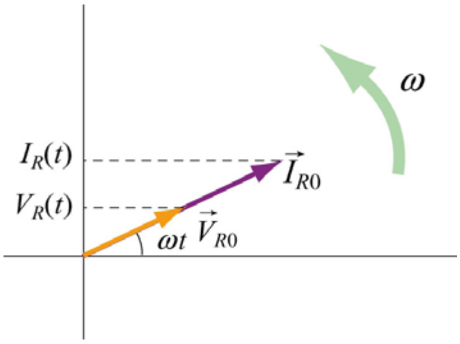


شکل ٣- مقاومت در مدار با ولتاژ متناوب

بیشینه یا کمینه ی دوهر دو در یک زمان روی می دهد. در شکل (٤) وابستگی زمانی جریان گذرنده از مقاومت و ولتاژ دو سر آن نشان داده شده اند. رفتار $I_R(t)$ و $V_R(t)$ را با نمودار فازنما هم می توان همانند شکل (٥) نمایش داد. فازنما ردار چرخانی است که از ویژگی های زیر برخوردار است:



شکل ٤- وابستگی زمانی $V_R(t)$ و $I_R(t)$



شکل ٥- فازنما ی جریان گذرنده از مقاومت

١- طول: طول بردار فازنما متناظر با دامنه است.

٢- سرعت زاویه ای: بردار نماینده ی کمیت متناوب با سرعت زاویه ای ω پادساعتگرد می چرخد.

٣- تصویر: تصویر بردار در راستای محور قائم، با مقدار کمیت متناوب در زمان t متناظر است.

فازنما را با نماد برداری نشان خواهیم داد. اندازه ی فازنمای $\mathbf{V}_{R0}$ مقدار ثابت دامنه ی V_{R0} آن است. تصویر فازنمای $\mathbf{V}_{R0}$ در راستای محور عمودی، $V_{R0}\sin\omega t$، است که با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $V_R(t)$ در زمان t برابر است. فازنمای جریان گذرنده از مقاومت، $\mathbf{I}_{R0}$ ، هم توصیفی همانند دارد. از نمودار شکل (٥) فازنما دیده می شود که جریان و ولتاژ هم فاز اند.

میانگین زمانی جریان در یک دوره، T ، از رابطه ی زیر به دست می آید

$$\langle I_R(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_R(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_{R0}\sin\omega t\ dt = \frac{I_{R0}}{T}\int_0^T \sin\frac{2\pi t}{T}\ dt = 0 \qquad (٦)$$

این مقدار میانگین صفر است ؛ چون

$$\langle \sin \omega t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin \omega t \; dt = 0 \qquad (٧)$$

هنگامی که می خواهیم مقدارهای میانگین را حساب کنیم ، دانستن رابطه های زیر سودمند می شوند

$$\langle \cos \omega t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos \omega t \; dt = 0 \qquad (٨)$$

$$\langle \sin \omega t \; \cos \omega t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin \omega t \; \cos \omega t \; dt = 0 \qquad (٩)$$

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t \; dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \qquad (١٠)$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t \; dt = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \qquad (١١)$$

از این رابطه ها دیده می شود که میانگین مربع جریان غیرصفر است:

$$\langle I_R^2(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_{R0}^2 \sin^2 \omega t \; dt = I_{R0}^2 \frac{1}{T}\int \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{1}{2} I_{R0}^2 \qquad (١٢)$$

در واژگان جریان متناوب از جذر میانگین مربعی جریان و ولتاژ استفاده می شود که به صورت زیر تعریف می شوند.

$$I_{rms} \equiv \sqrt{\langle I_R^2(t)\rangle} = \frac{I_{R0}}{\sqrt{2}} \qquad (١٣)$$

$$V_{rms} \equiv \sqrt{\langle V_R^2(t)\rangle} = \frac{V_{R0}}{\sqrt{2}} \qquad (١٤)$$

جذر میانگین مربعی ولتاژ برق خانه ها در ایران $V_{rms} = 120$ ولت با بسامد $f = 60\,Hz$ است.

توان اتلافی در مقاومت را می توان برحسب این کمیت های میانگین مربعی به صورت زیر نوشت:

$$P_R(t) = I_R(t) V_R(t) = I_R^2(t) R$$

$$\Rightarrow \langle P_R(t)\rangle = \langle I_R^2(t) R\rangle = \frac{1}{2} I_{R0}^2 R = I_{rms}^2 R = I_{rms} V_{rms} = \frac{V_{rms}^2}{R} \qquad (١٥)$$

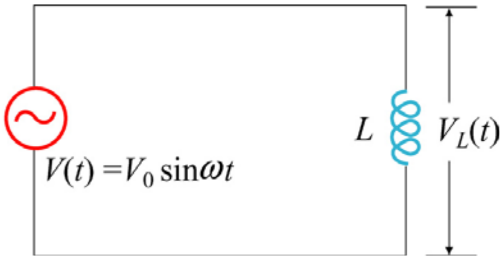
٢-٢- مدار خود القاء

مداری را برابر شکل (٦) در نظر بگیرید که در آن فقط یک خودالقا به مولد نیروی محرکه ی متناوب وصل است. این مدار متناظر با مدار RLC با ظرفیت خازن $C = \infty$ و مقاومت $R = 0$ است. با استفاده از قانون کرشهوف به این مدار، معادله ی ودار به صورت زیر به دست می آید

$$V(t) - V_L(t) = V(t) - L\frac{dI_L}{dt} = 0 \qquad (١٦)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dI_L}{dt} = \frac{V(t)}{L} = \frac{V_{L0}}{L}\sin \omega t \qquad (١٧)$$

که در آن $V_{L0}=V_0$ است. با انتگرال گیری از رابطه ی (۱۷) جریان به صورت زیر به دست می آید



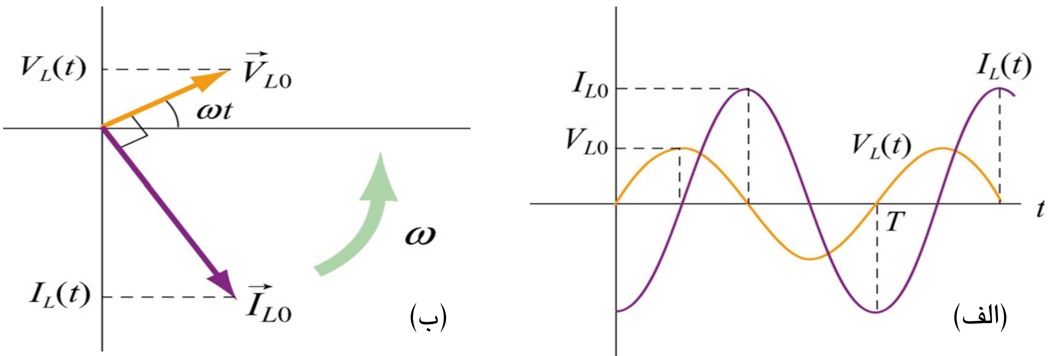
شکل ٦- مدار خود القا

$$I_L(t)=\int d\,I_L=\frac{V_{L0}}{L}\int \sin\omega t\,dt$$
$$=-\left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right)\cos\omega t=\left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right)\sin\left(\omega t-\pi/2\right)$$
(۱۸)

مقایسه ی رابطه ی (۱۸) و رابطه ی (۳) نشان می دهد که دامنه ی جریان گذرنده از خودالقا برابر است با

$$I_{L0}=\frac{V_{L0}}{\omega L}=\frac{V_{L0}}{X_L} \qquad (۱۹)$$

که در آن $X_L\equiv\omega L$ **واکنایی القایی** مدار است. مانند مقاومت، یکای واکنایی القایی اهم (Ω) است اما ، برعکس مقاومت، واکنایی به طور خطی به بسامد زاویه ای ω بستگی دارد و بنابراین، مقاومت مدار در برابر جریان با ω افزایش می یابد؛ چون در بسامد های بالا جریان سریع تر تغییر پیدا می کند. از سوی دیگر با میل کردن ω به صفر واکنایی القایی هم صفر می شود. از مقایسه ی رابطه ی (۱۸) و رابطه ی (۳) هم چنین می بینیم که ثابت فاز عبارت است از $\phi=+\pi/2$. نمودارهای جریان و ولتاژ و نیز فازنمای آنها در شکل (۷) نشان داده شده اند

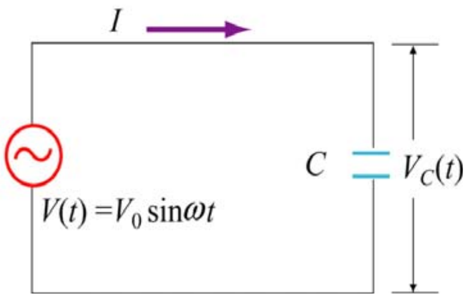


شکل ۷- (الف) نمایش جریان و ولتاژ مدار خودالقا برحسب زمان. (ب) فازنمای متناظر

همان گونه که از شکل (۷) پیداست، جریان $I_L(t)$ به اندازه ی $\phi=\pi/2$ نسبت به ولتاژ $V_L(t)$ اختلاف فاز دارد. یعنی یک چهارم چرخه پس از آنگه اختلاف پتانسیل دو سر خودالقا به بیشینه مقدار خود رسید، جریان $I_L(t)$ بیشینه می شود. بنابراین، گوییم *در مدار خودالقا جریان به اندازه ی $\pi/2$ از ولتاژ عقب تر است.*

۳-۲- مدار خازن

شکل (۸) مداری را نشان می دهد که در آن خازنی به یک چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب وصل است. این یک مدار RLC است که در آن هر دوی $R=0$ و $L=0$ اند. اگر قانون کرشهوف را در این مدار به کار ببریم ، معادله ی زیر برای مدار به دست می آید



شکل ۸- مدار خازن

$$V(t)-V_C(t)=V(t)-\frac{Q(t)}{C}=0 \qquad (۲۰)$$

ویا

$$Q(t)=CV(t)=CV_C(t) \qquad (۲۱)$$
$$=CV_{C0}\sin\omega t$$

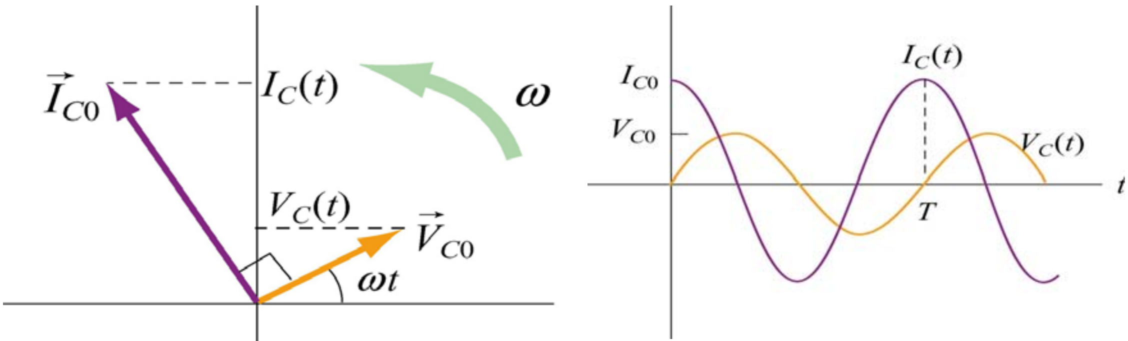
که در آن $V_{C0}=V_0$ است. از سوی دیگر جریان برابر است با

$$I_C(t)=+\frac{dQ}{dt}=\omega CV_{C0}\cos\omega t$$
$$=\omega CV_{C0}\sin(\omega t+\pi/2) \qquad (۲۲)$$

رابطه ی بالا نشان می دهد که بیشینه مقدار جریان عبارت است از

$$I_{C0}=\omega CV_{C0}=\frac{V_{C0}}{X_C} \qquad (۲۳)$$

که در آن $X_C\equiv 1/\omega C$ **واکنایی خازنی** نام دارد. یکای واکنایی خازنی هم اهم است و مقاومت موثر مدار خازنی است. توجه کنید که X_C با هر دوی ω و C نسبت وارون دارد و با $\omega\rightarrow 0$ واگرا می شود. از مقایسه ی رابطه ی (۲۳) و رابطه ی (۳) دیده می شود که $\phi=-\pi/2$. نمودار جریان و ولتاژ و نیز فازنمای این مدار در شکل (۹) نشان داده شده اند



شکل ۹- نمودار ولتاژ و جریان در مدار خازنی (سمت راست) و فازنمای آن (سمت چپ

توجه کنید که در زمان $t=0$ ولتاژ دو سر خازن صفر است در حالی که جریان در مدار بیشینه مقدار خود را دارد. در واقع ، $I_C(t)$ یک چهارم چرخه ($\phi=\pi/2$) زودتر از $V_C(t)$ به بیشینه مقدار خود می رسد . بنابراین ، گوییم *در مدار خازن جریان به اندازه ی $\pi/2$ از ولتاژ جلوتر است.*

۲-۴ – مدار RCL سری

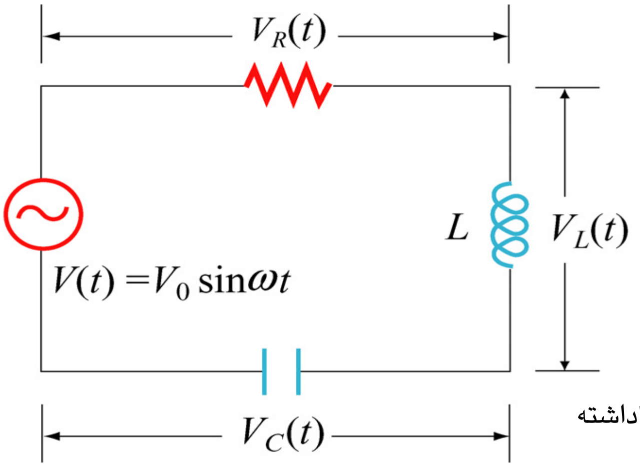
اینک مداری سری RCL را همانند شکل (۱۰) در نظر بگیرید. از قانون کرشهوف داریم

$$V(t)-V_R(t)-V_L(t)-V_C(t)=V(t)-IR-L\frac{dI}{dt}-\frac{Q}{C}=0 \qquad (۲٤)$$

این رابطه را می توان به صورت زیر نوشت

$$L\frac{dI}{dt}+IR+\frac{Q}{C}=V_0\sin\omega t \qquad (۲۵)$$

اگر فرض کنیم که خازن در آغاز بی بار بوده است، آنگاه $I=+dQ/dt$ با افزایش بار خازن متناسب



شکل ۱۰- مدار RCL سری واداشته

می شود و رابطه ی (۲۵) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V_0\sin\omega t \qquad (۲۶)$$

یک پاسخ ممکن معادله ی دیفرانسیل مرتبه دو بالا به صورت زیر است

$$Q(t)=Q_0\cos(\omega t-\phi) \qquad (۲۷)$$

دامنه ی Q_0 و فاز ϕ عبارتند از

$$Q_0=\frac{V_0/L}{\sqrt{(R\omega/L)^2+(\omega^2-1/LC)^2}}=\frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}$$

$$=\frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}} \qquad (۲۷)$$

$$\tan\phi=\frac{1}{R}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=\frac{X_L-X_C}{R} \qquad (۲۸)$$

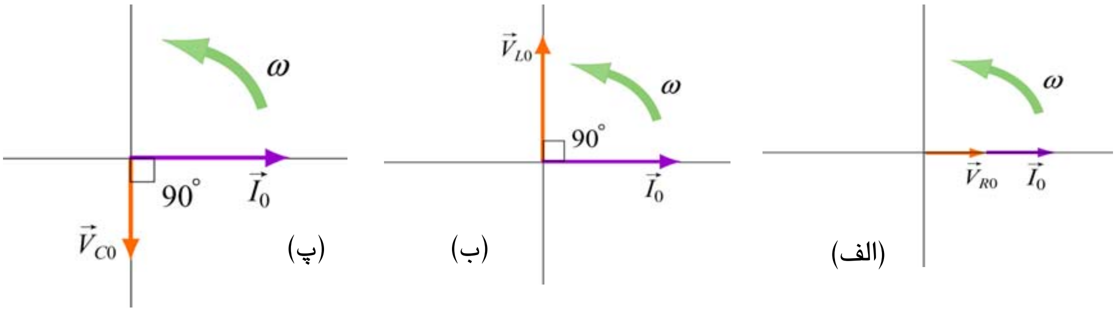
و جریان متناظر عبارت است از

$$I(t)=+\frac{dQ}{dt}=I_0\sin(\omega t-\phi) \qquad (۲۹)$$

دامنه ی این جریان عبارت است از

$$I_0=-Q_0\omega=-\frac{V_0}{\sqrt{R^2_(X_L-X_C)^2}} \qquad (۳۰)$$

توجه کنید که دامنه و فاز جریان در مدار سری RCL در همه ی نقاط یکسان است؛ در حالی که دامنه و فاز ولتاژ لحظه ای دو سر هر یک از عنصرهای مدار، R ، L و C رابطه ی متفاوتی با جریان دارند. می توان این در نمودارهای فازنما شکل (۱۱) دید. ولتاژها ی لحظه ای را می توان از شکل (۱۱) به صورت زیر به دست آورد.



شکل ۱۱- فازنما برای رابطه ی بین جریان و ولتاژ دو سر عنصرهای مدار سری RLC. **(الف)**: مقاومت ؛ **(ب)**: خودالقا؛ **(پ)**: خازن.

$$V_R(t) = I_0 R \sin\omega t \quad (۳۱)$$

$$V_L(t) = I_0 X_L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_{L0}\cos\omega t \quad (۳۲)$$

$$V_C(t) = I_0 X_C \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -V_{C0}\cos\omega t \quad (۳۳)$$

$$V_{R0} \equiv I_0 R \;,\quad V_{L0} \equiv I_0 X_L \;,\quad V_{C0} \equiv I_0 X_C \quad (۳٤)$$

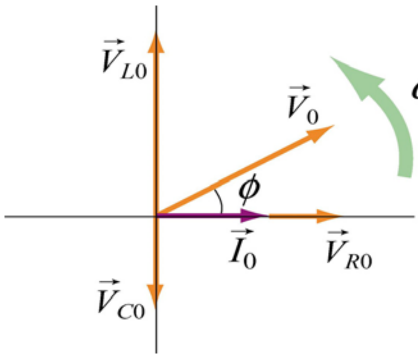
جمع این سه ولتاژ لحظه ای با ولتاژ چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب برابر است:

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) \quad (۳۵)$$

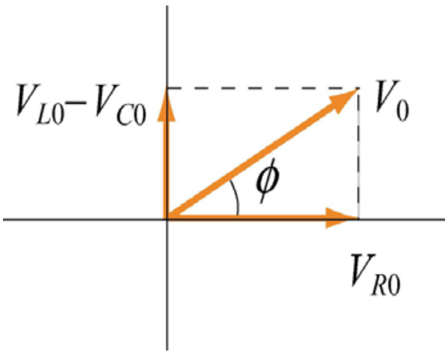
با استفاده از نمودار فازنما در شکل (۱۲) ، این رابطه را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{R0} + \mathbf{V}_{L0} + \mathbf{V}_{C0} \quad (۳٦)$$

باز هم دیده می شود که فازنمای جریان $\mathbf{I}_0$ به اندازه ی $\pi/2$ از ولتاژ دو سر خازن، $\mathbf{V}_{C0}$، جلوتر است اما به اندازه ی $\pi/2$ از ولتاژ دو سر خودالقا، $\mathbf{V}_{L0}$ عقب تر است. در حالی که مکان نسبی سه فازنمای ولتاژ ثابت است، آنها با گذشت زمان پادساعتگرد می چرخند. در شکل (۱۳) رابطه ی بین دامنه ی ولتاژها ی نشان



شکل ۱۲- فازنمای مدار سری RCL



شکل ۱۳- رابطه ی بین ولتاژها

داده شده اند. با توجه به این شکل می بینیم که

$$V_0 = |\mathbf{V}_0| = |\mathbf{V}_{R0} + \mathbf{V}_{L0} + \mathbf{V}_{C0}| = \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2}$$
$$= \sqrt{(I_0 R)^2 + (I_0 X_L - I_0 X_C)^2} = I_0\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (۳۷)$$

که به همان نتیجه ی (۲۹) می انجامد.

توجه به این نکته مهم است که بیشینه ی دامنه ی ولتاژ چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب با جمع بیشینه ی دامنه های ولتاژ دو سر عنصرهای مدار برابر نیست.

$$V_0 \neq V_{R0} + V_{L0} + V_{C0} \quad (۳۸)$$

دلیل این نابرابری این است که ولتاژها با هم هم فاز نیستند و در زمان های مختلف هر کدام به بیشینه مقدار خود می رسند.

۳- پاگیری (امپدانس)

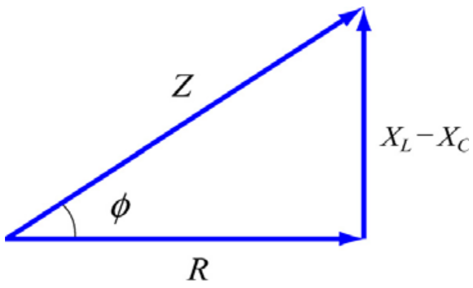
دیدیم که در مدار خودالقا، واکنایی خودالقایی $X_L = \omega L$ و در مدار خازنی، واکنایی خازنی $X_C = 1/\omega C$ نقش مقاومت موثر آن مدارها را داشتند. در مدار RCL مقاومت موثر مدار با پاگیری (امپدانس) توصیف و به صورت زیر تعریف می شود

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (۳۹)$$

رابطه ی بین Z ، X_L و X_C را می توان با شکل (۱٤) نشان داد. یکای پاگیری هم در سامانه ی یکاهای SI اهم است. می توان جریان را برحسب Z به صورت زیر نوشت

$$I(t) = \frac{V_0}{Z}\sin(\omega t - \phi) \quad (٤٠)$$

توجه کنید که Z هم همانند X_L و X_C به بسامد زاویه ای بستگی دارد. با استفاده از رابطه ی (۲۸) برای ϕ و رابطه ی (۳۹) برای Z به سادگی می توان حالت های حدی مدارهای ساده (مدارهای فقط با یک عنصر) را دوباره بازیافت. در جدول زیر این یافته ها خلاصه شده اند



شکل ۱٤- نمودار رابطه ی بین Z ، X_L و X_C

مدار ساده	R	L	C	$X_L = \omega L$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$	$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$
مدار مقاومت	R	0	C	0	0	0	R
مدار خودالقا	0	L	∞	X_L	0	$\pi/2$	X_L
مدار خازن	0	0	∞	0	X_C	$-\pi/2$	X_C

۴- تشدید

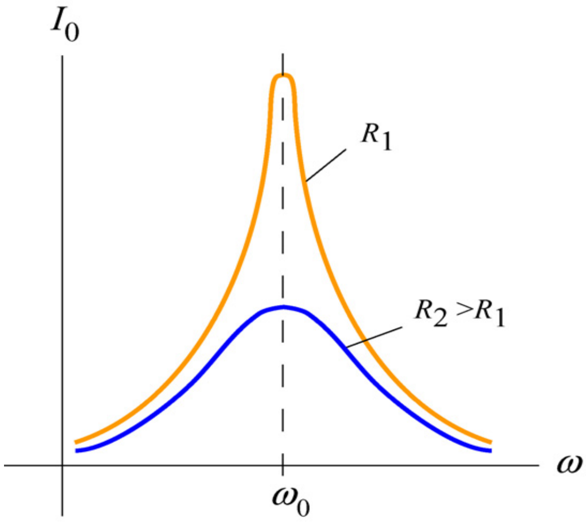
رابطه ی (۳۷) نشان می دهد که وقتی Z کمینه مقدار خود را داشته باشد، دامنه ی جریان $I_0 = V_0/Z$ به بیشینه مقدار خود می رسد. این وضعیت هنگامی روی می دهد که $X_L = X_C$ یا $L\omega = 1/C\omega$ باشد که به

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (٤١)$$

می انجامد. پدیده ای که دامنه ی جریان I_0 بیشینه می شود تشدید نامیده می شود و ω_0 بسامد تشدید است. در وضعیت تشدید، پاگیری $Z = R$ می شود و فاز و دامنه ی جریان عبارتند از

$$I_0 = \frac{V_0}{R}, \qquad \phi = 0 \qquad (٤٢)$$

در شکل (۱۵) رفتار I_0 برحسب بسامد ω برای مدار RCL واداشته نشان داده شده است

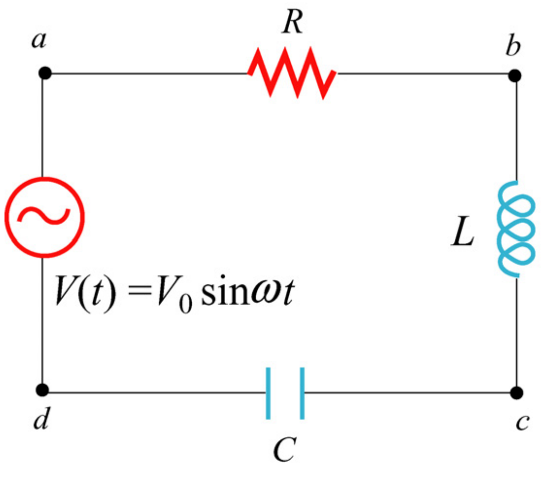


شکل ۱۵- رفتار دامنه ی جریان برحسب بسامد

مثال ۱- مدارسری RCL: فرض کنید مولد نیروی محرکه متناوب با $V(t) = (150V)\sin(100t)$ به طور سری در مدار RCL با $R = 40\Omega$ ، $L = 80\,\text{mH}$ و $C = 50\,\mu\text{F}$ (شکل ١٦) قرار دارد.

(الف): بیشینه ولتاژهای دو سر عنصرهای مدار، V_{R0} ، V_{L0} و V_{C0} را حساب کنید.

(ب): اختلاف پتانسیل بیشینه ی بین نقاط b و d (یعنی اختلاف پتانسیل بیشینه ی بین یک سر خازن و یک سر خودالقا) را در شاخه ی bcd حساب کنید.



شکل ١٦- مدار سری RCL

حل: **(الف)** واکنایی های القایی و خازنی و نیز پاگیری مدار عبارتند از

$$X_L = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(100\,\frac{\text{rad}}{\text{s}})(50\times 10^{-6}\,\text{F})} = 200\,\Omega$$

$$X_C = L\omega = (100\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}})(80\times 10^{-3}\,\text{H}) = 8\,\Omega \qquad (٤٣)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(40\Omega)^2 + (8\Omega - 200\Omega)^2} = 196\,\Omega \qquad (٤٤)$$

بنابراین ، بیشینه ی دامنه ی جریان برابر است با

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{150\,\text{V}}{196\,\Omega} = 0.765\ \text{A} \qquad (٤٥)$$

بنابراین، بیشینه ی ولتاژ دو سر عنصرهای مدار عبارتند از

$$\begin{aligned} V_{R0} &= I_0 R = (0.765\,\text{A})(40\,\Omega) = 30.6\ \text{V} \\ \text{V}_{\text{L0}} &= I_0 X_L = (0.765\,\text{A})(8.0\,\Omega) = 6.12\ \text{V} \\ \text{V}_{\text{C0}} &= I_0 X_C = (0.765\,\text{A})(200\,\Omega) = 153\ \text{V} \end{aligned} \tag{۴۶}$$

توجه کنید که بیشینه ولتاژ اعمال شده به مدار، V_0، با رابطه ی زیر به V_{R0} ، V_{L0} و V_{C0} مربوط است

$$V_0 = \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2} \tag{۴۷}$$

(ب): بیشینه ولتاژ بین b و d برابر است با

$$|V_{bd}| = |\mathbf{V}_{L0} + \mathbf{V}_{C0}| = |V_{L0} - V_{C0}| = |\,6.12\ \text{V} - 153\ \text{V}| = 147\ \text{V} \tag{۴۸}$$

مثال ۲- تشدید: ولتاژ سینوسی $V(t) = (200\,\text{V})\sin\omega t$ به مدار سری RLC با $R = 20.0\ \Omega$ ، $L = 10\,\text{mH}$ و $C = 100\,\text{nF}$ اعمال می شود. کمیت های زیر را حساب کنید

(الف): بسامد تشدید. **(ب)**: دامنه ی جریان در حالت تشدید. **(پ)**: ضریب کیفیت Q مدار و **(ت)**: دامنه ی ولتاژ دو سر خود القا در حالت تشدید.

حل: (الف): بسامد تشدید مدار عبارت است از

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1/LC} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{(10.0\times10^{-3}\,\text{H})(100\times10^{-9}\,\text{F}}} = 5033\ \text{Hz} \tag{۴۹}$$

(ب): در حالت تشدید، جریان عبارت است از

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{200\ \text{V}}{20.0\ \Omega} = 10.0\ \text{A} \tag{۵۰}$$

(پ): ضریب کیفیت مدار برابر است با

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi(5033\ \text{s}^{-1})(10.0\times10^{-3}\ \text{H})}{20.0\ \Omega} = 15.8 \tag{۵۱}$$

(ت): در حالت تشدید، اختلاف پتانسیل دو سر خودالقا عیارت است از

$$V_{L0} = I_0 X_L = I_0\omega_0 L = (10.0\ \text{A})\,2\pi(5033\,\text{s}^{-1})(10.0\times10^{-3}\text{H}) = 3.16\times10^3\ \text{V} \tag{۵۲}$$

۱-۵- توان در مدارهای با جریان متناوب

در مدارهای RCL توانی را که نیروی محرکه ی متناوب یه مدار منتقل می کند برابر است با

$$\begin{aligned} P(t) &= I(t)V(t) = \frac{V_0}{Z}\sin(\omega t - \phi)\cdot V_0\sin\omega t = \frac{V_0^2}{Z}\sin(\omega t-\phi)\sin\omega t \\ &= \frac{V_0^2}{Z}\left(\sin^2\omega t\cos\omega t - \sin\omega t\cos\omega t\sin\phi\right) \end{aligned} \tag{۵۳}$$

که در آن از اتحاد مثلثاتی $\sin(\omega t - \phi) = \sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi$ استفاده کردیم. میانگین زمانی توان عبارت است از

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_0^{\,2}}{Z}\sin^2\omega t\cos\phi\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_0^{\,2}}{Z}\sin\omega t\cos\omega t\sin\phi\,dt$$
$$= \frac{V_0^{\,2}}{Z}\cos\phi\langle\sin^2\omega t\rangle - \frac{V_0^{\,2}}{Z}\sin\phi\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\frac{V_0^{\,2}}{Z}\cos\phi \qquad (٥٤)$$

برحسب کمیت های جذر میانگین مربعی توان میانگین را می توان به صورت زیر نوشت

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{V_0^{\,2}}{Z}\cos\phi = \frac{V_{rms}^{\,2}}{Z}\cos\phi = I_{rms}V_{rms}\cos\phi \qquad (٥٥)$$

کمیت $\cos\phi$ **ضریب توان** نام دارد. از شکل (١٤) به سادگی می توان دید که

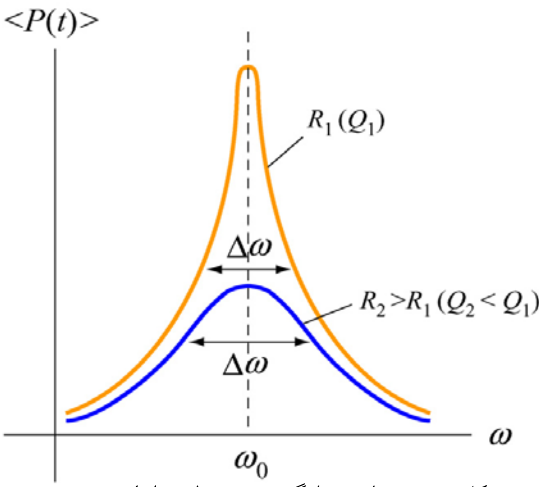
$$\cos\phi = \frac{R}{Z} \qquad (٥٦)$$

و بنابراین $\langle P(t)\rangle$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\langle P(t)\rangle = I_{rms}V_{rms}\left(\frac{R}{Z}\right) = I_{rms}\left(\frac{V_{rms}}{Z}\right)R = I_{rms}^{\,2}R \qquad (٥٧)$$

در شکل (١٧) توان میانگین به صورت تابعی از بسامد زاویه ای ω نشان داده شده است. می بینیم که وقتی $\cos\phi = 1$ یا $Z = R$ است، $\langle P(t)\rangle$ به مقدار بیشینه ی خود می رسد. این حالت تشدیدی است. در وضعیت تشدید داریم

$$\langle P\rangle_{\max} = I_{rms}V_{rms} = \frac{V_{rms}^{\,2}}{R} \qquad (٥٨)$$



شکل ١٧- توان میانگین در مدار واداشته ی RCL برحسب تابعی از بسامد راویه ای ω

٢-٥- پهنای قله ی توان

گهنای قله ی توان انتقالی به مدار واداشته ی RCL خطی است. یک روش برای مشخص کردن سرشت پهنا این است که بازه ی $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ را تعریف کنیم. $\omega_\pm$ مقادیر بسامد وادارنده است که به ازای آنها توان نصف مقدار بیشینه ی خود در حالت تشدید است. این بازی در شکل (١٨) نسان داده شده است و **پهنای کل در نصف بیشینه** نام دارد. پهنای $\Delta\omega$ با R افزایش پیدا می کند. برای یافتن $\Delta\omega$ بتهر است نخست توان میانگین را به صورت زیر بنویسیم

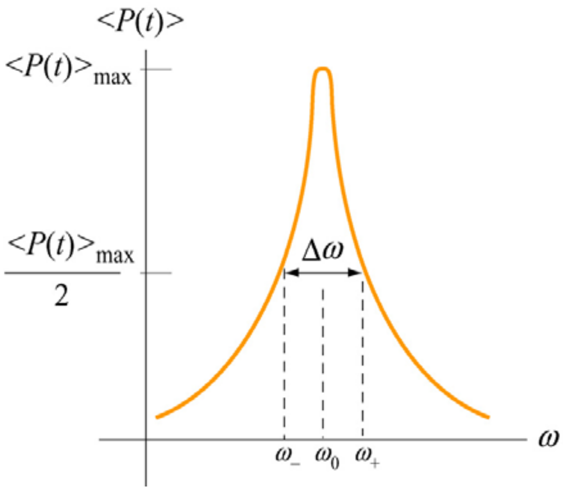
$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{V_0^{\,2}R}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \frac{1}{2}\frac{V_0^{\,2}R\omega^2}{\omega^2R^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \qquad (٥٩)$$

با توجه به این که $\langle P(t)\rangle_{\max} = V_0^{\,2}/2R$ است، شرط یافتن $\omega_\pm$ به صورت زیر در می آید

$$\frac{1}{2}\langle P(t)\rangle_{\max} = \langle P(t)\rangle_{\omega_\pm}\Big| \quad \Rightarrow \quad = \frac{V_0^{\,2}}{4R} = \frac{1}{2}\frac{V_0^{\,2}R\,\omega^2}{\omega^2R^2 + L^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}\Bigg|_{\omega_\pm}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 = \left(\frac{R\,\omega}{L}\right)^2 \qquad (٦٠)$$

اگر جذر این عبارت را حساب کنیم، دو پاسخ به دست می آید که جداگانه آنها را بررسی می کنیم.



شکل ۱۸- نمایش پهنای قله ی توان

حالت ۱- ریشه ی مثبت رابطه ی (٦٠) به دست می دهد

$$\omega_+^2 - \omega_0^2 = +\frac{R\,\omega_+}{L} \qquad (٦١)$$

از حل این معادله ی درجه دو خواهیم داشت

$$\omega_+ = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{4L}\right)^2 + \omega_0^2} \qquad (٦٢)$$

حالت ۲- از ریشه ی منفی رابطه ی (٦٠) داریم

$$\omega_-^2 - \omega_0^2 = -\frac{R\,\omega_-}{L} \qquad (٦٣)$$

و پاسخ این معادله ی درجه دو عبارت است از

$$\omega_- = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{4L}\right)^2 + \omega_0^2} \qquad (٦٤)$$

بنابراین، پهنا در نصف بیشینه عبارت است از

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L} \qquad (٦٥)$$

با دانستن پهنا، $\Delta\omega$ ، ضریب کیفیت Q (با بار الکتریکی اشتباه نشود!) را می توان به صورت زیر یافت

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R} \qquad (٦٦)$$

از مقایسه ی این رابطه با آخرین رابطه در پیوست فصل پیش، $Q = \omega' L/R$ ، می بینیم که در حد مقاومت های کم این دو رابطه باهم سازگارند؛ چون برای R ها ی کوچک $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(R/2L\right)^2} \approx \omega_0$.

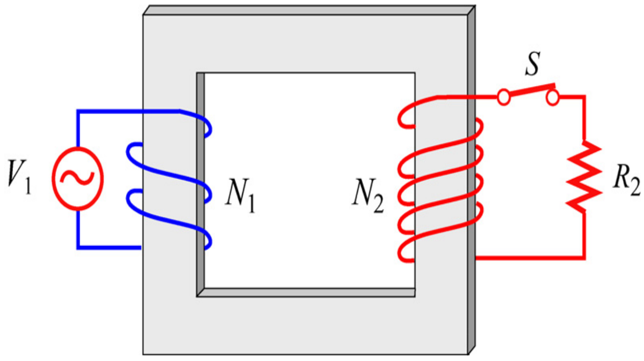
۶- مبدل یا ترانسفورموتور

مبدل وسیله ای است که برای افزایش یا کاهش ولتاژ در مدارهای با جریان متناوب به کار می رود و از دو پیچه ی اولیه و ثانوی تشکیل شده است . مدار اولیه شامل N_1 سیم و مدار ثانویه شامل N_2 دور سیم است که همانند شکل (۱۹) دور یک مغزی آهنی پیچیده می شوند. مدار اولیه به چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب با ولتاژ $V_1(t)$ و مدار ثانویه به " بار مقاومت " R_2 وصل می شوند. اساس کار مبدل این است که جریان متناوب در مدار اولیه به خاطر القاء متقابل دو مدار در مدار ثانویه نیروی محرکه ی متناوب القا می کند.

اگر از مقاومت اندک مدار اولیه چشم پوشی کنیم، بنا به قانون فاراده در مدار اولیه داریم

$$V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (٦٧)$$

Φ_B شار مغناطیسی گذرنده از یک حلقه ی مدار اولیه است. نقش مغزی آهنی تقویت کردن میدان مغناطیسی است که جریان در مدار اولیه تولید می کند. هم چنیقف مغزی آهنی سبب می شود که به تقریب همه ی شار گذرنده از مدار اولیه از هر یک از حلقه های مدار ثانویه هم می گذرد. بنابراین، ولتاژ یا نیروی محرکه القایی در مدار ثانویه برابر است با



شکل ۱۹- نمای یک مبدل

$$V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (٦٨)$$

در حالت مبدل ارمانی می توان از اتلاف توان به خاطر گرما چشم پوشی کرد. در این صورت توانی که ندار اولیه فراهم می کند به طور کامل به مدار ثانویه انتقال می یابد. بنابراین، داریم

$$I_1 V_1 = I_2 V_2 \qquad (٦٩)$$

افزون بر این، هیچ شار مغناطیسی از مغزی آهنی به بیرون نشت نمی کند و شار Φ_B گذرنده از هر حلقه در هر دو مدار یکسان است. ار ترکیب دو رابطه ی بالا معادله ی مبدل به دست می آید

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (٧٠)$$

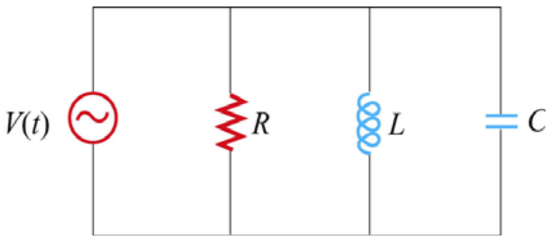
از ترکیب دو رابطه ی (٦٩) و (٧٠) رابطه ای میان جریان ها در دو مدار اولیه و ثانویه به دست می آید

$$I_1 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right) I_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) I_2 \qquad (٧١)$$

بنابراین می بینیم که نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی با نسبت دورهای مدارثانوی به مدار اولیه ، N_2/N_1 ، تعیین می شود. اگر $N_2 > N_1$ باشد، $V_2 > V_1$ می شود؛ یعنی ولتاژ خروجی در مدار ثانویه از ولتاژ ورودی در مدار اولیه بیشتر است. مبدل با $N_2 > N_1$ را مبدل **بالا برنده** می نامند. اگر $N_2 < N_1$ باشد، آنگاه $V_2 < V_1$ می شود و ولتاژ خروجی در مدار ثانوی کمتر از ولتاژ ورودی در مدار اولیه می شود. مبدل با $N_2 < N_1$ را مبدل **پایین آورنده** می نامند.

۷- مدار RCL موازی

مدار RCL موازی شکل (۲۰) را در نظر بگیرید که در آن چشمه ی ولتاژ متناوب $V(t) = V_0 \sin \omega t$ است. برعکس مدار سری RCL ، اینک ولتاژ لحظه ای دو سر هر سه عنصر، R ، C و L مدار یکسان اند. افزون بر این، هر یک از ولتاژها با جریان گذرنده از مقاومت هم فاز است. اما جریان گذرنده از هر یک از عنصر



شکل ۲۰- مدار موازی RLC

های مدار با هم فرق دارند. در بررسی این مدار از یافته های بخش ۲ تا ٥ استفاده خواهیم کرد. جریان در مقاومت برابر است با

$$I_R(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R}\sin\omega t = I_{R0}\sin\omega t$$

(۷۲)

که در آن $I_{R0} = V_0/R$ است. ولتاژ دو سر خودالقا عبارت است از

$$V_L(t) = V_0 \sin\omega t = L\frac{dI_L}{dt} \qquad (۷۳)$$

از این رابطه می توان جریان گذرنده از خود القا را به دست آورد

$$I_L(t) = \int_0^t \frac{V_0}{L}\sin\omega t'\, dt' = -\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t = \frac{V_0}{X_L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_{L0}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (۷٤)$$

که در آن $I_{L0} = V_0/X_L$ و $X_L = \omega L$ واکنایی القایی است.

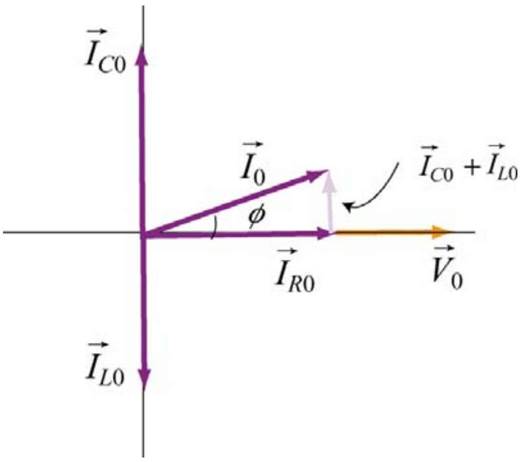
هم چنین از ولتاژ دو سر خازن $V_C(t) = V_0\sin\omega t = Q(t)/C$ خواهیم داشت

$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = \omega C V_0 \cos\omega t = \frac{V_0}{X_C}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_{C0}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (۷٥)$$

که در آن $I_{L0} = V_0/X_C$ و $X_C = 1/\omega C$ واکنایی خازن است. با توجه به قانون پیوندگاه کرشهوف می دانیم که جریان کل مدار جمع این سه جریان است

$$\begin{aligned} I(t) &= I_R(t) + I_L(t) + I_C(t) \\ &= I_{R0}\sin\omega t + I_{L0}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + I_{C0}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \qquad (۷٦)$$

در نمودار فازنمای شکل (۲۱) این جریان ها نشان داده شده اند. از این نمودار دیده می شود که



شکل ۲۱- فازنمای مدار RCL موازی

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_{R0} + \mathbf{I}_{L0} + \mathbf{I}_{C0} \qquad (۷۷)$$

بیشینه دامنه ی جریان کل را می توان به صورت زیر حساب کرد.

$$\begin{aligned} I_0 &= |\mathbf{I}_0| = |\mathbf{I}_{R0} + \mathbf{I}_{L0} + \mathbf{I}_{C0}| = \sqrt{\mathbf{I}_{R0}^2 + (\mathbf{I}_{C0} - \mathbf{I}_{L0})^2} \\ &= V_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \\ &= V_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \end{aligned}$$

(۷۸)

توجه کنید که $I_R(t)$ ، $I_L(t)$ و $I_C(t)$ هم فاز نیستند.

هم چنین توجه کنید که I_0 با جمع بیشینه دامنه های این سه جریان برابر نیست:

$$I_0 \neq I_{R0} + I_{L0} + I_{C0} \qquad (۷۹)$$

با توجه به $I_0 = V_0/Z$ ، وارون پاگیری عبارت است از

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \qquad (۸۰)$$

در شکل (۲۲) رابطه ی بین Z ، R ، X_L و X_C در مدار RCL موازی با نمودار فازنما نشان داده شده است. از این شکل می بینیم که می توان فازرا به صورت زیر حساب کرد

$$\tan\phi = \left(\frac{I_{C0} - I_{L0}}{I_{R0}}\right) = \frac{\dfrac{V_0}{X_C} - \dfrac{V_0}{X_L}}{\dfrac{V_0}{R}} = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad (۸۱)$$

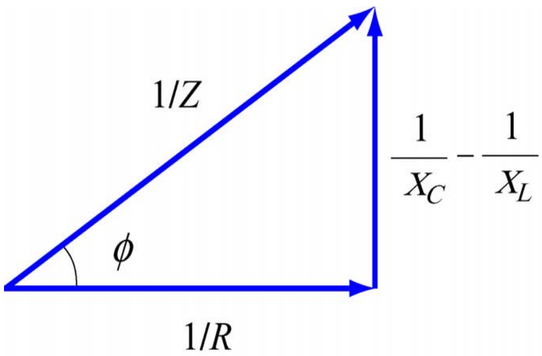
شرط تشدید در مدار RCL موازی با $\phi = 0$ داده می شود. از این شرط برمی آید که در حالت تشدید داریم

$$\frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_l} \qquad (۸۲)$$

و بسامد تشدید عبارت است از

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۸۳)$$

که با بسامد تشدید در حالت مدار RCL سری یکسان است. از رابطه ی (۸۰) دیده می شود که در حالت تشدید $1/Z$ کمینه (Z بیشینه) است. جریان در خودالقا با جریان در خازن حذف می شود و



شکل ۲۲- فازنمای مدار RCL موازی

جریان کل مدار به کمینه مقدار خود می رسد که جریان گذرنده ازمقاومت است . این جریان برابر است با

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \qquad (۸٤)$$

مانند حالت مدار RCL سری در اینجا هم توان فقط در مقاومت به گرما بتدیل و تلف می شود

$$\langle P(t)\rangle = \langle I_R(t) V(t)\rangle = \langle I_R^2(t) R\rangle = \frac{V_0^2}{R}\langle \sin^2 \omega t\rangle = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{V_0^2}{2Z}\left(\frac{Z}{R}\right) \qquad (۸٥)$$

و ضریب توان به صورت زیر در می آید

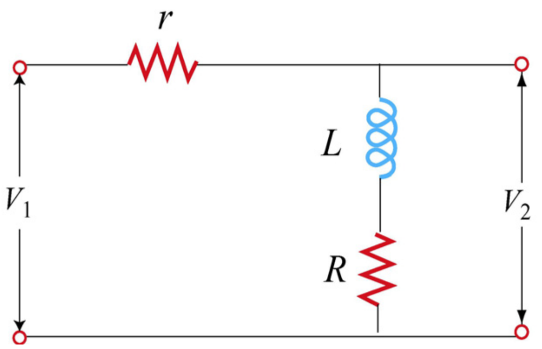
$$\frac{\langle P(t)\rangle}{V_0^2/2Z} = \frac{Z}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(R\omega C - \dfrac{R}{\omega L}\right)^2}} = \cos\phi \qquad (۸٦)$$

مثال ۳- مدار RL - پالایه ی جریان بالا: شکل (۲۳) مدار RL برای پالایه ی جریان بالا است (این مدار جریان های متناوب با بسامد کم را حذف می کند). در این مدار R مقاومت درونی خودالقاست.

[**الف)**: نسبت بیشینه ولتاژ خروجی، V_{20} به بیشینه ولتاژ ورودی V_{10} یا V_{20}/V_{10} را بیابید.

(ب): اگر $r = 15\Omega$ ، $R = 10\Omega$ و $L = 250\,\text{mH}$ باشند، به ازای چه بسامدی $V_{20}/V_{10} = 1/2$ است؟

حل: **(الف)** پاگیری مدار ورودی عبارت است از $Z_1 = \sqrt{(R+r)^2 + X_L^2}$ که در آن $X_L = \omega L$ است. پاگیری مدار خروجی هم برابر است با $Z_2 = \sqrt{R^2 + X_L^2}$. بیشینه ی جریان برابر است با



شکل ۲۳- پالایه ی RL

$$I_0 = \frac{V_{10}}{Z_1} = \frac{V_0}{\sqrt{(R+r)^2 + X_L^2}} \tag{۸۷}$$

به همین ترتیب، ولتاژ بیشینه ی خروجی هم به صورت زیر به پاگیری مدار خروجی مربوط است

$$V_{20} = I_0 Z_2 = I_0 \sqrt{R^2 + X_L^2} \tag{۸۸}$$

از این دو رابطه به دست می آید

$$\frac{V_{20}}{V_{10}} = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R+r)^2 + X_L^2}} \tag{۸۹}$$

(ب): برای این که $V_{20}/V_{10} = 1/2$ باشد داریم

$$\frac{R^2 + X_L^2}{(R+r)^2 + X_L^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_L = \sqrt{\frac{(R+r)^2 - 4R^2}{3}} \tag{۹۰}$$

چون $X_L = \omega L = 2\pi f L$ است بنابراین،

$$f = \frac{X_L}{2\pi L} = \frac{1}{2\pi(0.250\,\text{H})} \sqrt{\frac{(10.0\,\Omega + 15.0\,\Omega)^2 - 4(10.0\,\Omega)^2}{3}} = 5.51\ \text{Hz} \tag{۹۱}$$

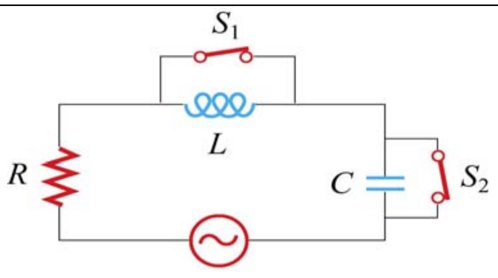
مثال ۴- مدار RCL: مدار شکل (۲٤) را در نظر بگیرید. چشمه ی ولتاژ سینوسی $V(t) = V_0 \sin \omega t$ است.

اگر در آغاز هر دو کلیدهای S_1 و S_2 بسته باشند کمیت های زیر را حساب کنید. فرض کنید R، L ، V_0 و ω داده شده اند و از اثرهای جزیی چشم پوشی کنید.

(الف): جریان $I(t)$ برحسب تابعی از زمان

(ب): توان میانگین انتقالی به مدار

(پ): پس از آنکه کلید S_1 برای مدت زمان درازی



شکل ۲٤- مدار RCL

قطع شده باشد، جریان را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

(ت): ظرفیت C خازن را پس از آنکه هر دو کلید S_1 و S_2 برای مدت طولانی قطع شوند و جریان و ولتاژ هم فاز باشند.

(ج): پاگیری مدار وقتی که هر دو کلید S_1 و S_2 باز اند.

(چ): بیشینه انرژی انباشته شده در خازن در طول نوسان

(ح): بیشینه انرژی انباشته شده در خودالقا در طول نوسان

(خ): اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ ، اگر بسامد $V(t)$ دوبرابر شود.

(د): بسامدی که در آن واکنایی خودالقایی X_L نصف واکنایی خازنی X_C می شود.

حل: **(الف)** وقتی هر دو کلید S_1 و S_2 برای مدت طولانی بسته باشند، جریان فقط از مولد و مقاومت می گذرد. بنابراین ، پاگیری کل مدار R و جریان عبارت است از

$$I_R(t) = \frac{V_0}{R}\sin \omega t \tag{۹۲}$$

(ب): توان میانگین عبارت است از

$$\langle P(t)\rangle = \langle I_R(t)V(t)\rangle = \frac{V_0^{\,2}}{R}\langle \sin^2 \omega t\rangle = \frac{V_0^{\,2}}{2R} \tag{۹۳}$$

(پ): اگر کلید S_1 باز باشد، پس از زمانی دراز جریان فقط از مقاومت، مولد و خودالقا می گذرد. برای این مدار RL پاگیری به صورت زیر در می آید

$$Z = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X_L^{\,2}}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \tag{۹٤}$$

و زاویه ی فاز عبارت است از

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \tag{۹۵}$$

بنابراین، جریان به صورت تابعی از زمان به صورت زیر در می آید

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{۹٦}$$

توجه کنید که در حد $R \to 0$ خواهیم داشت $\phi = \pi/2$ و نتیجه ای را که برای مدار ساده ی خودالقا انتظار داریم، دوباره به دست می آید.

(ت): اگر هر دو کلید باز باشند ، این مدار به مدار RCL واداشته تبدیل می شود که زاویه ی فاز آن

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \tag{۹۷}$$

اگر جریان و ولتاژ هم فاز باشند، آنگاه $\phi = 0$ می شود و در نتیجه $\tan\phi = 0$. اگر بشامد زاویه ای را در این حالت ω_0 بنامیم، خواهیم داشت

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \tag{۹۸}$$

(ج): از پاسخ قسمت (ت) دیده می شود که وقتی هر دو کلید باز اند، مدار در حالت تشدید قرار می گیرد و $X_L = X_C$. بنابراین ، پاگیری مدار عبارت است از

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R \tag{۹۹}$$

(چ): انرژی الکتریکی انباشته شده در خازن برابر است با

$$U_E = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} C\,(I X_C)^2 \tag{۱۰۰}$$

و هنگامی به بیشینه مقدار خود می رسد که جریان بیشینه باشد. با استفاده از $\omega_0 = 1/LC$ داریم

$$U_{C,\max} = \frac{1}{2} C I_0^2 X_C^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 C^2} = \frac{V_0{}^2 L}{2R^2} \tag{۱۰۱}$$

(ح): بیشینه انرژی انباشته شده در خودالقا عبارت است از

$$U_{L,\max} = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{L V_0^2}{2R^2} \tag{۱۰۲}$$

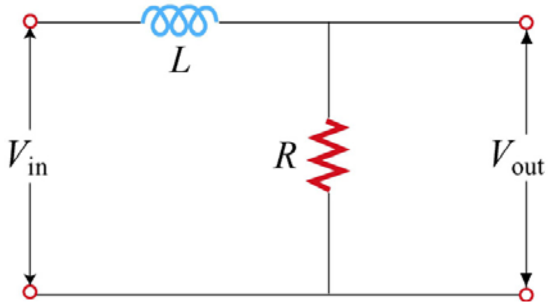
(خ): اگر بسامد چشمه ی ولتاژ دوبرابر شود، یعنی $\omega = 2\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ باشد، آنگاه فاز براب می شود با

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\left(2/\sqrt{LC}\right)L - \left(\sqrt{LC}/2C\right)}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right) \tag{۱۰۳}$$

(د): اگر واکنایی القایی نصف واکنایی خازنی باشد، می توان نوشت

$$X_L = \frac{1}{2} X_C \quad \Rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega C}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \tag{۱۰۴}$$

مثال ۵- پالایه ی RL: مدار شکل (۲۵) مدار یک پالایه ی RL است. فرض کنید $L = 400\,\text{mH}$ و ولتاژ فرودی $V_{in} = (20.0\,\text{V})\sin\omega t$ با بسامد $\omega = 200\,rad/s$ باشد.



شکل ۲۵- پالایه ی RL

(الف): برای این که ولتاژ خروجی به اندازه ی 30° از ولتاژ ورودی عقب افتادگی داشته باشد ، مقدار R چقدر باید باشد؟

(ب): نسبت دامنه های ولتاژهای خروجی و ورودی را حساب کنید. این پالایه چه نوع پالایه ای است؟ پالایه ی جریان بالا یا جریان پایین؟

(پ): اگر مکان خودالقا و مقاومت عوض شوند، آیا پالایه ، پالایه ی جریان بالا یا جریان پایین می شود؟

حل: **(الف)** رابطه ی فاز بین V_{in} و V_{out} عبارت است از

$$\tan\phi = \frac{V_{in}}{V_{out}} = \frac{IX_L}{IX_R} = \frac{\omega L}{R} \qquad (۱۰۵)$$

بنابراین داریم

$$R = \frac{\omega L}{\tan\phi} = \frac{(200\,\text{rad/s})(0.400\,\text{H})}{\tan 30^\circ} = 139\ \Omega \qquad (۱۰۶)$$

(ب): نسبت ولتاژها عبارت است از

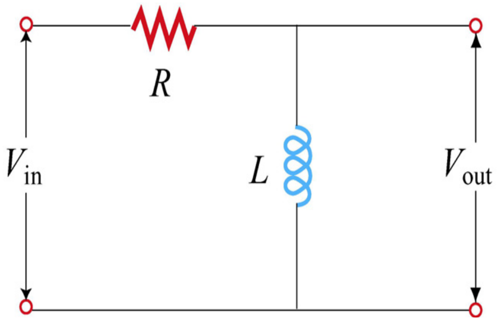
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \cos\phi = \cos 30^\circ = 0.866 \qquad (۱۰۷)$$

این مدار پالایه ی جریان پایین است ؛ چون نسبت V_{out}/V_{in} با افزایش ω کاهش پیدا می کند.

(پ): در این صورت مدار به صورت شکل (۲۶) در می آید. نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی برای این مدار عبارت است از

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{\omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$= \left[1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad (۱۰۸)$$



شکل ۲۶– مدار جریان بالا

این پالایه ، یک پالایه ی جریان بالاست چون درحد بسامد های ω زیاد V_{out}/V_{in} به یک میل می کند.

معادله های مکسول و امواج الکترومغناطیسی

۱- جریان جابه جایی

در بررسی میدان های الکتریکی و مغناطیسی، کوشیدیم ویژگی این میدان ها را با دیورژانس و کرل آنها بیان کنیم. هم چنین دیدیم که چون این میدان ها برداری اند، برای شناسایی و محاسبه ی آنها به هر دوی کرل ودیورژانس میدان نیاز داریم. با چهار معادله ی زیر توانستیم از عهده ی این کار برآییم. این چهار معادله در نظریه ی الکترومعناطیس به همان اندازه بنیادی اند که قانون های نیوتن در نظریه‌ی مکانیک کلاسیک بنیادی اند.

	نام قانون	شکل انتگرالی	شکل دیفرانسیلی
(۱)	قانون گوس	$\oint_s \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{enc}$	$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
(۲)	قانون گوس در مغناطیس؟	$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$
(۳)	قانون فاراده	$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
(٤)	قانون آمپر	$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}$	$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$

در هنگامی که جیمس کلارک مکسول کار خود را آغاز می‌کرد، این چهار معادله بیان کننده ی نظریه ی الکترومغناطیس بودند. اما در این معادله ها یک ناسازگاری جدی وجود دارد. ریشه ی آن در قاعده ای است که می گوید دیورژانس کرل همواره صفر است. به بیان دیگر ، اگر دیورژانس رابطه های (۳) و (٤) را حساب کنیم خواهیم دید که سمت چپ رابطه ی (٤) صفر نمی‌شود. بگذارید این را روشن تر بیان کنیم . از دو طرف رابطه ی (۳) دیورژانس بگیرید. داریم

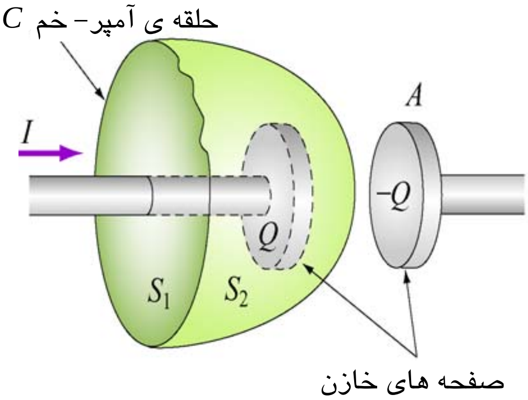
$$\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{E})}_{0} = \nabla\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial}\underbrace{(\nabla\cdot\mathbf{B})}_{0} \quad \Rightarrow \quad 0=0 \tag{۵}$$

پس، دیورژانس دو طرف رابطه‌ی (۳) هر دو صفر اند و همه چیز درست و سازگار است. همین کار را با رابطه‌ی (٤) انجام دهید. به دست می آید

$$\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{B})}_{0} = \mu_0(\nabla\cdot\mathbf{J}) \tag{٦}$$

سمت چپ رابطه‌ی (٦) صفر است اما سمت راست آن در حالت کلی **صفر نیست**. اگر خوب توجه کنید می‌بینید که قانون آمپر با رابطه ی پیوستگی $\nabla\cdot\mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$ هم ناسازگار است مگر آنکه $\partial\rho/\partial t = 0$ باشد یا فقط اگر جریان *پایا* باشد $\nabla\cdot\mathbf{J}$ صفر است. پس، اگر جریان پایا نباشد به نظر می‌رسد که قانون آمپر هم درست نیست و نمی‌توان از آن در شکل کنونی‌اش که در رابطه ی (٤) آمده است، استفاده کرد. فهمیدن منشاء این ناسازگاری چندان دشوار نیست. قانون آمپر را ما برای جریان های پایا از قانون بیو-ساوار به دست آوردیم و قانون بیو – ساوار فقط برای جریان های پایا برقرار است. پس اگر جریان پایا نباشد، بهره گیری از قانون بیو- ساوار و در نتیجه درستی قانون آمپر را هم نباید انتظار داشت.

به گونه ی دیگری هم می‌توان ناسازگاری با بیماری قانون آمپر را برای جریان های ناپایا دید. فرض کنید برابر شکل (۱) می خواهیم خازنی را باردار کنیم. در زمانی که خازن باردار می‌شود، با افزایش بار خازن، میدان الکتریکی در بین صفحه های خازن هم با زمان افزایش پیدا می‌کند. جریان گذرنده از سیم، میدان مغناطیسی تولید می‌کند. اگر بخواهیم با استفاده از قانون آمپر این میدان مغناطیسی را حساب کنیم، باید بپرسیم جریان گذرنده I_{enc} ، از حلقه‌ی آمپر چیست؟ I_{enc} جریان کل است که از حلقه‌ی آمپر می‌گذرد، یا اگر بخواهیم دقیق تر بیان کنیم، جریان گذرنده از سطحی است که مرزهای آن سطح حلقه‌ی آمپر



شکل ۱– سطح های S_1 و S_2 با مرز خم C

است. اگر خم C را در شکل (۱) حلقه‌ی آمپر برگزینیم، این خم مرزهای سطح S_1 و نیز مرزهای سطح S_2 است. جریان گذرنده ازسطح S_1 همانا جریانی است که از سیم می گذرد $I_{enc} = I$. اما اگر سطح S_2 را سطحی برگزینیم که مرزهایش حلقه‌ی آمپر C باشد، هیچ جریانی از این سطح نمی‌گذرد و ناچاریم بپذیریم که $I_{enc} = 0$ است! پس می‌بینیم که در به کار بردن آمپر و گزینش سطحی که حلقه‌ی آمپر مرزهای آن باشد، ابهام وجود دارد. در مغنطوستاتیک با یک چنین دشواری روبرو نبودیم. این ابهام از آنجا ناشی می-شود که دیگر مغنطوستاتیک نداریم؛ چون بارها در جایی (در روی صفحه های خازن) انباشته می‌شود ، جریان در سیم با زمان تغییر می‌کند. از این گفته می‌توان نتیجه گرفت که برای جریان های ناپایا گزاره ی "جریان گذرنده از حلقه‌ی آمپر" بیانی گنگ و نارساست، چون به گزینه ی سطی بستگی دارد که مرزهایش حلقه‌ی آمپر است.

دشواری در سمت راست رابطه ی (٦) است که باید صفر باشد ، اما نیست. مکسول نشان داد که با افزودن جمله‌ای به سمت راست قانون آمپر می‌توان این ناسازگاری را از میان برداشت. با استفاده از رابطه‌ی پیوستگی و قانون گوس می‌توان $\nabla \cdot \mathbf{J}$ را در سمت راست رابطه‌ی (٦) به صورت زیر نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \qquad (٧)$$

بنابراین ، می‌بینیم که اگر در قانون آمپر به $\mathbf{J}$ کمیت $\varepsilon_0 \left(\partial \mathbf{E} / \partial t \right)$ را اضافه کنیم سمت راست رابطه‌ی (٦) صفر می‌شود و این ناسازگاری از بین می‌رود و خواهیم داشت

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (٨)$$

که قانون آمپر تعمیم یافته است. حالا روشن است که

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}_{0} = \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \right) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{J} - \nabla \cdot \mathbf{J} \right) = 0 \qquad (٩)$$

مکسول کمیت $\varepsilon_0 \left(\partial \mathbf{E} / \partial t \right)$ را چکالی **جریان جابه جایی** نامید

$$\mathbf{J}_d \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (۱۰)$$

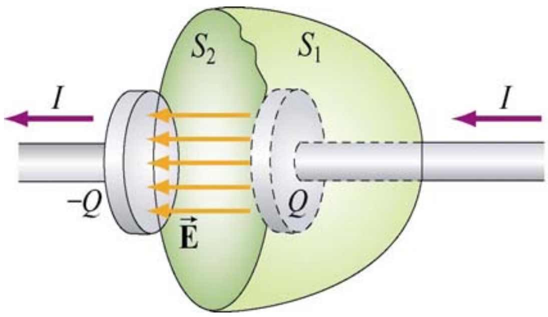
این نام گذاری البته گمراه کننده است؛ چون کمیت $\varepsilon_0\left(\partial \mathbf{E}/\partial t\right)$ ، به جز این که در قانون آمپر به $\mathbf{J}$ افزوده شده است ، اصلا به جریان بستگی ندارد.

یک چنین تعمیمی در قانون آمپر چیزی را در مغنطوستاتیک تغییر نمی‌دهد. وقتی که $\mathbf{E}$ ثابت باشد و با زمان تغییر نکند هنوز هم $\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}$ است. در فرایند های معمولی الکترومغناطیس، آشکار سازی و دیدن جمله‌ی مکسول ($\varepsilon_0\left(\partial \mathbf{E}/\partial t\right)$) آسان نیست و به این خاطر فاراده و دیگران در آزمایشگاه نتوانستند آن را دریابند (مثال ۲ را ببینید) . اما همانگونه که خواهیم دید ، این جمله نقش مهمی در انتشار امواج الکترومغناطیسی دارد. می‌توان تصور کرد که همانگونه که میدان مغناطیسی متغیر، میدان الکتریکی القا می- کند (قانون فاراده) میدان الکتریکی متغیر هم میدان مغناطیسی ایجاد می کند (قانون آمپر تعمیم یافته).

برای کامل شدن این بحث ، بگذارید یک بار دیگر هم قانون آمپر را در شکل انتگرالی آن در نظر بگیریم و منشاء جریان جابه جایی را بررسی کنیم. برای این کار شکل (۲) را در نظر بگیرید. شار الکتریکی که از سطح S_2 می‌گذرد عبارت است از

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (۱۱)$$

که در آن A مساحت صفحه ی خازن است. در رابطه‌ی بالا از قانون گوس استفاده شده است.



شکل ۲- جریان جابه جایی گذرنده از سطح S_2

جریان جابه جایی عبارت است از

$$I_d = \int \mathbf{J}_d\cdot d\mathbf{a} = \varepsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a}$$

$$= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_E \qquad (۱۲)$$

Φ_E شار میدان الکتریکی است که از سطح S_2 می‌گذرد. حال اگر از رابطه‌ی (۱۱) به جای Φ_E در رابطه‌ی (۱۲) جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q}{\varepsilon_0}\right) = \frac{dQ}{dt} \qquad (۱۳)$$

اما عبارت سمت راست، dQ/dt ، همانا با جریان رسانش I که از سطح S_1 می گذرد، برابر است. پس نتیجه می‌گیریم که جریان گذرنده از سطح S_1 درست با مقدار جریان جابه جایی I_d گذرنده از سطح S_2 برابر است. توجه کنید که مرز سطح های S_1 و S_2 یکسان و همان خم C یا حلقه‌ی آمپر است. هم چنین توجه کنید که میدان الکتریکی بین صفحه های خازن عبارت است از

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A} \qquad (۱٤)$$

که در آن A مساحت صفحه ی خازن است. درنتیجه، دربین صفحه های خازن داریم

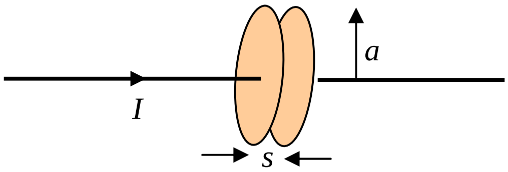
$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0 A}\frac{dQ}{dt}=\frac{1}{\varepsilon_0 A}I \qquad (۱۵)$$

شکل انتگرالی قانون آمپر تعمیم یافته، رابطه‌ی (۸) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\mu_0 I_{enc}+\mu_0\varepsilon_0\int\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{a}=\mu_0 I_{enc}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$$

$$=\mu_0 I_{enc}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\Phi_E=\mu_0(I+I_d) \qquad (۱۶)$$

مثال ۱- میدان مغناطیسی در فضای بین صفحه های خازن: خازنی با دو صفحه ی تخت دایره ای به شعاع a برابر شکل (۳) در مسیر جریان I گذرنده از یک سیم راست و دراز قرار دارد. در حالی که خازن انباشته می‌شود، میدان مغناطیسی القایی را در وسط خازن ودر فاصله ی r از مرکز به دست $(r<a)$ آورید . فاصله ی بین صفحه های خازن s است.



شکل ۳- خازن با صفحه های دایره

حل: در مدت زمانی که خازن بار دار می‌شود، جریان جابه جایی بنا به رابطه ی (۱۵)، عبارت است از

$$\mathbf{J}_d=\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=\frac{I}{A}=\frac{I}{\pi a^2}\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۷)$$

اگر حلقه‌ی آمپری به شعاع r را در نظر بگیرید، آنگاه داریم

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=B\,2\pi r=\mu_0 I_{d_{enc}}=\mu_0\frac{I}{\pi a^2}\pi r^2=\mu_0\frac{I r^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad B=\frac{\mu_0 I r^2}{2\pi r a^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}=\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (۱۸)$$

مثال ۲- اگرجریان متناوب $I=I_0\cos(\omega t)$ از مغزی یک سیم هم محور بگذرد و بر روی پوسته‌ی رسانای استوانه ای آن برمی گردد. همان گونه که در مثال ۱۷ فصل الکترودینامیک دیدیم، میدان القایی

$$\mathbf{E}=\frac{\mu_0 I_0\omega}{2\pi}\sin\omega t\ \ \ell n\left(R/r\right)\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۹)$$

تولید می‌شود. (مثال ۱۷ فصل الکترودینامیک را ببینید)

(الف): چگالی جریان جابه جایی $\mathbf{J}_d$ را حساب کنید.

(ب): با انتگرال گیری از $\mathbf{J}_d$ ، جریان جابه جایی کل را به دست آورید.

(پ): با محاسبه ی نسبت I_d/I اهمیت جریان جابه جایی و جریان رسانشی را مقایسه کنید. فرض کنید قطر استوانه‌ی بیرونی ۲ میلی متر است. برای این که I_d به اندازه‌ی یک درصد جریان رسانشی I باشد، بسامد ω باید به چه بزرگی باشد؟ (این مسئله نشان می دهد که چرا فاراده نتوانست جریان جابه جایی را کشف کند و این که چرا می‌توان به طور معمول از آن چشم پوشی کرد، مگر آنکه بسامد بسیار بالا باشد.)

حل: **(الف)**

$$\mathbf{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\mu_0 I_0 \omega^2}{2\pi} \cos \omega t \;\; \ell n\left(R/r\right) \hat{\mathbf{z}} \qquad (۲۰)$$

چون $I_0 \cos \omega t = I$ است بنابراین،

$$\mathbf{J}_d = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}{2\pi} I \;\; \ell n\left(R/r\right) \hat{\mathbf{z}} \qquad (۲۱)$$

(ب):

$$I_d = \int \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 I}{2\pi} \int_0^R \ell n\left(R/r\right)(2\pi r\, dr) = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 I \int_0^a (r \ell n\, R - r \ell n\, r) dr$$

$$= \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 I \left\{ \left(\ell n\, R\right) \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \ell n\, r + \frac{r^2}{4} \right\} \Bigg|_0^R = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 I \left\{ \frac{R^2}{2} \ell n\, R - \frac{R^2}{2} \ell n\, R + \frac{R^2}{4} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 I R^2}{4} \qquad (۲۲)$$

(پ): با استفاده از $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ داریم

$$\frac{I_d}{I} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 R^2}{4} = \frac{\omega^2 R^2}{4c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_d}{I} = \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \qquad (۲۳)$$

اگر $R = 10^{-3}$ m و $I_d / I = 1/100$ باشند، آنگاه

$$\frac{\omega R}{2c} = \frac{1}{10} \;\; \Rightarrow \;\; \omega = \frac{2c}{10R} = \frac{3\times 10^8 \text{ m/s}}{5\times 10^{-3} \text{m}} = 6\times 10^{10} \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} \cong 10^{10} \text{Hz} \qquad (۲٤)$$

یا از مرتبه ی 10^4 مگاهرتز . این بسامد در ناحیه ی ریزموج قرار دارد و بسیار فراتر از بسامدهای رادیویی است.

نکته: هنگامی که ما قانون های کرشهوف را در مدار شامل خازن به کار بردیم، فرض کردیم که جریان $I(t)$ در همه‌ی قسمت های مدار شارش می‌کند. اما اینک می‌دانیم که این *نمی‌تواند* کاملا *درست* باشد. هیچ راهی برای جریان "رسانشی" وجود ندارد که بتواند بین صفحه های خازن جریان پیدا کند. جریان جابه جایی نقش پیوستگی جریان" رسانشی" را در فضای بین صفحه های خازن بازی می‌کند و بنابراین، برای برقراری قانون کرشهوف نقش کلیدی دارد. در مثال ۱ دیدیم که با باردار شدن خازن، در فصای بین صفحه ها جریان جابه جایی به وجود می‌آید و در نتیجه ، افزون بر میدان الکتریکی ، میدان مغناطیسی هم در این ناحیه تولید می‌شود.

۲- معادله های مکسول و بار مغناطیسی

در بخش ۱ با شناساندن جریان جابه جایی، توانستیم بیماری قانون آمپر را درمان کنیم. اینک می‌توانیم معادله های مکسول را در شکل نهایی آنها بنویسیم . این معادله ها به همراه قانون نیروی لورنتس

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \qquad (۲۵)$$

همه‌ی اندرونه‌ی الکترودینامیک کلاسیک را در بر دارد. بگذارید یک بار دیگر معادله های مکسول را در جدول زیر بازنویسی کنیم

	نام قانون	شکل انتگرالی	شکل دیفرانسیلی
(۲۶)	قانون گوس	$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{enc}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
(۲۷)	قانون گوس در مغناطیس؟	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
(۲۸)	قانون فاراده	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
(۲۹)	قانون آمپرتعمیم یافته	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

حتی می‌توان رابطه‌ی پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$ را که بیان ریاضی پایستگی بار است از این رابطه ها به دست آورد. کافی است از دو طرف رابطه ی (۲۹) دیورژانس بگیریم.

وقتی چگالی بار ρ و چگالی جریان $\mathbf{J}$ صفر باشند ، معادله های مکسول در فضای تهی یک نوع تقارن زیبایی را به نمایش می‌گذارند:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (۳۰)$$

اگر در این رابطه ها $\mathbf{E}$ را با $\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}$ را با $-\mu_0\varepsilon_0\mathbf{E}$ جایگزین کنیم، جفت رابطه های سمت چپ به جفت معادله های سمت راست و برعکس تبدیل می‌شوند. اما این تقارن بین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ با وجود چگالی بار در سمت راست قانون گوس و چگالی جریان در سمت راست قانون آمپر از بین می‌رود. اندیشیدن به این نکته که چرا جمله‌های متناظر در $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ وجود ندارند وسوسه انگیز است. همان گونه که سمت راست قانون گوس $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ صفر نیست و چشمه ی بار را دربر دارد، اگر قانون گوس در مغناطیس هم به جای این که $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ باشد به صورت $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0\rho_m$ می بود و قانون فاراده را می توانستیم به جای رابطه ی (۲۸) به صورت $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0\mathbf{K}_m - \partial\mathbf{B}/\partial t$ بنویسیم و ρ_m را چگالی "بار معناطیسی" و $\mathbf{K}_m$ را چگالی "جریان بار مغناطیسی" بنامیم، آنگاه بار مغناطیسی هم همانند بار الکتریکی پایسته می شد و می‌توانستیم بنویسیم $\nabla \cdot \mathbf{K}_m = -\partial\rho_m/\partial t$. بگذارید به گونه ی دیگری این نکته را بیان کنیم: قانون گوس در الکتروستاتیک می‌گوید شار الکتریکی گذرنده از یک سطح بسته با مقدار بار محصور در آن سطح متناسب است. خط های میدان الکتریکی همانند شکل (٤) از بار مثبت (چشمه) آغاز و به بار منفی (چال) منتهی می‌شوند. نوشتن قانون گوس برای مغناطیس به صورت زیر وسوسه انگیز می‌نماید

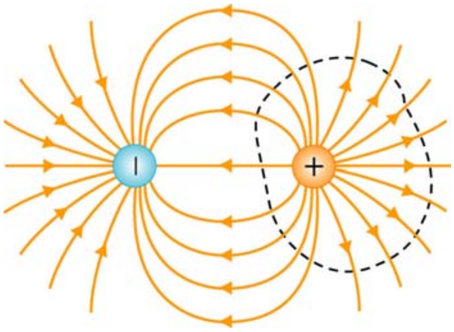
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_m}{\mu_0} \qquad (۳۱)$$

که در آن Q_m بار مغناطیسی (یک قطبی مغناطیسی) محصور در سطح گوس است. با وجود پژوهش های

جدی، تک قطبی مغناطیسی هرکز دیده نشده است.
بنابراین، $Q_m = 0$ است و قانون گوس برای مغناطیس به صورت زیر در می‌آید

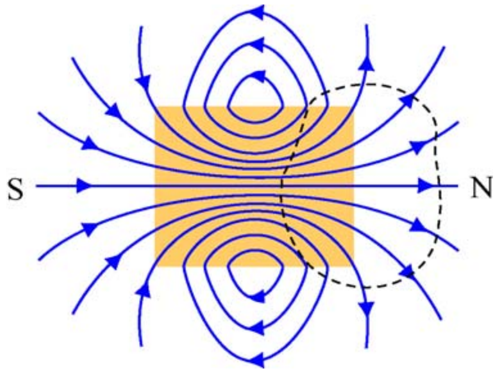
$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \qquad (۳۲)$$

این بدان معنی است که تعداد خط های میدان مغناطیسی که به سطح گوس وارد می شوند با تعداد خط هایی که از سطح کوس خارج می شوند برابر است. یعنی برای



شکل ٤- قانون گوس در الکتروستاتیک

مغناطیس چشمه و چال وجود ندارد. افزون بر این، خط های میدان باید پیوسته باشند، بدون نقاط آغاز و پایان باشند. در حقیقت، همان گونه که در شکل (٥) برای آهن ربای میله ای نشان داده شده است، خط های میدان که از قطب شمال آغاز می شوند و در فضای بیرون آهن ربا انتشار می‌یابند، دو بار به آهن ربا برمی‌گردند و بم حلقه ی بسته می سازند.
تا جایی که می دانیم بار مغناطیسی ρ_m و جریان مغناطیسی $\mathbf{K}_m$ همه جا صفر است و بنابراین میدان های $\mathbf{B}$ و $\mathbf{E}$ از وزن یکسانی برخوردار نیستند.



شکل ٥- قانون گوس در مغناطیس

برای میدان $\mathbf{E}$ چشمه های مانا (بار الکتریکی) وجود دارد اما برای میدان $\mathbf{B}$ یک چنین چشمه ای موجود نیست. به ظاهر در آفرینش نیازی به وجود یک قطبی مغناطیسی اندیشیده نشده است. در نظریه ی کوانتومی الکترودینامیک، نبود تک قطبی مغناطیسی سرافکندگی است. دیراک نشان داد که اگر تک قطبی مغناطیسی وجود می داشت آنگاه توجیه این که چرا بار الکتریکی کوانتیده است نیز میسر می‌شد.
یکی از دستاوردهای مهم معادله های مکسول پیش بینی وجود امواج الکترومغناطیسی است که با سرعت نور $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ انتشار می یابند. دلیل به وجود آمدن امواج الکترومغناطیسی این است که میدان الکتریکی متغیر، میدان مغناطیسی و میدان مغناطیسی متغیر میدان الکتریکی تولید می‌کنند و جفت شدگی این دو میدان به تولید امواج الکترومغناطیسی می‌انجامد. در سال ۱۸۸۷ هرتز این پیش بینی را تایید کرد.

**** ۳- فرمولبندی پتانسیلی الکترودینامیک**

در الکتروستاتیک $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ به ما اجازه می داد تا میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را به صورت گرادیان پتانسیل اسکالر بنویسیم: $\mathbf{E} = -\nabla V$. در الکترودینامیک دیگر این کار شدنی نیست؛ چون $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$ است (نکاه کنید به رابطه‌ی (۲۸)). اما هنوز هم در الکترودینامیک داریم $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و بنابراین می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (۳۳)$$

که اگر در قانون فاراده قرار دهیم خواهیم داشت

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A}) \quad\Rightarrow\quad \nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{۳٤}$$

در این رابطه کمیتی ، $\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t$ ، وجود دارد که برعکس $\mathbf{E}$ کرل‌اش صفر است. بنابراین ، این کمیت را می‌توان برحسب گرادیان یک پتانسیل اسکالر نوشت

$$\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla V \tag{۳٥}$$

پس ، برحسب پتانسیل های V و $\mathbf{A}$ داریم

$$\mathbf{E}=-\nabla V-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{۳٦}$$

که در حالت استاتیک ، یعنی $\partial\mathbf{A}/\partial t=0$ به شکل سابق در می‌آید.

فرمول بندی پتانسیلی ، رابطه‌های (۳۳) و (۳٦)، خود به خود معادله‌های همگن مکسول را (معادله‌های (۲۷) و (۲۸)) راضی می‌کنند. قانون های گوس (رابطه‌ی (۲٦)) و قانون آمپر تعمیم یافته (معادله‌ی (۲۹)) به چه صورت در می‌آیند؟ اگر رابطه‌ی (۳٦) را در قانون گوس، رابطه‌ی (۲۷) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\nabla^2 V+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{۳۷}$$

که جایگزین معادله‌ی پواسون می‌شود.

همچنین اگر رابطه‌های (۳۳) و (۳٦) را در قانون آمپر تعمیم یافته، معادله‌ی (۲۹) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\mu_0\mathbf{J}-\mu_0\varepsilon_0\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \tag{۳۸}$$

رابطه‌ی بالا را با استفاده از اتحاد $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$ و جابه‌جایی جمله ها به صورت زیر نوشت

$$\nabla^2 A-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot A+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\mu_0\mathbf{J} \tag{۳۹}$$

رابطه‌های (۳۸) و (۳۹) همه‌ی آگاهی‌های معادله های مکسول را دربردارند.

مثال ۳- توزیع بار و جریان: پتانسیل های زیر داده شده اند. توزیع بار و جریان مربوط به این پتانسیل را بیابید.

$$V(\mathbf{r},t)=0\ ; \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,t}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{٤۰}$$

حل:

$$\mathbf{E}=-\nabla V-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\ ; \quad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=0 \tag{٤۱}$$

پاسخ برای میدان $\mathbf{E}$ نشان می‌دهد که این میدان مربوط به بار q جایگزیده در مبداء مختصات است. همچنین بار q باید در مکان خود ساکن باشد، چون $\mathbf{B}=0$ است. در واقع پتانسیل های رابطه‌ی (٤۰) برای توصیف

یک آرایه‌ی بار و جریان این چنین اندکی عجیب است. گزینه‌ی معمول $V = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$ و $\mathbf{A} = 0$ است. در الکترودینامیک گزینش پتانسیل یگانه نیست. برای توصیف یک میدان الکتریکی . مغناطیسی می‌توان پتانسیل-های نتفاوتی نوشت. همه‌ی این پتانسیل ها به همان میدان های الکتریکی و مغناطیسی می‌انجامند. اگر بخواهیم به زبانی فنی تر سخن بگوییم، در الکترودینامیک آزادی **گزینش پیمانه‌ای** وجود دارد. ما خود را درگیر این بحث نخواهیم کرد.

مثال ۴- میدان های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$: فرض کنید $V = 0$ و $A = A_0 \sin(\kappa x - \omega t)\hat{\mathbf{j}}$ اند و κ, ω, A_0 کمیت های ثابت اند. میدان های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را به دست آورید و نشان دهید که در معادله های مکسول صدق می کنند. چه شرطی باید بین ω و κ وجود داشته باشد؟

حل:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -A_0\left(-\omega\right)\cos(\kappa x - \omega t)\hat{\mathbf{j}} = A_0\omega\cos(\kappa x - \omega t)\hat{\mathbf{j}} \qquad (٤٢)$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial x}\{A_0\sin(\kappa x - \omega t)\} = A_0\kappa\cos(\kappa x - \omega t)\hat{\mathbf{k}} \qquad (٤٣)$$

این دو برقرارند

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \quad ; \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial x}\{A_0\omega\cos(\kappa x - \omega t)\} = -A_0\omega\kappa\sin(\kappa x - \omega t)\hat{\mathbf{k}} \qquad (٤٤)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -A_0\omega\kappa\sin(\kappa x - \omega t)\hat{\mathbf{k}} \qquad (٤٥)$$

پس برقرار است

$$\Rightarrow \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial x}\{A_0\kappa\cos(\kappa x - \omega t)\} = A_0\kappa^2\sin(\kappa x - \omega t)\hat{\mathbf{j}} \qquad (٤٦)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = A_0\omega^2\sin(\kappa x - \omega t)\hat{\mathbf{j}} \qquad (٤٧)$$

از رابطه‌های (٤٦) و (٤٧) دیده می‌شود که اگر $\kappa^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2$ یا $\omega = c\kappa$ (چون $c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$) آنگاه داریم

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (٤٨)$$

و $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در هر چهار معادله‌ی مکسول صدق می‌کنند.

۴- امواج الکترومغناطیسی

۴-۱ معادله‌ی موج

در بخش ۲ معادله های مکسول را به دست آوردیم. این معادله ها همه‌ی آگاهی های ما درباره‌ی الکتریسیته ومغناطیس را دربر دارند.

اگر خود را به ناحیه ای از فضا محدود کنیم که در آن بار و چریان وجود نداشته باشد ($\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$) ،

معادله های مکسول در این ناحیه به صورت زیر در می‌آیند

$$(1)\quad \nabla\cdot\mathbf{E}=0 \qquad (3)\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{٤٩}$$

$$(2)\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad (4)\quad \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{٥٠}$$

که معادله های دیفرانسیل مرتبه‌ی اول برای میدان های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ اند. اما همان گونه که پیداست، این معادله ها **جفت** شده اند. یعنی در رابطه‌ی (٤٩) و(٥٠) هردوی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ ظاهر شده اند. به بیان دیگر تغییر $\mathbf{B}$ نسبت به زمان همانند چشمه‌ای برای تولید $\mathbf{E}$ و تغییر $\mathbf{E}$ نسبت به زمان همانند چشمه‌ی تولید $\mathbf{B}$ ...... رفتار می‌کنند. هدف این بخش فهمیدن رفتار این جفت شدگی میدان های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ است.

می‌توان این معادله‌ها را از هم بازگشود و ناجفت شده کرد. برای این کار کرل معادله های (٣) و(٤) را حساب کنید. با استفاده از اتحاد برداری $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$.خواهیم داشت:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}=\nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{٥١}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{B})-\nabla^2\mathbf{B}=\nabla\times\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

$$=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{E})=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{٥٢}$$

چون خود را به ناحیه ای محدود کرده‌ایم که $\rho=0$ و $\mathbf{J}=0$ اند بنابراین، $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$و $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ و تر نتیجه معادله های (٥١) و (٥٢) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla^2\mathbf{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{٥٣}$$

$$\nabla^2\mathbf{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{٥٤}$$

این معادله‌ها جفت نشده اند .هزینه ای که برای آن پرداختیم این است که اینگ به جای معادله ای دیفرانسیل مرتبه اول ، آنها از مرتبه ی دوم اند.

معادله های (٥٣) و (٥٤) شبیه هم اند و ما نخست به معادله‌ی (٥٣) می پردازیم. روشن است که یلفته های ما در باره‌ی معادله ی مربوط به میدان $\mathbf{B}$ هم درست اند. برای سادگی، فرض می کنیم که میدان $\mathbf{E}$ فقط به x و t بستگی دارد. در این صورت معادله‌ی (٥٣) به صورت زیر در می‌آید ($\mu_0\varepsilon_0=1/c^2$)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=0 \tag{٥٥}$$

به جاست که در اینجا اندکی عمومی تر در باره‌ی معادله های از این دست سخن بگوییم. رابطه‌ی (٥٥) حالت خاصی از شکل عمومی زیر است

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad (٥٦)$$

هر تابعی که شناسه‌ی (آرگومان) آن به صورت زیر باشد، در این معادله صدق می کند (ما از جزییات ریاضی این ادعا چشم پوشی می‌کنیم. در سطح این نوشته پرداختن به آن لازم نیست)

$$f = f\left(x \pm v\, t\right) \qquad (٥٧)$$

اثبات آن ساده است. فرض کنید $u = x \pm v\, t$ و $f = f\,(u)$. با استفاده از قاعده ی زنجیره‌ای داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(1) = \frac{\partial f}{\partial u} \qquad (٥٨)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \qquad (٥٩)$$

مشتق های زمانی به این روشنی نیستند:

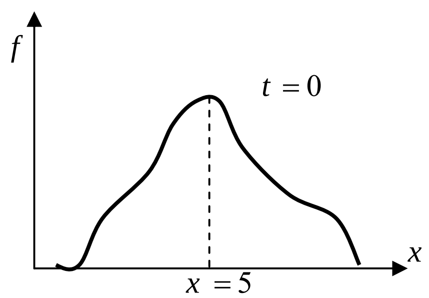
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial u} = \pm v\, \frac{\partial f}{\partial u} \qquad (٦٠)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\pm v\, \frac{\partial f}{\partial u}\right) = \left(\pm v\, \frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\pm v\, \frac{\partial f}{\partial u}\right) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \qquad (٦١)$$

اگر این رابطه‌ها را در (٥٦) جایگزین کنیم به دست می‌آید

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \qquad (٦٢)$$

که نشان می دهد هر تابعی به صورت $f = f\left(x \pm v\, t\right)$ پاسخ معادله‌ی (٥٦) است. حال باید ببینیم معنی این پاسخ چیست. نخست $f\left(x - v\, t\right)$ را در نظر بگیرید و برای سادگی $v = 1$ بپندارید (نیازی به نگرانی در باره یکاها نیست.) فرض کنید در زمان $t = 0$ شکل تابع f همانند شکل (٦) است. هم چنین تصور کنید که بیشینه‌ی این تابع در $x = 5$ است؛ یعنی برای $t = 0$ بیشینه در $x = 5$ است. می‌پرسیم شکل این تابع در زمان $t = 1$ چگونه خواهد بود؟ پاسخ روشن است: شکل تابع تغییر نخواهد کرد اما به اندازه ی یک واحد در روی محور x به سمت راست جابه‌جا خواهد شد. برای مثال، هنوز هم بیشینه هنگامی ظاهر خواهد شد که شناسه ی تابع ٥ باشد. یعنی برای بیشینه ی تابع باید داشته باشیم $x - vt = 5$. برای $t = 1$ و با $v = 1$



شکل ٦- شکل تابع f در زمان $t = 0$

می بینیم که در زمان $t = 1$ بیشینه ی تابع در $x = 6$ قرار دارد. همه‌ی نقاط دیگر خم هم به همین اندازه جابه‌جا می شوند. شکل (٧) تابع $f\left(x - v\, t\right)$ را در زمان $t = 1$ نشان می دهد. با سپری شدن زمان این شکل هم در جهت مثبت محور x به سمت راست سوق پیدا می‌کند. به بیان دیگر $f\left(x - v\, t\right)$ *موجی را نشان می‌دهد که در راستای مثبت محور x با سرعت v حرکت می کند.* به همین ترتیب می‌توان دید که پاسخ دیگر، یعنی $f\left(x + v\, t\right)$ نماینده ی موجی است که در جهت دیگر با سرعت v *حرکت می کند.*

برای مثال ، $x+vt=5$ در زمان $t=1$ یعنی $x=4$. بیشینه‌ی تابع پس از یک واحد زمانی به $x=4$ منتقل می شود. این وضعیت در شکل (۸) نشان داده شده است. پس، $f\left(x+vt\right)$ نماینده ی موجی است که با سرعت v *در جهت منفی محور* x *حرکت می کند.*

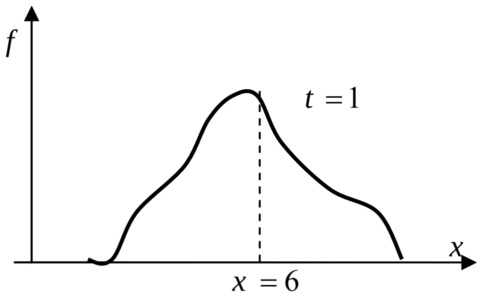
جمع بندی کنیم: به طور کلی معادله‌ی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0 \qquad (۶۳)$$

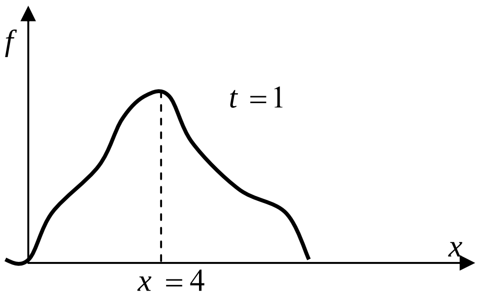
پاسخ هایی از نوع $f\left(x\pm vt\right)$ با $f\left(u\right)$ دلخواه دارد. این پاسخ ها موج هایی را نشان می‌دهند که با سرعت v حرکت می کنند. پاسخ های با $x-vt$ موج هایی اند که در جهت مثبت وپاسخ های با $x+vt$ در جهت منقی محور x حرکت می‌کنند.

شاید متوجه شده باشید که به کدام سوی می‌رویم!

معادله‌ای که برای میدان **E** به دست آوردیم ،



شکل ۷- شکل تابع $f\left(x-vt\right)$ در زمان $t=1$



شکل ۸- شکل تابع $f\left(x+vt\right)$ در زمان $t=1$

رابطه‌ی (۵۵) یک معادله‌ی موج است و موجی را نشان می دهد که در راستای محور x با سرعت نور، c ، حرکت می کند. یک چنین بررسی نشان داد که نور موج الکترومعناطیسی است. در واقع ، واقعیت این که نور با میدان های الکتریکی و مغناطیسی خویشاوندی دارد، نخست از همین نوع محاسبه ها آشکار شد. مکسول نشان داد که می‌توان چهار معادله ای که میدان های الکتریکی و مغناطیسی را توصیف می‌کنند، چنان بازنویسی کرد که به معادله‌ی موج تبدیل شود. این موج با سرعت نور انتشار می‌یابد.

توجه کنید که در زمان مکسول، کمیت های ε_0 و μ_0 را با اندازه گیری دقیق وثژگی های استاتیک میدان های الکتریکی و مغناطیسی تعیین کردند. ε_0 در فرمول خازن و μ_0 در فرمول خودالقا ظاهر شدند. فهمیدن این که این کمیت ها رفتارمیدان های دینامیکی را هم توصیف می کنند و این که $c=1\Big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ سرعت نوراست، در آن زمان شوک آورد بود. در آزن زمان هنوز در مورد مقادیر ε_0 و μ_0 و c عدم قطعیت وجود داشت. با این وجود ، همین یافته مکسول را واداشت که در سال ۱۸٦٤ بنویسد

"این سرعت به اندازه ای به سرعت نور نزدیک است که دلیل قوی به دست می‌دهد تا نتیجه بگیریم است که خود نور هم (ازجمله گرمای تابشی و تابش های دیگر) اختلال های الکترومغناطیسی در شکل امواج است که در میدان های الکترومغناطیسی بر اساس قانون های االکترومغناطیس انتشار می‌یابد".

به این خاطر است که این چهار معادله به نام معادله های مکسول نامیده شده اند

۲-۴ موج تخت

گروهی از موج های مهم و سودمند، *موج های تخت* اند. عمومی ترین شکل آنها به صورت زیر است

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) = \mathbf{E}_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \qquad (٦٤)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) = \mathbf{B}_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \qquad (٦٥)$$

کمیت های $\mathbf{E}_0$و $\mathbf{B}_0$ دامنه های میدان های الکتریکی و مغناطیسی اند. توجه کنید که این دامنه ها بردارند و ما برخی ویژگی های مهم آنها را به دست خواهیم کرد. بردار $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$ "**بردار موج**" نام دارد و اندازه‌ی آن ، $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ ، **عدد موج** است. بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ جهت انتشار موج است. عدد ω بسامد زاویه‌ای موج است. پیشتر نشان دادیم که موج های الکترومغناطیسی با توابعی به شکل $f\ (x - ct)$ داده می‌شوند. اگر آن را به سه بعد تعمیم دهیم باید بنویسیم $f\ (\mathbf{r} - c\,t\,\hat{\mathbf{k}})$. یعنی مکان $\mathbf{r}$ با سرعت $c\,\hat{\mathbf{k}}$ تغییر می کند. حالا به سادگی می‌توان نشان داد که عدد موج k و بسامد زاویه‌ای ωبه هم مربوط اند.

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r} - \frac{\omega}{k}\hat{\mathbf{k}}\,t\right) \qquad (٦٦)$$

از این رابطه و با توجه به این که وابستگی موج به $\mathbf{r}$ و t باید به صورت $f\ (\mathbf{r} - c\,t\,\hat{\mathbf{k}})$ باشد، به ما می‌آموزد که k و ω با سرعت نور به هم مربوط اند

$$\omega = ck \qquad (٦٧)$$

برای لحظه ای اجازه دهید بردار موج را ساده تر کنیم: فرض کنید که بردار موج در راستای محور x است و بنویسیم $\mathbf{k} = k\ \hat{\mathbf{x}}$. بنابراین، موج های تخت به صورت زیر در می‌آیند

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(kx - \omega t)\ ; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin(kx - \omega t) \qquad (٦٨)$$

اگر به تغییرات فضایی این موج ها در زمان $t = 0$ توجه کنیم، روشن است که داریم

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(kx)\ ; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin(kx) \qquad (٦٩)$$

این توابع در $x = 0$ ، $x = 2\pi/k$ ، $x = 4\pi/k$ و ..... صفر اند. روشن است که $2\pi/k$ مقیاس طول خاصی است و **طول موج** λ نامیده می‌شود. طول موج بما می گوید که در این مقیاس طول موج خود را تکرار می-کند.

حالا به تغییرات زمانی موج در مکان خاصی مانند $x = 0$ توجه کنید. در این صورت معادله های (٦٤) و (٦٥) به صورت زیر در می‌آیند

$$\mathbf{E} = -\mathbf{E}_0 \sin(\omega t)\ ; \qquad \mathbf{B} = -\mathbf{B}_0 \sin(\omega t) \qquad (٧٠)$$

به ازای $t = 0$ ، $t = 2\pi/\omega$ ، $t = 4\pi/\omega$ و.... این توابع صفر اند. $T \equiv 2\pi/\omega$ دوره‌ی موج است که رابطه‌ی معمول بین دوره‌ی نوسان و بسامد زاویه‌ای است. وارون دوره بسامد موج نام دارد و با ν یا f نشان داده می‌شود

$$\nu = f = \omega/T = 1/T \qquad (٧١)$$

دیده می‌شود که بین بسامد، عدد موج ، بسامد زاویه ای و سرعت نور رابطه های زیر برقرار اند

$$\omega = 2\pi\nu; \qquad k = 2\pi/\lambda; \qquad \omega = ck; \qquad \nu\lambda = c \tag{۷۲}$$

۳-۴ شرط های پایانی

دیدیم که دو تا از معادله‌های مکسول را در فضای تهی از بار و جریان می توان به صورت معادله های موج درآورد. چیزی که با معادله‌های (۵۳) و (۵٤) انجام شد. پاسخ معادله‌های موج ، رابطه های (٦٤) و (٦٥) علاوه بر این که باید در معادله های موج صدق کنند ، باید در دو معادله های دیگرمکسول هم صدق کنند. توابع زیادی را می‌توان نوشت که در معادله‌ی موج صدق کنند، اما نماینده ی میدان های الکتریکی $\mathbf{E}$ و مغناطیسی و $\mathbf{B}$ در فضای تهی از بار و جریان ($\mathbf{J}=0,\ \rho=0$) نباشند.

بنابراین، در گام نخست ، توابع موج مربوط به $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ باید در معادله‌های $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ و $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ صدق کنند. تحت چه شرایطی این کار شدنی است؟ پاسخ های موج، توابع (٦٤) و (٦٥) را در این دو معادله‌ی مکسول (برای حالتی که $\mathbf{J}=0,\ \rho=0$ اند) جایگزین کنید. خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E} &= \nabla\cdot\left[\mathbf{E}_0\sin\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)\right]\\ &= \left(k_x E_{0,x} + k_x E_{0,y} + k_z E_{0,z}\right)\cos\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)\\ &= \left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0\right)\cos\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)\end{aligned} \tag{۷۳}$$

به همین ترتیب برای $\nabla\cdot\mathbf{B}$ داریم

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = \left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0\right)\cos\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right) \tag{۷٤}$$

تنها راهی که این دو رابطه برای همه‌ی مکانها و زمان ها برقرار باشد این است که داشته باشیم

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0 = 0\ ; \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0 = 0 \tag{۷۵}$$

معنی این این شرط ها آن است که **میدان های الکتریکی و مغناطیسی تابش بر جهت انتشار آن عمود اند.**

اینک یکی از معادله‌های کرل میدان مکسول را در نظر بگیرید:

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{۷٦}$$

این معادله می گوید که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ برهم عمود اند. در سمت راست $\partial\mathbf{E}/\partial t$ داریم که جهتش همان جهت $\mathbf{E}$ است (تغییر زمانی بردار جهت بردار را عوض نمی‌کند.) در سمت چپ $\nabla\times\mathbf{B}$ داریم که بر بردار $\mathbf{B}$ عمود است (کرل هر بردار همواره بر خود بردار عمود است). پس $\mathbf{E}$ بر $\mathbf{B}$ عمود است و می توان گفت: **میدان های الکتریکی و مغناطیسی تابش برهم همود اند.** می‌توان دو طرف معادله‌ی (٧٦) را حساب کرد:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{E}_0\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t\right] = \frac{1}{c^2}(-\omega)\mathbf{E}_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\\ &= -\frac{1}{c^2}(ck)\mathbf{E}_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) = -\frac{k}{c}\mathbf{E}_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\end{aligned} \tag{۷۷}$$

و برای سمت راست $\nabla\times\mathbf{B} = \nabla\times\left[\mathbf{B}_0\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\right] = \nabla\times\left[\mathbf{B}_0\sin\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)\right]$.

این کار به نظر پیچیده و طولانی می‌آید. اما اگر از اتحاد $\nabla\times\left(\mathbf{F}f\right) = f\,(\nabla\times\mathbf{F}) + \left(\nabla f\right)\times\mathbf{F}$ استفاده

کنیم و قرار دهیم $\mathbf{F}\equiv\mathbf{B}_0$ و $f=\sin\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t\right)$ ، آنگاه $\nabla\times\mathbf{F}=0$ می‌شود (چون $\mathbf{B}_0$ ثابت است!) و خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{B} &= \nabla\times\left[\mathbf{B}_0\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\right]=\nabla\times\left[\mathbf{B}_0\sin\left(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t\right)\right]\\
&=\nabla\left[\sin\left(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t\right)\right]\times\mathbf{B}_0\\
&=\left[\left(k_x\hat{\mathbf{x}}+k_y\hat{\mathbf{y}}+k_z\hat{\mathbf{z}}\right)\cos\left(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t\right)\right]\times\mathbf{B}_0\\
&=\left(\mathbf{k}\times\mathbf{B}_0\right)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)
\end{aligned}
\tag{۷۷}
$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\ \Rightarrow\ \left(\mathbf{k}\times\mathbf{B}_0\right)\cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t\right)=-\frac{k}{c}\mathbf{E}_0\cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t\right)\\
&\Rightarrow\qquad \mathbf{E}_0=-c(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{B}_0)
\end{aligned}
\tag{۷۸}
$$

در این نتیجه دو نکته وجود دارد: (۱) اگر اندازه ی دو طرف رابطه‌ی (۷۸) را حساب کنیم خواهیم داشت

$$
\left|\mathbf{E}_0\right|=c\left|-\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{B}_0\right|=c\left|\hat{\mathbf{k}}\right|\left|\mathbf{B}_0\right|=c\left|\mathbf{B}_0\right|
\tag{۷۹}
$$

تساوی دوم درست است ؛ چون بنا به رابطه‌ی (۷۵) $\hat{\mathbf{k}}$ بر $\mathbf{B}_0$ عمود است. در تساوی سوم $\left|\hat{\mathbf{k}}\right|=1$ قرار دادیم. پس می توان نتیجه گرفت که **دامنه های میدان های الکتریکی و مغناطیسی تابش با هم متناسب اند و در یکاهای SI ضریب تناسب بین آنها سرعت نور، c ، است.**

(۲) از رابطه‌ی (۷۸) می توان نتیجه گرفت که $\mathbf{E}_0\times\mathbf{B}_0$ موازی جهت انتشار موج، $\hat{\mathbf{k}}$ ، است. در نتیجه، همان طور که به زودی خواهیم دید، $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ هم موازی $\hat{\mathbf{k}}$ خواهد شد و $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ مفهوم فیزیکی بسیار مهمی را دربر دارد و شارس انرژی تابش را نشان می‌دهد. برای این که نشان دهیم $\mathbf{E}_0\times\mathbf{B}_0$ با $\hat{\mathbf{k}}$ موازی است آن را حساب می کنیم

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_0\times\mathbf{B}_0&=-c\left(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{B}_0\right)\times\mathbf{B}_0=c\mathbf{B}_0\times\left(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{B}_0\right)\\
&=c\,\hat{\mathbf{k}}\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_0\right)-\mathbf{B}_0\Big(\underbrace{\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{B}_0}_{0}\Big)=c\,\hat{\mathbf{k}}\left|\mathbf{B}_0\right|^2=c\,\hat{\mathbf{k}}\left(\frac{1}{c}\left|\mathbf{E}_0\right|\right)^2=\frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}}\left|\mathbf{E}_0\right|^2
\end{aligned}
\tag{۸۰}
$$

در نوشتن سطر دوم از اتحاد $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ استفاده شد. پس، نتیجه می‌گیریم که:

$\mathbf{E}_0\times\mathbf{B}_0$ با جهت انتشار موج، $\hat{\mathbf{k}}$، موازی است

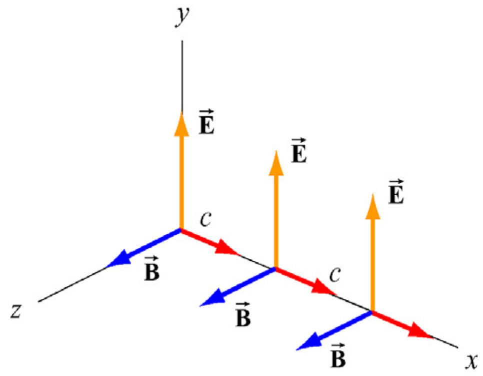
چهار نکته‌ای که در باره ی موج های الکترومغناطیسی آموختیم درزیر یک بار دیگر بیان می کنیم

- دامنه ها به جهت انتشار موج عمودند: $\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E}_0=0$ و $\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{B}_0=0$.
- دامنه ها برهم عمودند: $\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{B}_0=0$
- اندازه‌ی دامنه ها با هم متناسب اند. در یکاهای SI ضریب تناسب سرعت نور است: $\left|\mathbf{E}_0\right|=c\left|\mathbf{B}_0\right|$
- $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ با جهت انتشار موج، $\hat{\mathbf{k}}$، موازی است

این شرط ها مهم و محدود کننده اند. با این وجود، هنوز آزادی های زیادی در باره ی دامنه ها وجود دارد.

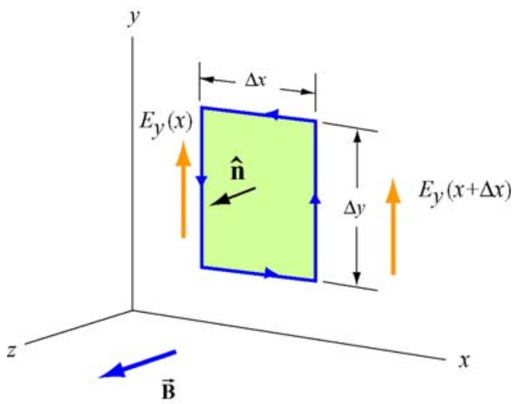
این آزادی ها با **حالت قطبشی تابش** توصیف می شوند.

در شکل (۹) یک موج الکترومغناطیسی نشان داده شده است که در راستای $+x$ انتشار می‌یابد. میدان $\mathbf{E}$ آن در راستای $+y$ و میدان $\mathbf{B}$ در راستای $+z$ است. این نمونه ای از موج تخت است؛ چون در هر لحظه هر دوی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در صفحه ای که بر جهت انتشار عمود باشد، یکنواخت اند. افزون بر آن، این موج **عرضی** است؛ چون هر دو میدان بر جهت انتشار عمود اند. جهت انتشار در راستای $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ است.



شکل ۹- موج الکترومغناطیسی تخت

ما در بالا نشان دادیم که اندازه ی دامنه‌ی میدان های الکتریکی و مغناطیسی متناسب اند. این کار را با استفاده از معادله های مکسول و اتحادهای برداری و در شکل دیفرانسیلی انجام دادیم. در سراسر این درسنامه تا جایی که شدنی بود همواره کوشیدیم شکل دیفرانسیلی و انتگرالی را به موازات هم پیش ببریم. در اینجا هم به جاست که با استفاده از شکل انتگرالی معادله های مکسول رابطه‌ی بین دامنه میدان ها را یک بار دیگر حساب کنیم. برای این کار حلقه‌ی مستطیل شکل (۱۰) را در نظر بگیرید که در صفحه‌ی xy قرار دارد. ضلع سمت چپ حلقه در x، ضلع سمت راست در $x+\Delta x$ ، ضلع پایین در y و ضلع بالایی آن در $y+\Delta y$ قرار دارند. بردار یکه‌ی عمود بر سطح حلقه را در راستای $+z$ فرض کنید: $\hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{k}}$.



شکل ۱۰- تغییرات فضایی میدان الکتریکی $\mathbf{E}$

با توجه به قانون فاراده

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{d}{dt}\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} \tag{۸۱}$$

می توان سمت چپ آن را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}&=E_y\left(x+\Delta x\right)\Delta y-E_y\left(x\right)\Delta y=\left[E_y\left(x+\Delta x\right)-E_y\left(x\right)\right]\Delta y\\&=\frac{\partial E_y}{\partial x}\left(\Delta x\ \Delta y\right)\end{aligned} \tag{۸۲}$$

در اینجا از بسط زیر استفاده کردیم

$$E_y\left(x+\Delta x\right)=E_y\left(x\right)+\frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x+\cdots \tag{۸۳}$$

آهنگ تغییر شار مغناطیسی در سمت راست رابطه‌ی (۸۱) عبارت است از

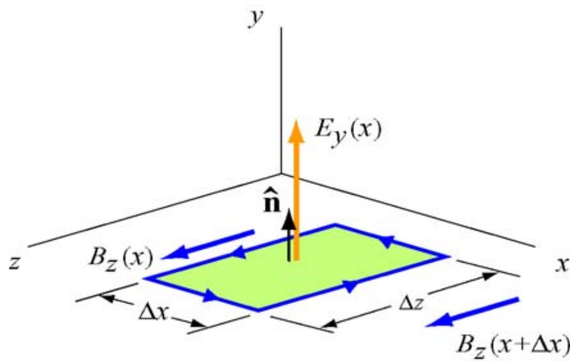
$$-\frac{d}{dt}\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}=-\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)\left(\Delta x\ \Delta y\right) \tag{۸۴}$$

از برابر ی این دو رابطه‌ی (۸۲) و (۸۲) و تقسیم آنها بر مساحت، $\Delta x\, \Delta y$ ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad (۸۵)$$

شرط دوم برای دامنه میدان های الکتریکی و مغناطیسی را می توان از قانون آمپر- مکسول (قانون آمپر تعمیم یافته) به دست آورد:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۸۶)$$



شکل ۱۱- تغییرات فضایی میدان مغناطیسی **B**

حلقه‌ی مستطیل شکل (۱۱) را در نظر بگیرید گه ئر صفحه ی xz قرار دارد و بردار یکه‌ی عمود بر آن در راستای $+y$ است: $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{j}}$. انتگرال خط میدان مغناطیسی، سمت راست رابطه‌ی (۸٦) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B_z(x)\Delta z - B_z(x+\Delta x)\Delta z = \left[B_z(x) - B_z(x+\Delta x)\right]\Delta z$$
$$= -\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)(\Delta x\, \Delta z) \qquad (۸۷)$$

و سمت راست رابطه‌ی (۸٦) عبارت است از

$$\mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)(\Delta x\, \Delta z) \qquad (۸۸)$$

ار برابری این دو رابطه نتیجه می‌کیریم :

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) \qquad (۸۹)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که میدان الکتریکی متغیر با زمان به وسیله‌ی میدان مغناطیسی متغیر با مکان تولید شده است. با استفاده از رابطه‌های (۸۵) و (۸۹) می‌توان نشان داد که هر دو میدان الکتریکی و مغناطیسی در معادله‌ی موج یک بعدی صدق می‌کنند. برای این که بتوانیم این گزاره را ثابت کنیم باید یک بار دیگر از رابطه‌ی (۸۵) نسبت به x و یک بار دیگر هم از رابطه‌ی (۸۹) نسبت به t مشتق بگیریم. خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad (۹۰)$$

به همین ترتیب اگر از رابطه‌ی (۸۹) یک بار دیگر نسبت به x و از رابطی (۸۵) نسبت به t مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \qquad (۹۱)$$

رابطه‌های (۹۰) و (۹۱) نشان می دهند که میدان های الکتریکی و مغناطیسی در معادله ی موج یک بعدی صدق می‌کنند. این نتیجه ها را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{Bmatrix}E_y(x,t)\\B_z(x,t)\end{Bmatrix}=0 \tag{۹۲}$$

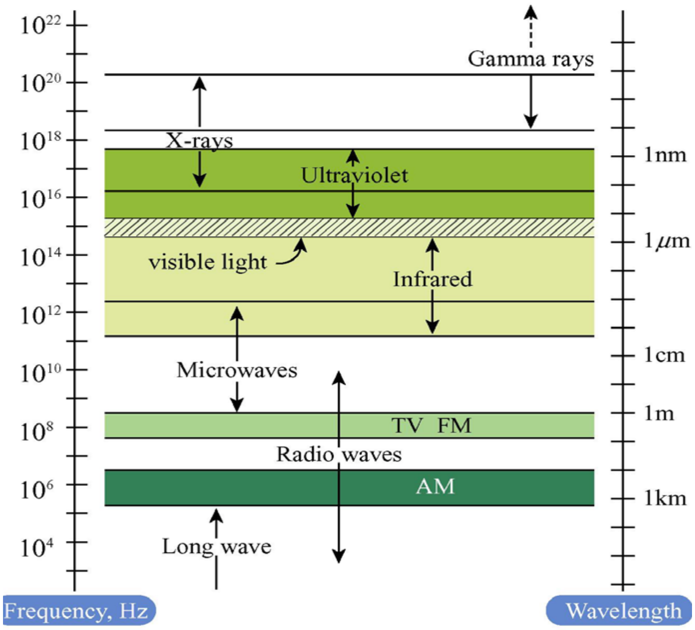
به خاطر بیاورید که معادله‌ی موج یک بعدی به صورت زیر است

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t)=0 \tag{۹۳}$$

که در آن $\psi(x,t)$ تابع موج و vسرعت موج اند. بنابراین، به روشنی دیده می‌شود که E_y و B_z در معادله‌ی موج یک بعدی صدق می‌کنند و سرعت آنها

$$v=c\equiv 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=2.997\times10^8\ \text{m/s}$$

است. بنابراین، یک بار دیگر هم نتیجه می-گیریم که نور موج الکترومغناطیسی است. در شکل (۱۲) طیف امواج الکترومغناطیسی نشان داده شده است.



شکل ۱۲- طیف امواج الکترومغناطیسی

معادله‌ی موج نمونه ای از معادله‌های دیفرانسیل خطی است. خطی بودن به این معنی است که اگر $\psi_1(x,t)$ و $\psi_2(x,t)$ پاسخ های معادله‌ی موج باشند، آنگاه $\psi_1(x,t)+\psi_2(x,t)$ هم در معادله‌ی موج صدق می‌کند. معنی این حرف این است که امواج الکترومغناطیسی از اصل برنهش پیروی می‌کنند. همانگونه که پیش تر نشان دادیم، یک پاسخ ممکن معادله‌ی موج یک بعدی عبارت است از

$$\mathbf{E}=E_y(x,t)\,\hat{\mathbf{j}}=E_0\cos(kx-\omega t)\,\hat{\mathbf{j}} \tag{۹٤}$$

$$\mathbf{B}=B_z(x,t)\,\hat{\mathbf{k}}=B_0\cos(kx-\omega t)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{۹٥}$$

این میدان ها سینوسی و دامنه‌ی آنها E_0 و B_0 اند. در فضای تهی این امواج با سرعت نور انتشار می‌یابند. در شکل (۱۳) رفتار سرشتی امواج الکترومغناطیسی سینوسی نشان داده شده است. از این شکل پیداست که میدان های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ همواره همفاز اند (یعنی به طور همزمان به بیشینه و کمینه مقدار خود می رسند.) برای این که بین دامنه‌های E_0 و B_0 رابطه‌ای به دست آوریم، از رابطه‌های (۸٤) و (۸۸) استفاده می‌کنیم. داریم

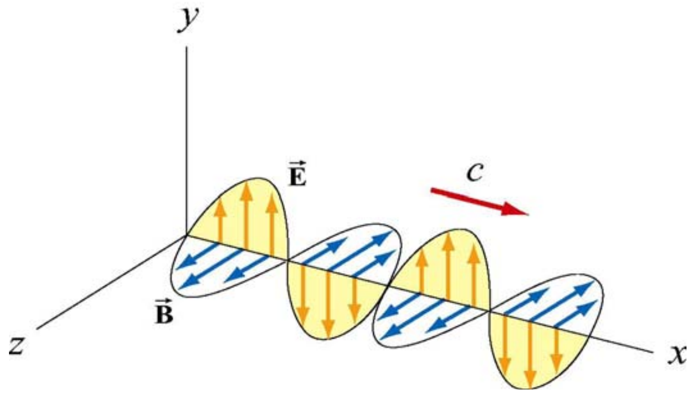
$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=-kE_0\sin(kx-\omega t)\,; \qquad \frac{\partial B_z}{\partial t}=\omega B_0\sin(kx-\omega t) \tag{۹٦}$$

که نشان می دهد $E_0 k = \omega B_0$ یا

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c \qquad (۹۷)$$

با استفاده از رابطه های (۹٤) و (۹۵) و معادله‌ی موج به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\frac{E}{B} = c \qquad (۹۸)$$



شکل۱۳- موج تخت الکترومغناطیسی که در راستای $+x$ انتشار می‌یابد

مثال ۵- موج تخت: میدان الکتریکی یک موج تخت الکترومغناطیسی به صورت زیر داده شده است

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{\mathbf{i}} \qquad (۹۹)$$

(الف) : جهت انتشار موج را تعیین کنید.

(ب): میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ این موج را به دست آورید

حل: **(الف)** شناسه‌ی تابع کسینوس را به صورت $kz - \omega t = k(z - ct)$ بنویسید که در آن $\omega = ck$ است. با توجه به این دیده می‌شود که موج در جهت $+z$ حرکت می‌کند.

(ب): جهت انتشار موج الکترومغناطیسی با جهت بردار $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ یکی است. افزون بر این، میدان های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ برهم عمود اند. چون جهت انتشار موج در راستای $+z$ و جهت میدان $\mathbf{E}$ در راستای محور x است: $\mathbf{E} = E(z,t)\,\hat{\mathbf{i}}$ ، پس جهت میدان $\mathbf{B}$ در راستای $+y$ است و داریم $\mathbf{B} = B(z,t)\,\hat{\mathbf{j}}$. چون $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ همواره همفاز اند، پس می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{B}(z,t) = B_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (۱۰۰)$$

برای این که اندازه‌ی $\mathbf{B}$ را حساب کنیم به یاد بیاورید که $E_0 = c\,B_0$ است. بنابراین داریم

$$\mathbf{B}(z,t) = \left(E_0/c\right)\cos(kz - \omega t) \qquad (۱۰۱)$$

۴-۴ موج الکترومغناطیسی ایستاده

دو موج الکترومغناطیسی تخت سینوسی را در نظر بگیرید که یکی در راستای $+x$ حرکت می‌کند و با میدان های زیر توصیف شده است

$$E_{1y}(x,t) = E_{10}\cos\left(k_1 x - \omega_1 t\right); \quad B_{1z}(x,t) = B_{10}\cos\left(k_1 x - \omega_1 t\right) \qquad (۱۰۲)$$

موج دوم با در راستای $-x$ حرکت می‌کند و عبارت است از

$$E_{2y}(x,t) = -E_{20}\cos\left(k_2 x + \omega_2 t\right); \quad B_{2z}(x,t) = B_{20}\cos\left(k_2 x + \omega_2 t\right) \qquad (۱۰۳)$$

برای سادگی فرض کنید دامنه‌ی این امواج الکترومغناطیسی با هم برابر اند : $E_{10} = E_{20} = E_0$ و

$B_{10}=B_{20}=B_0$. هم چنین فرض کنید طول موج‌ها یکسان اند ($\omega_1=\omega_2=\omega\ ;\ k_1=k_2=k$) با استفاده از اصل برنهش می‌توان میدان های الکتریکی و مغناطیسی را به صورت زیر نوشت

$$E_y(x,t)=E_{1y}(x,t)+E_{2y}(x,t)=E_0\left[\cos\left(kx-\omega t\right)-\cos\left(kx+\omega t\right)\right] \tag{۱۰۴}$$

$$B_z(x,t)=B_{1z}(x,t)+B_{2z}(x,t)=B_0\left[\cos\left(kx-\omega t\right)+\cos\left(kx+\omega t\right)\right] \tag{۱۰۵}$$

با بهره گیری از اتحاد $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}E_y(x,t)&=E_0\left[\cos kx\ \cos\omega t+\sin kx\ \sin\omega t-\cos kx\ \cos\omega t+\sin kx\ \sin\omega t\right]\\&=2E_0\sin kx\ \sin\omega t\end{aligned} \tag{۱۰۶}$$

$$\begin{aligned}B_z(x,t)&=B_0\left[\cos kx\ \cos\omega t+\sin kx\ \sin\omega t+\cos kx\ \cos\omega t-\sin kx\ \sin\omega t\right]\\&=2B_0\cos kx\ \cos\omega t\end{aligned} \tag{۱۰۷}$$

اگرچه این موج ها دیگر به شکل $kx\pm\omega t$ نیست، اما هنوز هم می‌توان نشان داد که در معادله‌ی موج صدق می‌کنند. معادله‌های (۱۰۶) و (۱۰۷) موج های **ایستاده** اند. یعنی، انتشار پیدا نمی‌کنند و فقط در فضا و زمان نوسان می‌کنند. نخست به بررسی وابستگی فضایی این میدان ها می‌پردازیم. رابطه‌ی (۱۰۶) نشان می‌دهد که اگر $\sin kx=0$ یا

$$x=\frac{n\pi}{k}=\frac{n\pi}{2\pi/\lambda}=\frac{n\lambda}{2}\quad,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{۱۰۸}$$

باشد، آنگاه میدان الکتریکی کل همواره و برای همه‌ی زمان ها صفر می‌شود. صفه های که نقاط $x=n\lambda/2$ را دربر دارند، **صفحه های گره** میدان الکتریکی نام دارد. از سوی دیگر اگر $\sin kx=\pm1$ باشد و یا

$$x=\left(n+1/2\right)\frac{\pi}{k}=\left(n+1/2\right)\frac{\pi}{2\pi/\lambda}=\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)\lambda\ ,\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{۱۰۹}$$

دامنه‌ی میدان الکتریکی در بیشینه‌ی خود، $2E_0$ ، قرار دارد. صفحه هایی که دربر دارنده‌ی این نقاط اند، **صفحه‌های شکم** یا **پادگره** میدان الکتریکی اند. توجه کنید که بین هر دو صفحه‌ی گره یک صفحه‌ی پادگره قرار دارد و بالعکس.

برای میدان مغناطیسی، صفحه‌های گره نقاطی را دربر دارند که در شرط $\cos kx=0$ صدق می‌کنند و بنابراین،

$$x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}=\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)\lambda\quad,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{۱۱۰}$$

به همین ترتیب، صفحه های پادگره میدان مغناطیسی شامل نقاطی اند که در شرط $\cos kx=\pm1$ صدق می‌کنند و در نتیجه داریم

$$x=\frac{n\pi}{k}=\frac{n\pi}{2\pi/\lambda}=\frac{n\lambda}{2}\quad,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{۱۱۱}$$

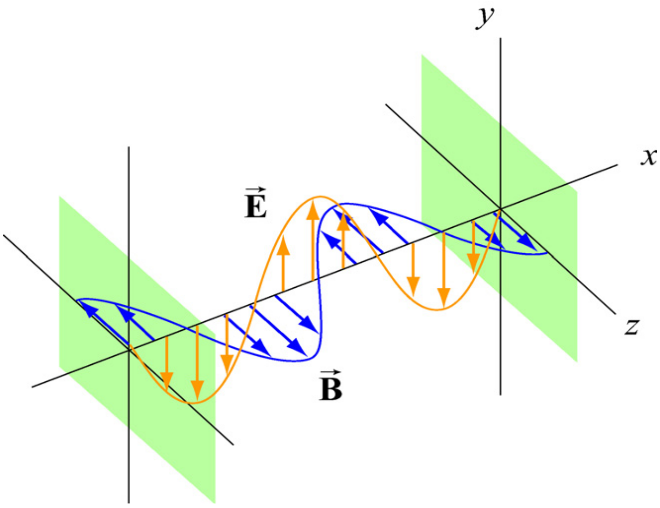
بنابراین، می‌بینیم که صفحه‌ی گره میدان الکتریکی ، صفحه‌ی پادگره میدان مغناطیسی و برعکس اند.

اینک وابستگی زمانی را بررسی می‌کنیم. از رابطه‌ی (۱۰۶) دیده می‌شود که اگر $\sin \omega t = 0$ باشد، میدان الکتریکی در همه جا صفر است. به بیان دیگر در زمان های

$$t = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{n\pi}{2\pi/T} = \frac{nT}{2} \quad , \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{۱۱۲}$$

میدان الکتریکی در همه جا صفر است. این درست وضعیت برای بیشینه‌ی میدان مغناطیسی است. بنابراین، برعکس موج رونده، که میدان های الکتریکی و مغناطیسی همواره همفاز اند، در موج های الکترومغناطیسی ایستاده، میدان ها به اندازه‌ی 90° باهم اختلاف فاز دارند.

امواج الکتومغناطیسی ایستاده را می‌توان همانند شکل (۱٤) با محصور کردن موج الترومغناطیسی بین دو صفحه‌ی رسانای آرمانی به وجود آورد.



شکل ۱٤- تشکیل موج ایستاده‌ی الکترومغناطیسی در بین دو صفحه‌ی رسانای آرمانی

۶- **بردار پوینتینگ** (Poynting's Vector)

در فصل‌های پیش دیدیم که در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی انرژی ذخیره می‌شود. در الکتروستاتیک دیدیم که کار لازم برای فراهم سازی آرایه‌ای از توزیع بارهای ساکن (برای چیره شدن به نیروی رانشی کولمبی) عبارت است از

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\, d\tau \tag{۱۱۳}$$

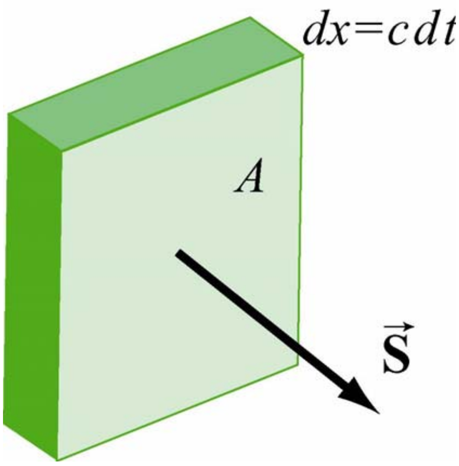
که در آن $\mathbf{E}$ میدانی است که آرایه‌ی بار تولید می‌کند. همچنین، کارلازم برای به شارش واداشتن جریان در یک مدار (برای چیره شدن به نیروی محرکه‌ی بازدارنده) عبارت است از

$$W_B = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\, d\tau \tag{۱۱٤}$$

که در آن $\mathbf{B}$ میدان مغناطیسی است که جریان تولید می‌کند. بنابراین، انرژی کل انباشته شده در میدان الکترومغناطیسی برابر است با

$$W_{EB} = \frac{1}{2}\int\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)d\tau \tag{۱۱۵}$$

امواج الکترومغناطیسی شامل هر دو میدان **E** و **B** اند و بنابراین انرژی حمل می‌کنند. موج تخت الکترومغناطیسی را در نظر بگیرید که برابر شکل (۱۵) از جزء سطح کوچک A با ضخامت dx می‌گذرد.



شکل ۱۵- موج الکترومغناطیسی گذرنده از جزء حجم

انرژی کل موجود در این جزء حجم برابر است با

$$uAdx = (u_E + u_B)Adx = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)Adx \tag{۱۱۶}$$

که در آن $u_E \equiv \varepsilon_0 E^2/2$ و $u_B \equiv B^2/2\mu_0$ چگالی انرژی الکتریکی و مغناطیسی اند. چون موج الکترومغناطیسی با سرعت نور، c ، انتشار می‌یابد، زمان لازم برای این که موج ضخامت dx را بپیماید و از جزء سطح بگذرد $dt = dx/c$ است. بنابراین ، می‌توان آهنگ تغییر انرژی در واحد سطح را به صورت زیر حساب کند. این آهنگ تغییر انرژی در واحد سطح را با نماد S نشان می‌دهیم. داریم

$$S = \frac{dW}{Adt} = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) \tag{۱۱۷}$$

در سامانه‌ی یکاهای SI، یکای S عبارت است از $\mathbf{W/m^2}$. با توجه به این که $E = cB$ و $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ می‌توان رابطه‌ی (۱۱۷) را به صورت زیر نوشت

$$S = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{cB^2}{\mu_0} = c\varepsilon_0 E^2 = \frac{EB}{\mu_0} \tag{۱۱۸}$$

در حالت کلی آهنگ شارش انرژی در واحد سطح را می‌توان با بردار پوی‌ینتینگ **S** توصیف کرد.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{۱۱۹}$$

همان طور که پیش تر نشان دادیم، چون **E** و **B** برهم عمود اند و $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ در جهت انتشار موج است، بنابراین جهت بردار **S** در جهت انتشار موج الکترومغناطیسی است. اندازه‌ی آن عبارت است از

$$|\mathbf{S}| = \frac{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} = S \tag{۱۲۰}$$

مثال ۶- شدت موج: مولفه‌ی الکتریکی موج الکترومغناطیسی با $\mathbf{E} = E_0\cos(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{j}}$ و مولفه‌ی معناطیسی آن با $\mathbf{B} = B_0\cos(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{k}}$ داده شده اند. موج در جهت $+x$ انتشار می‌یابد.

(الف): بردار پوی‌ینتینگ را به دست آورید

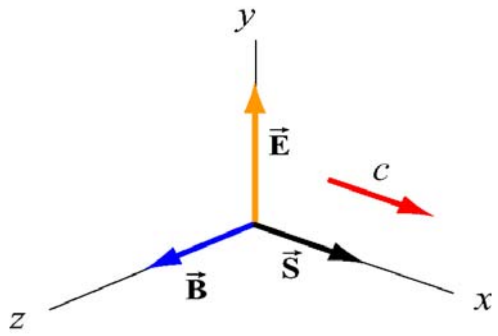
(ب): شدت موج ، I ، با میانگین زمانی S تعریف می شود. آن را حساب کنید.

(پ): رابطه‌ای بین شدت موج و چگالی انرژی به دست آورید.

حل: **(الف)** بردار پوییتینگ عبارت است از

$$\mathbf{S}=\frac{1}{\mu_0}\left[E_0\cos(kx-\omega t)\,\hat{\mathbf{j}}\right]\times\left[B_0\cos(kx-\omega t)\,\hat{\mathbf{k}}\right]=\frac{E_0B_0}{\mu_0}\cos^2(kx-\omega t)\,\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱۲۱)$$

بنابراین، جهت بردار **S** همان جهت انتشار موج است. در شکل (۱٦) این جهت نشان داده شده است.



شکل ۱٦– بردارپوییتینگ برای یک موج تخت

(ب): شدت I به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I=\langle S\rangle=\frac{E_0B_0}{\mu_0}\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle \qquad (۱۲۲)$$

با توجه به این که

$$\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle=\frac{1}{2} \qquad (۱۲۳)$$

داریم

$$I=\langle S\rangle=\frac{E_0B_0}{\mu_0}\frac{1}{2}=\frac{E_0B_0}{2\mu_0}=\frac{E_0^2}{2c\mu_0}=\frac{cB_0^2}{2\mu_0}$$

(۱۲۳)

(پ): برای این که رابطه‌اس یسن شدت و چگالی انرژی بیابیم، نخست به برابری چگالی انرژی الکتریکی و مغناطیسی توجه کنید

$$u_B=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{(E/c)^2}{2\mu_0}=\frac{E^2}{2c^2\mu_0}=\frac{\varepsilon_0E^2}{2}=u_E \qquad (۱۲٤)$$

پس، میانگین چگالی انرژی کل برابر است با

$$\langle u\rangle=\langle u_E+u_B\rangle=\varepsilon_0\langle E^2\rangle=\frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2=\frac{1}{\mu_0}\langle B^2\rangle=\frac{B_0^2}{2\mu_0} \qquad (۱۲٥)$$

بنابراین، شدت موج و میانگین چگالی انرژی با رابطه‌ی زیر به هم مربوط اند.

$$I=\langle S\rangle=c\langle u\rangle \qquad (۱۲٦)$$

مثال ۷– ثابت خورشیدی: میانگین زمانی بردارپوییتنگ در لایه‌ی بالایی زمین *ثابت خورشیدی* نام دارد و برابر است با $\langle S\rangle=1.35\times10^3\ \mathrm{W/m^2}$

(الف): اگر تابش الکترومغناطیسی خورشید را موج تخت سینوسی فرض کنیم، اندازه‌ی میدان های الکتریکی و مغناطیسی این موج را حساب کنید.

(ب): فاصله‌ی زمین و خورشید را $R=1.5\times10^{11}\ \mathrm{m}$ فرض کنید و میانگین زمانی توان تابشی کل خورشید را به دست آورید.

حل: **(الف)** میانگین زمانی بردار پوییتنگ با رابطه‌ی زیر به دامنه‌ی میدان الکتریکی مربوط است

$$\langle S\rangle=\frac{c}{2}\varepsilon_0E_0^2 \qquad (۱۲۷)$$

بنابراین، اندازه‌ی دامنه‌ی میدان الکتریکی برابر است با

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\langle S\rangle}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.35\times10^3\ \mathrm{W/m^2}}{(3.0\times10^8\ \mathrm{m/s})(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\times m^2})}} = 1.01\times10^3\ \mathrm{V/m} \qquad (۱۲۸)$$

و دامنه‌ی میدان مغناطیسی موج عبارت است از

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1.01\times10^3\ \mathrm{V/m}}{3.0\times10^8\ \mathrm{m/s}} = 3.4\times10^{-6}\ \mathrm{T} \qquad (۱۲۹)$$

توجه کنید که این میدان مغناطیسی از یک دهم میدان مغناطیسی زمین هم کمتر است.

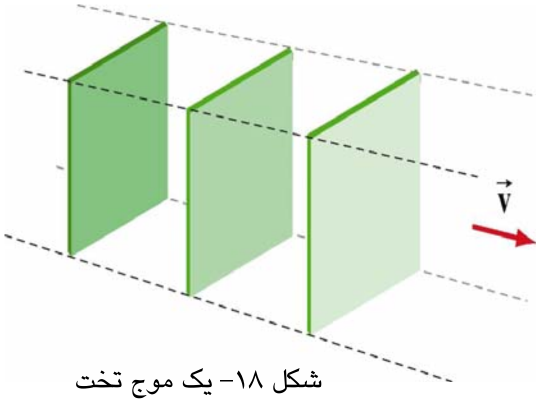
(ب): در فاصله‌ی R میانگین زمانی توان تابشی کل خورشید (مقدار انرژی میانگین که مثلا زمین در واحد زمان از خورشید دریافت می‌کند) برابر است با

$$\langle P\rangle = \langle S\rangle A = \langle S\rangle 4\pi R^2 = (1.35\times10^3\ \mathrm{W/m^2})4\pi(1.50\times10^{11}\ \mathrm{m})^2 = 3.8\times10^{26}\ \mathrm{W} \qquad (۱۳۰)$$

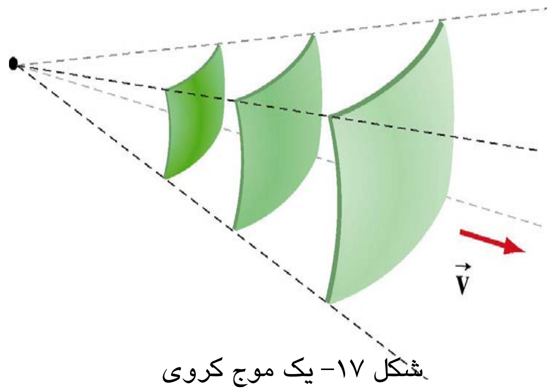
نوع موج مربوط به این مثال ، موج کروی است که از یک چشمه‌ی نقطه‌ای آغاز می شود. در شکل (۱۷) یک چنین تابشی نشان داده شده است. شدت این گونه موج در فاصله‌ی r از چشمه عبارت است از

$$I = \langle S\rangle = \frac{\langle P\rangle}{4\pi r^2} \qquad (۱۳۱)$$

و به صورت $1/r^2$ کاهش می یابد. در حالی که شدت موج تخت (شکل (۱۸)) ثابت می ماند وپخش شدگی انرژی ندارد.



شکل ۱۸– یک موج تخت



شکل ۱۷– یک موج کروی

مثال ۸– شدت یک موج ایستاده: مولفه‌های میدان های الکتریکی و مغناطیسی یک موج ایستاده عبارتند از

$$E_y(x\ t) = 2E_0 \cos kx\ \cos\omega t \quad ; \qquad B_z(x\ t) = 2B_0 \sin kx\ \sin\omega t \qquad (۱۳۲)$$

شدت این موج را حساب کنید.

حل: پاسخ این پرسش صفر است؛ چون موج ایستاده انتشار پیدا نمی‌کند. به بیان دیگر برای این که موج ایستاده تشکیل شود، دو موج باید در دو جهت خلاف هم حرکت کنند. انرژی هایی که این دو موج در دو جهت مخالف حمل می کنند، دقیقا یکدیگر را حنثی می‌کند. بگذارید آن را با محاسبه‌ی میانگین زمانی بردار پویینتینگ نشان دهیم. بردار پوییتتینگ موج بالا عبارت است از

$$\mathbf{S}=\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}=\frac{1}{\mu_0}\left(2E_0\cos kx\,\cos\omega t\;\hat{\mathbf{j}}\right)\times\left(2B_0\sin kx\,\sin\omega t\;\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$=\frac{4E_0B_0}{\mu_0}(\sin kx\,\cos kx\,\sin\omega t\cos\omega t)\,\hat{\mathbf{i}}=\frac{E_0B_0}{\mu_0}(\sin 2kx\,\sin 2\omega t)\,\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱۳۳)$$

بنابراین، میانگین زمانی S یا شدت عبارت است از

$$\langle S\rangle=\frac{E_0B_0}{\mu_0}\sin 2kx\,\langle\sin 2\omega t\rangle=0 \qquad (۱۳٤)$$

همان گونه که انتظار داشتیم، شدت موج ایستاده صفر است.

۷- انتقال انرژی

بردار پوییتنیگ $\mathbf{S}$ آهنگ شارش انرژی در واحد سطح است. آهنگ تغییر انرژی در یک سامانه را می‌توان به صورت زیر نوشت

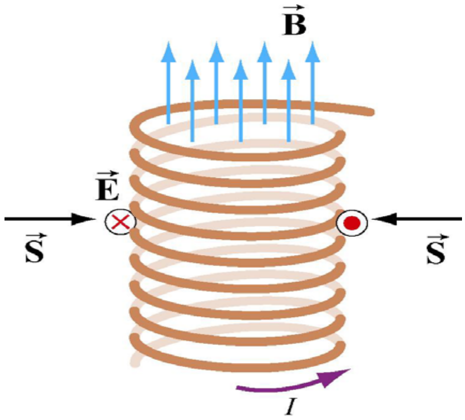
$$\frac{dU}{dt}=-\oint_A \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۱۳۵)$$

که در آن $d\mathbf{a}=da\,\hat{\mathbf{n}}$ است و $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمود بر سطح A و به سوی *بیرون* از سطح است. رابطه‌ی بالا بسیار شبیه رابطه‌ی بین چگالی جریان $\mathbf{J}$ و جریان I در رابطه‌ی زیر است

$$I=\frac{dQ}{dt}=\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۱۳٦)$$

این همانندی به ما اجازه می‌دهد تا $\mathbf{S}$ را **چگالی شار انرژی** (مانند چگالی جریان $\mathbf{J}$) تفسیر کنیم. اگر انرژی از سامانه به بیرون شارش کند، آنگاه $\mathbf{S}=S\,\hat{\mathbf{n}}$ و $dU/dt<0$ می‌شوند و نشان می‌دهد که انرژی سامانه درحال کاهش یافتن است. اگر انرژی به درون سامانه شارش کند $\mathbf{S}=S\,(-\hat{\mathbf{n}})$ و $dU/dt>0$ می‌شوند و نشان می‌دهد که انرژی سامانه درحال افزایش است.

برای این که مفهوم فیزیکی رابطه‌ی (۱۳۵) را نشان دهیم، طول ℓ از یک پیچه‌ی بسیار درازی را برابر شکل (۱۹) در نظر بگیرید. از پیچه جریان I می‌گذرد، شعاع آن r و تعداد دورها در واحد طول آن n است. فرض کنید در زمانی، جریان در پیچه با آهنگ $dI/dt>0$ تغییر می‌کند. با استفاده از قانون آمپر، میدان مغناطیسی در پیچه برابر است با



شکل ۱۹- بردار پوییتنیگ برای پیچه با $dI/dt>0$

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=B\ell=\mu_0(NI)$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{B}=\mu_0 nI\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۳۷)$$

بنابراین ، آهنگ افزایش میدان مغناطیسی عبارت است از

$$\frac{dB}{dt}=\mu_0 n\frac{dI}{dt} \tag{۱۳۸}$$

بنا به قانون فاراده $\mathcal{E}=\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-d\Phi_B/dt$ میدان مغناطیسی متغیر میدان الکتریکی تولید می‌کند که برابر است با

$$E\,(2\pi r)=-\mu_0 n\left(\frac{dI}{dt}\right)\pi r^2 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{E}=-\frac{\mu_0 nr}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{۱۳۹}$$

جهت $\mathbf{E}$ همانند جریان القایی ساعتگرد است و در شکل(۱۹) نشان داده شده است. بردار پوینتینگ آن را می‌توان به صورت زیر حساب کرد

$$\mathbf{S}=\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}=\frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{\mu_0 nr}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\times\left(\mu_0 nI\,\hat{\mathbf{k}}\right)=-\frac{\mu_0 n^2 r}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\hat{\mathbf{r}} \tag{۱۴۰}$$

که شعاعی و به سوی محور پیچه است (در راستای $-\hat{\mathbf{r}}$). جهت میدان ها و بردار پوینتینگ در شکل (۱۹) دیده می‌شوند.

چون انرژی مغناطیسی انباشته شده در خودالقا عبارت است از

$$U_B=\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)\left(\pi r^2\ell\right)=\frac{1}{2}\mu_0\pi n^2 I^2 r^2\ell \tag{۱۴۱}$$

آهنگ تغییر U_B عبارت است از

$$P=\frac{dU_B}{dt}=\mu_0\pi n^2 I r^2\ell\left(\frac{dI}{dt}\right)=I\,|\mathcal{E}| \tag{۱۴۲}$$

که در آن

$$\mathcal{E}=-N\,\frac{d\Phi_B}{dt}=-\left(n\ell\right)\left(\frac{dB}{dt}\right)\pi r^2=-\mu_0 n^2\ell\pi r^2\left(\frac{dI}{dt}\right) \tag{۱۴۳}$$

نیروی محرکه‌ی القایی است. به سادگی می‌توان نشان داد که این مقدار برابر است با

$$-\oint\mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}=\frac{\mu_0 n^2 rI}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\cdot\left(2\pi r\ell\right)=\mu_0\pi n^2 I r^2\ell\left(\frac{dI}{dt}\right) \tag{۱۴۴}$$

و بنابراین،

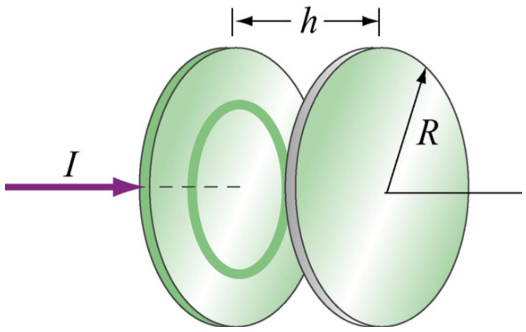
$$\frac{dU_B}{dt}=-\oint\mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}\ >0 \tag{۱۴۵}$$

همان گونه که انتظار داشتیم، با $dI/dt>0$ انرژی در سامانه افزایش یافته است. اگر $dI/dt<0$ می‌بود، انرژی سامانه کاهش پیدا می‌کرد و $dU_B/dt<0$ می‌شد.

مثال ۸- بردار پوینتینگ خازن در حال باردار شدن: خازنی را در نظر بگیرید که برابر شکل (۲۰) صفحه-های آن دایره های به شعاع R و به فاصله‌ی h از یکدیگر اند. خازن به سیم راست درازی وصل است که از آن جریان I می‌گذرد.

(الف): نشان دهید که خازن در حال باردار شدن است.

(ب): از **S** روی مرزهای استوانه‌ای این آرایه انتگرال بگیرید و نشان دهید که آهنگ شارش انرژی به درون خازن با آهنگ انباشته شدن انرژی الکترومغناطیسی در میدان الکتریکی برابر است.



شکل ۲۰- خازن با صفحه های تخت

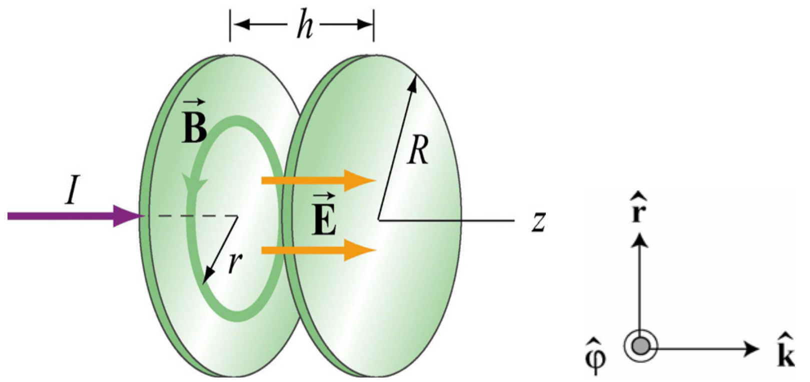
حل: **(الف)**: محور صفحه های دایره را محور z فرض کنید. جریاندر جهت $+z$ است. فرض کنید در یک لحظه از زمان مقدار بار موجود در صفحه‌ی مثبت خازن $+Q$ است. میدان الکتریکی بین صفحه های خازن در این لحظه برابر است با

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}=\frac{Q}{\pi R^2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱٤٦)$$

بنا به قانون آمپر- مکسول، با تغییر شار الکتریکی، میدان مغناطیسی القا می‌شود و داریم

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\mu_0 I_{enc}+\mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۱٤٧)$$

از تقارن استوانه ای سامانه دیده می‌شود که میدان مغناطیسی دایره ای و مرکز آن روی محور z خواهد بود. یعنی $\mathbf{B}=B\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. جهت میدان ها در شکل (۲۱) نشان داده شده اند. مسیر دایره ای به شعاع r ($r<R$)



شکل ۲۱- نمایش جهت میدان های الکتریکی و مغناطیسی

را در فضای بین صفحه ها درنظر بگیرید. با استفاده از رابطه‌ی (۱٤٧) خواهیم داشت

$$B(2\pi r)=0+\mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\pi R^2\varepsilon_0}\pi r^2\right)=\frac{\mu_0 r^2}{R^2}\frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B}=\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2}\frac{dQ}{dt}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (۱٤٨)$$

حال می توان بردار پویینتینگ **S** را حساب کرد

$$\mathbf{S}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{Q}{\pi R^2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2}\frac{dQ}{dt}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)=-\left(\frac{Qr}{2\pi^2R^4\varepsilon_0}\right)\left(\frac{dQ}{dt}\right)\hat{\mathbf{r}} \qquad (۱٤٩)$$

توجه کنید که $dQ/dt > 0$ است. پس به بار خازن افزوده می شود. جهت $\mathbf{S}$ در راستای $-\hat{\mathbf{r}}$ یا به سوی مرکز خازن است.

(ب): انرژی در واحد حجم که میدان الکتریکی حمل می‌کند $u_E = \varepsilon_0 E^2/2$ است. بنابراین، انرژی کل ذخیره شده در میدان الکتریکی در حجم V برابر است با

$$U_E = u_E V = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \left(\pi R^2 h\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0}\right)^2 \pi R^2 h = \frac{Q^2 h}{2\pi R^2 \varepsilon_0} \tag{۱۵۰}$$

مشتق گیری از این رابطه نسبت به زمان، آهنگ انباشته شدن انرژی را به دست می‌دهد.

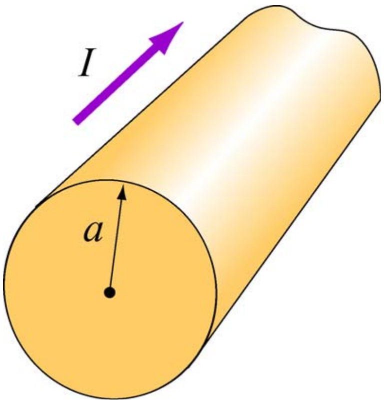
$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2 h}{2\pi R^2 \varepsilon_0}\right) = \frac{Qh}{\pi R^2 \varepsilon_0}\left(\frac{dQ}{dt}\right) \tag{۱۵۱}$$

از سوی دیگر، آهنگ شارش انرژی به درون خازن در استوانه‌ای به شعاع $r = R$ را می‌توان با انتگرال گیری از $\mathbf{S}$ روی سطح به دست آورد

$$\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = SA_R = \left(\frac{Qr}{2\pi^2 \varepsilon_0 R^4}\frac{dQ}{dt}\right)\left(2\pi R h\right) = \frac{Qh}{\varepsilon_0 \pi R^2}\left(\frac{dQ}{dt}\right) \tag{۱۵۲}$$

که با آهنگ انباشته شدن انرژی در میدان الکتریکی متغیر برابر است.

مثال ۹- بردار پوینتینگ رسانا: جریان I در سطح قاعده‌ی رسانای استوانه‌ای شکل (۲۲) به طور یکنواخت توزیع شده است. شعاع استوانه a و رسانایی آن σ است.



شکل ۲۲- بردار پوینتینگ رسانا

(الف): میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در درون رسانا حساب کنید.

(ب): میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را درست در بیرون رسانا بیابید.

(پ): بردار پ.یینتینگ $\mathbf{S}$ را در روی سطح رسانا بیابید. جهت $\mathbf{S}$ را مشخص کنید.

(ت): از $\mathbf{S}$ روی سطح رسانا انتگرال بگیرید و نشان دهید که آهنگی که انرژی الکترومغناطیسی وارد سطح رسانا می‌شود با آهنگ اتلاف انرژی برابر است.

حل: **(الف)** جهت جریان را در راستای $+z$ فرض کنید. میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I}{\sigma \pi a^2}\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۵۳}$$

می‌توانید طول رسانا را ℓ و مقاومت آن را R بپندارید.

(ب): میدان مغناطیسی را می‌توان از قانون آمپر به دست آورد. حلقه‌ی آمپر را دایره‌ای به شعاع r برگزینید:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc} \quad \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{۱۵٤}$$

(**پ**): بردار پویینتینگ در سطح رسانا ($r=a$) عبارت است از

$$\mathbf{S}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{I}{\sigma\pi a^2}\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)=-\left(\frac{I^2}{2\pi^2\sigma a^3}\right)\hat{\mathbf{r}} \tag{١٥٥}$$

توجه کنید که جهت $\mathbf{S}$ به سوی محور رساناست.

(**ت**): آهنگ شارش انرژی الکترومغناطیسی به درون رسانا برابر است با

$$P=\frac{dU}{dt}=\oint_S \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}=\left(\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^3}\right)2\pi a\ell=\frac{I^2\ell}{\sigma\pi a^2} \tag{١٥٦}$$

چون رسانایی σ با رابطه‌ی زیر به مقاومت R مربوط است

$$\sigma=1/\rho=\frac{\ell}{RA}=\frac{\ell}{R\pi a^2} \tag{١٥٧}$$

بنابراین، رابطه‌ی (١٥٦) به صورت زیر درمی‌آید

$$P=I^2R \tag{١٥٨}$$

که آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت است.

٨- تکانه و فشار تابشی

موج الکترومغناطیسی نه تنها انرژی حمل می‌کند، بلکه تکانه هم دارد. وقتی موج الکترومغناطیسی بر سطحی می‌تابد، تکانه توسط سطح جذب و یا از آن بازتابیده می‌شود و در نتیجه، به سطح **فشار تابشی** وارد می‌شود. مکسول نشان داد که اگر موج تخت الکترومغناطیسی به طور کامل در سطح جذب شود، تکانه‌ی انتقال یافته به سطح با انرژی جذب شده توسط سطح به صورت زیر مربوط اند

$$\Delta p=\frac{\Delta U}{c} \qquad \text{(جذب کامل)} \tag{١٥٩}$$

از سوی دیگر اگر موج الکترومغناطیسی به طور کامل از یک سطح (مانند آیینه) باز تابیده شود، داریم

$$\Delta p=\frac{2\Delta U}{c} \qquad \text{(بازتاب کامل)} \tag{١٦٠}$$

در حالت جذب کامل، میانگین فشار تابشی (نیرو بر واحد سطح) عبارت است از

$$P=\frac{\langle F\rangle}{A}=\frac{1}{A}\left\langle\frac{dp}{dt}\right\rangle=\frac{1}{Ac}\left\langle\frac{dU}{dt}\right\rangle \tag{١٦١}$$

اما آهنگ انتقال انرژی به سطح عبارت است از

$$\left\langle\frac{dU}{dt}\right\rangle=\langle S\rangle A=IA \tag{١٦٢}$$

بنابراین، خواهیم داشت

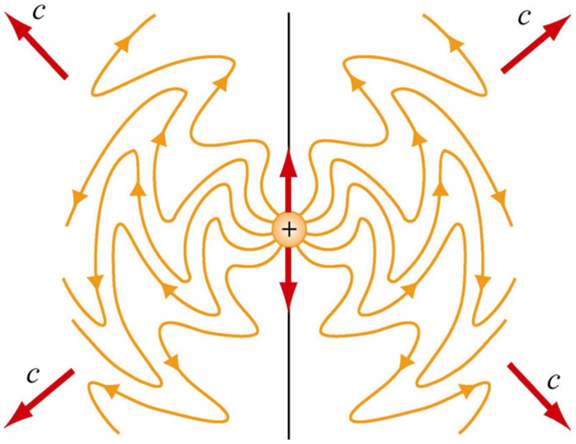
$$P=\frac{I}{c} \qquad \text{(جذب کامل)} \tag{١٦٣}$$

همچنین، اگر موج بازتاب کامل داشته باشد، فشار تابشی آن دو برابر فشار در جالت جذب کامل می‌شود

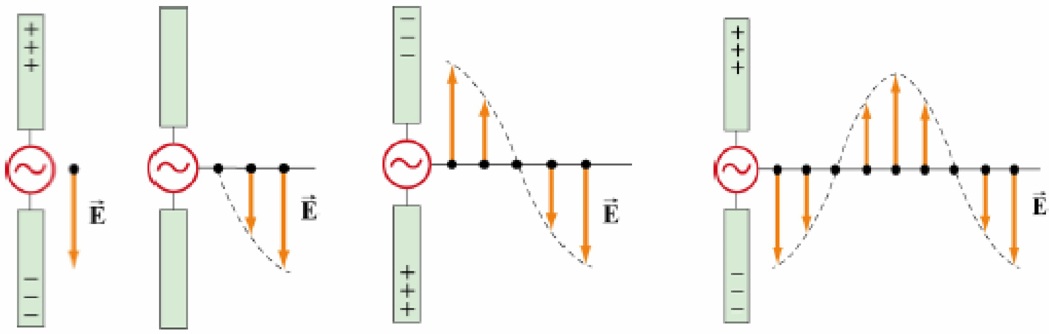
$$P=2I/c \qquad \text{(بازتاب کامل)} \tag{١٦٤}$$

۹- تولید موج الکترومغناطیسی

اگر بار الکتریکی شتاب داشته باشدموج الکترومغناطیسی تولید می‌شود. به بیان دیگر، وقتی بار الکتریکی شتاب پیدا می‌کند، باید انرژی تابش کند. بار ساکن یا جریان پایا تابش الکترومغناطیسی تولید نمی‌کنند. در شکل (۲۳) خط های میدان الکتریکی باری نشان داده شده است که نوسان می‌کند. یک روش عمومی برای تولید موج الکترومغناطیسی، اعمال کردن ولتاژ سینوسی به یک آنتن است. این کار سبب می‌شود بار ها در نزدیکی نوک آنتن جمع شوند. با این کار یک دوقطبی الکتریکی نوسانی به وجود می‌آید. در شکل (٢٤) تولید تابش دوقطبی الکتریکی نشان داده شده است. آنتن از دو میله تشکیل شده است. در زمان $t = 0$ بارهای الکتریکی در دوانتهای میله جمع می‌شوندو میله‌ی بالایی در شکل (٢٤) بیشینه مقدار بار مثبت دارد و میله‌ی پایینی هم به همان مقدار بار منفی دارد. در این لحظه، میدان الکتریکی در همسایگی آنتن رو به پایین است. با گذشت زمان بارها کاهش پیدا می‌کنند. پس از گذشت زمان یک چهارم دوره، $t = T/4$ ، به طور لحظه‌ای بارها ناپدید و میدان هم صفر می‌شود. سپس، قطبایی میله ها عوض می‌شود و بارهای منفی در میله‌ی بالا و



شکل ۲۳- خط‌های میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در حال نوسان



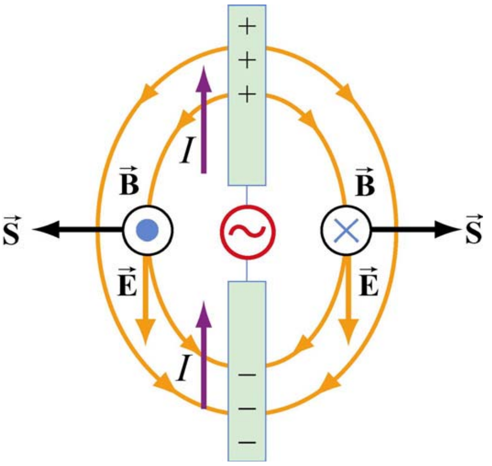
شکل ٢٤- میدان الکتریکی یک آنتن دوقطبی الکتریکی

بارهای مثبت در میله‌ی پایین شروع به جمع شدن می‌شوند. این کار تا زمان $t = T/2$ ادامه می یابد. هنگامی که انباشت بار به بیشینه مقدار خود رسید، میدان الکتریکی در همسایگی میله رو به بالا می‌شود. فرایند دوباره خود را تکرار می‌کند و به این وسیله بارها از یک میله به میله‌ی دیگر نوسان می‌کنند. میدان الکتریکی تولید و با سرعت نور از آنتن دور می‌شود. حرکت بارها جریات الکتریکی هم تولید می‌کند. این جریان میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد که خطهای آن دور میله می‌گردد. با وجود این، رفتار میدان‌ها در نزدیکی‌های آنتن بسیار متفاوت از رفتار آنها در فاصله‌های دور از آنتن است.

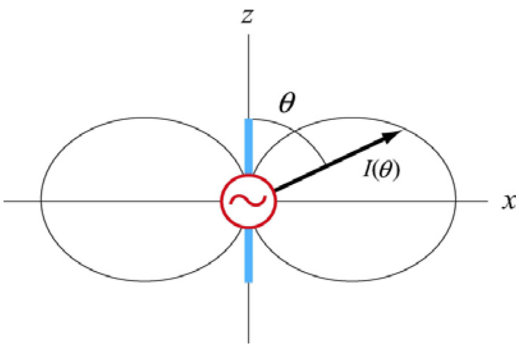
آنتنی نیم‌طول‌موج را در نظر بگیرید، یعنی آنتنی که طول هر یک از میله‌های آنتن یک چهارم طول موج تابش

گسیلی است.

چون بارها به وسیله‌ی ولتاژ متناوب به نوسان بین میله‌ها واداشته شده‌اند، آنتن را به تقریب می‌توان یک دوقطبی الکتریکی نوسان کننده پنداشت. شکل (۲۵) خط‌های میدان های الکتریکی و مغناطیسی رادر لحظه-ای که جریان به سوی بالاست، نشان می‌دهد. توجه کنید که بردار پوییتینگ در مکان‌های نشان داده شده به سوی بیرون است. در حالت عمومی طرح تابش تولیدی بسیار پیچیده است؛ با این وجود در جاهایی که فاصله در مقایسه با ابعاد سامانه و طول موج بسیار دور است، میدان‌ها رفتار بسیار متفاوتی از خود نشان می‌دهند. در این" ناحیه‌ی دور" تابش در اثر میدان های مغناطیسی حاصل از تغییرات زمانی پیوسته‌ی میدان الکتریکی و برعکس به وجود می‌آید. هر دو میدان هم-فاز نوسان می‌کنند و دامنه‌شان به صورت $1/r$ تغییر می‌کند. می‌توان نشان داد که شدت تابش به صورت $\sin^2\theta/r^2$ است. θ زاویه از محور آنتن است. در شکل (۲٦) وابستگی زاویه‌ای شدت، $I(\theta)$ ، نشان داده شده است. از این شکل پیداست که در صفحه‌ای که از وسط آنتن و عمود برآن می‌گذرد، شدت بیشینه است.



شکل ۲۵– خط‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یک آنتن دوقطبی الکتریکی

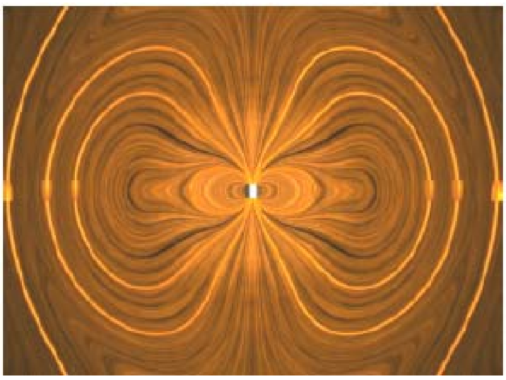


شکل ۲٦– وابستگی زاویه‌ای شدت تابش

برای یک دو قطبی الکتریکی که گشتاور دو قطبی آن به صورت

$$\mathbf{p}(t) = p_0\left[1+\frac{1}{10}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱٦۵)$$

تغییر می‌کند در یک لحظه و برای زمان معینی میدان‌ها در شکل (۲۷) نشان داده شده است. در نزدیکی‌های دوقطبی، حرکت میدان ها و در نتیجه بردار **S** نخست به سوی بیرون از دوقطبی و سپس به سوی درون اند. این رفتار به این معنی است که با تولید و انباشته شدن انرژی میدان الکتریکی دوقطبی شبه مانا ، شارش انرژی به سوی بیرون است و با نابود شدن انرژی میدان الکتریکی دوقطبی شبه مانا، شارش انرژی به سوی درون است. اگرچه در این ناحیه ها جهت شارش انرژی تغییر می‌کند، اما هنوز شارش



شکل ۲۷– طرح خط‌های میدان دوقطبی الکتریکی

انرژی برون سویی با میانگین زمانی انکی وجود دارد. این شارش برون سوی انرژی اندک ، تابش انرژی اندکی است که به بینهایت می‌رود. در ناحیه های دوردست که خطهای میدان بیرونی از دوقطبی جدا می-شوند و به سوی بینهایت حرکت می‌کنند. در این ناحیه، سرعت خطهای میدان و در نتیجه، شارش انرژی همواره برون‌سو است. در این ناحیه میدان‌های تابشی وجود دارد که انرژی را به بینهایت حمل می‌کنند.

۹-۱ تولید موج تخت

دیدیم که در فضای تهی، امواج تخت الکترومغناطیسی با سرعت نور انتشار پیدا می‌کنند. در اینجا نشان می-دهیم که چگونه می‌توان یک چنین موجی را با هندسه ای ساده تولید کرد. اگرچه یک چنین هندسه‌ی ساده به طور فیزیکی کاربردی در دنیای واقعی ندارد، با این وجود، هم روش تولید موج تخت الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد و هم به سادگی می‌توان مقدار کار لازم برای تولید آنها را حساب کرد و نشان داد که چه مقدار انرژی با خود منتقل می‌کنند.

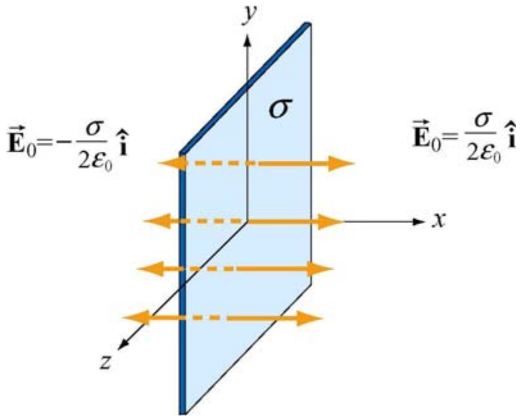
تولید موج تخت الکترومغناطیسی خیلی شبیه به تولید موج در یک ریسمان است. ریسمان را از جایی با دست می‌گیریم و تکان می‌دهیم. با این کار در ریسمان موج تولید می‌شود. با تکان دادن ریسمان بر علیه کشش ریسمان کار انجام می‌دهیم و این کار انجام یافته به صورت شار انرژی با موج منتقل می‌شود. موج های الکترومغناطیسی هم این گونه اند: خطهای میدان الکتریکی نقش "ریسمان" را دارد. همان گونه که خواهیم دید، هر خط میدان یک کشش وجود دارد. بنابراین، یک نیروی برگرداننده دارد که با تکان دادن خط میدان مخالفت می‌کند (بکوشید مکان اولیه اش را تغییر دهید) . در اثر تکان ، موجی در راستای خط میدان انتشار می‌یابد. برای این که جزییات این فرایند را بفهمیم، نیازمند استفاده از تقریبا همه‌ی الکترومغناطیسی هستیم که تاکنون آموخته‌ایم. از قانون گوس گرفته تا قانون آمپر- مکسول و این که امواج الکترومغناطیسی با سرعت نور انتشار می‌یابند.

.چگونه میتوان خط میدان را مانند ریسمان تکان داد؟ چه چیزی را باید با دست بگیریم و تکانش دهیم؟ خطهای میدان به بارهای الکتریکی وصل اند. از یک بار آغاز و به یک بار پایان می‌گیرند. پس برای تکان دادن خط میدان، بارها را تکان می‌دهیم. به هر حال، بارها هستند که میدان الکتریکی تولید می‌کنند و ریشه‌ی میدان الکتریکی در این بارها کاشته شده است. با این آگاهی و این که در فضای تهی نشانک های (سیگنال های) الکترومغناطیسی با سرعت نور انتشار پیدا می کنند، می توان راز تولید موج تخت با تکان دادن خط میدان را گشود. نخست ببینیم چگونه می توان در خط میدان الکتریکی یک **تاب** ایجاد کرد. پس از آن به ساختن موج سینوسی می‌پردازیم.

صفحه‌ای بینهایت گسترده‌ای با چگالی بارسطحی σ را در صفحه‌ی yz در نظر بگیرید که در آغاز ساکن است. مانند شکل (۲۸). قانون گوس می‌گوید که میدان الکتریکی این صفحه به صورت زیر است

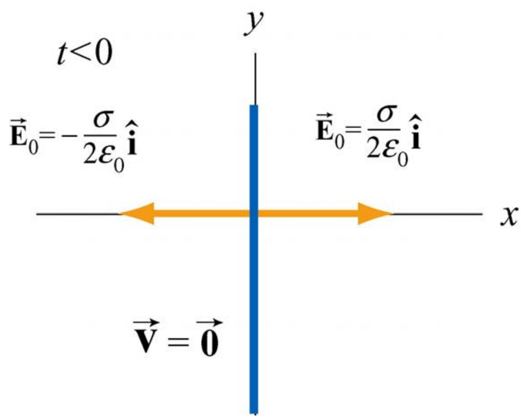
$$\mathbf{E}_0 = \begin{cases} +(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{i}}\ ; & x>0 \\ -(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{i}}\ ; & x<0 \end{cases} \tag{۱۶۶}$$

حالا، در زمان $t=0$ صفحه‌ی باردار را می‌گیریم و با سرعت *ثابت* $\mathbf{v}=-v\,\hat{\mathbf{j}}$ به سوی *پایین* می‌کشیم.

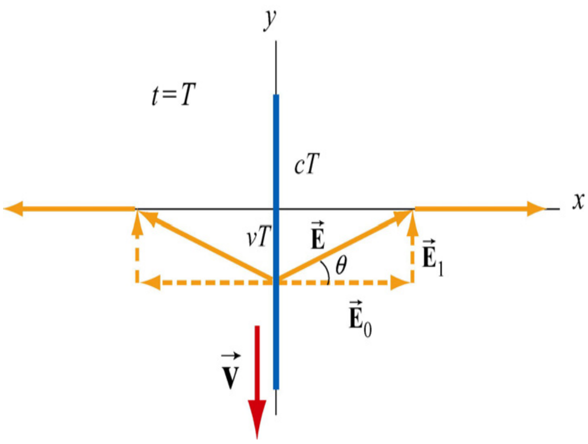


شکل ۲۸- خط میدان الکتریکی صفحه‌ی با بار σ

وضعیت در زمان $t = T$ چگونه خواهد بود؟ به ویژه پیش از آنکه صفحه به سوی پایین حرکت کند، یعنی برای زمان‌های $t < 0$، به خط میدان که از $y = 0$ می‌گذرد توجه کنید که در شکل (۲۹) دیده می‌شود. سر این خط میدان به باری وصل است که آن را تولید می‌کند. با حرکت دادن صفحه، این سر خط میدان هم باید با همان سرعت به همراه بار به سوی پایین حرکت کند. پس، در زمان $t = T$ این سر متصل به بار در مکان $y = -vt$ خواهد بود.
ما فرض کردیم که اطلاعات همراه این خط میدان با سرعت نور از نقطه‌ی $x = 0$ به سوی پایین انتشار می‌یابد. بنابراین، در این لحظه ($t = T$) آن بخش های خط میدان که در فاصله‌ی $x > cT$ از مبداء و در روی محور x قرار دارند، هنوز متوجه حرکت بار نمی-شوند و در نتیجه ، حرکت روبه پایین خود را آغاز نمی‌کنند. بنابراین، در زمان $t = T$ خط میدان ما باید به صورتی که در شکل (۳۰) دیده می‌شود، در آید. در بیرون ناحیه‌ی $|x| > cT$ هیچ اتفاقی نیفتاده است.



شکل ۲۹- خط میدان گذرنده از $y = 0$ در زمان $t < 0$



شکل ۳۰- خط میدان گذرنده از $y = 0$ در زمان $t = T$

تا اینجا می‌دانیم که در زمان $t = T$ سر متصل به بار خط میدان در $x = 0$ به نقطه‌ی $y = -vT$ منتقل شده است وبخشی از خط میدان که در $|x| > cT$ اند هنوز روی محور x قرار دارند. بنابراین، می‌توان حدس زد که برای $0 < |x| < cT$ خط میدان چگونه باید باشد. کافی است دو نقطه‌ی خط میدان را که می‌دانیم در زمان $t = T$ در کجا قرار دارند (یکی در $x = 0$ و دیگری در $x = cT$)را با خط راستی به هم وصل کنیم. برای یک ریسمان هم همین حدس را می زدیم. این حدس پذیرفتنی و درست است.
کاری که با به پایین کشیدن صفحه‌ی باردار انجام دادیم این است که افزون بر میدان الکتریکی $\mathbf{E}_0$، اختلالی به اندازه‌ی $\mathbf{E}_1$ در میدان الکتریکی ایجاد کردیم. بنابراین، برای $0 < |x| < cT$ میدان کل برابر است با

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_1 \qquad (۱۶۷)$$

همان گونه که از شکل (۳۰) پیداست، خط میدان $\mathbf{E}$ باید با خطی که انتهای متصل به بار خط میدان را به نقطه‌ی $|x|=cT$ وصل می‌کند، موازی باشد. این یعنی

$$\tan\theta=\frac{E_1}{E_0}=\frac{vT}{cT}=\frac{v}{c} \qquad (۱۶۸)$$

که در آن $E_1=|\mathbf{E}_1|$ و $E_0=|\mathbf{E}_0|$ و θ زاویه‌ای است که با محور x ساخته می‌شود. بنابراین، میدان اختلالی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}_1=\left(\frac{v}{c}E_0\right)\hat{\mathbf{j}}=\left(\frac{v\,\sigma}{2\varepsilon_0 c}\right)\hat{\mathbf{j}} \qquad (۱۶۹)$$

در اینجا از $E_0=\sigma/2\varepsilon_0$ استفاده کردیم. پس، ما یک میدان اختلالی، $\mathbf{E}_1$ ، به وجود آورده‌ایم و این رابطه می‌گوید به ازای سرعت v شدت این میدان چقدر است.

بحث بالا نشان می‌دهد که چرا به خط میدان الکتریکی، همانند ریسمان، کشش نسبت می‌دهیم. جهت میدان $\mathbf{E}_1$ به گونه‌ای است که نیرویی را که به بارهای صفحه وارد می‌کند، در برابر حرکت صفحه مقاومت نشان می-دهد. یعنی، وقتی صفحه‌ی باردار را به سوی پایین می‌کشیم، نیروی الکتریکی رو به بالا به آن وارد می‌شود. این کشش رو به بالا کهاز سوی میدان الکتریکی به جزء سطح da شامل بار $dq=\sigma da$ وارد می‌شود عبارت است از

$$d\mathbf{F}_e=dq\,\mathbf{E}_1=(\sigma da)\left(\frac{v\,\sigma}{2\varepsilon_0 c}\right)\hat{\mathbf{j}}=\left(\frac{v\,\sigma^2 da}{2\varepsilon_0 c}\right)\hat{\mathbf{j}} \qquad (۱۷۰)$$

بنابراین، برای چیره شدن به این نیرو، عامل خارجی که می خواهد صفحه‌ی باردار را به سوی پایین بکشد، باید نیرویی مساوی و روبه پایین به صفحه وارد کند.

$$d\mathbf{F}_{ext}=-d\mathbf{F}_e=-\left(\frac{v\,\sigma^2 da}{2\varepsilon_0 c}\right)\hat{\mathbf{j}} \qquad (۱۷۱)$$

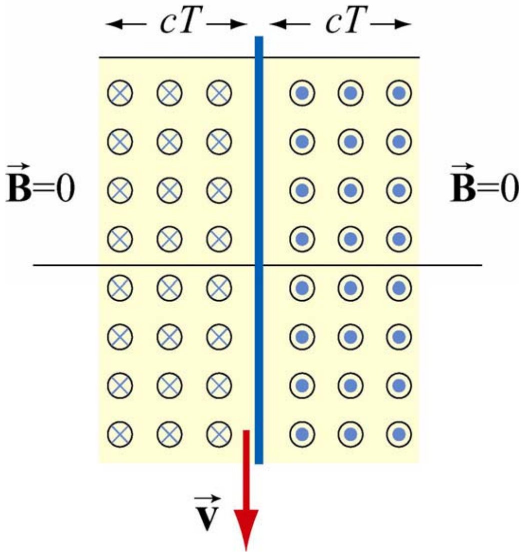
چون کار نیرو برابر $dW_{ext}=\mathbf{F}_{ext}\cdot d\mathbf{l}$ است، کار نیروی عامل خارجی در واحد سطح در واحد زمان عبارت است از

$$\frac{d^2W_{ext}}{dt\,da}=\frac{d\mathbf{F}_{ext}}{da}\cdot\frac{d\mathbf{l}}{dt}=-\left(\frac{v\,\sigma^2}{2\varepsilon_0 c}\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(-v\,\hat{\mathbf{j}}\right)=\frac{v^2\sigma^2}{2\varepsilon_0 c} \qquad (۱۷۱)$$

اتفاق دیگری که در این فرایند جلبه‌جایی صفحه‌ی باردار روی می‌دهد این است که با به حرکت در آوردن صفحه، یک جریان سطحی با چگالی جریان $\mathbf{K}=-\sigma v\,\hat{\mathbf{j}}$ هم تولید کرده‌ایم. بنابراین، افزون بر میدان الکتریکی $\mathbf{E}_1$ یک میدان مغناطیسی هم تولید شده است. میدان مغناطیسی این جریان سطحی را پیش تر حساب کرده-ایم و برابر است با

$$\mathbf{B}_1=\begin{cases}+(\mu_0\sigma v/2)\hat{\mathbf{k}} \; ; & x>0\\ -(\mu_0\sigma v/2)\hat{\mathbf{k}} \; ; & x<0\end{cases} \qquad (۱۷۲)$$

جهت این میدان مغناطیسی در ناحیه‌ی $x < 0$ برعکس جهت آن در ناحیه‌ی $x > 0$ است. پیکربندی این میدان برای $|x| < cT$ در شکل (۳۱) نشان داده شده است. بازهم، خبر این که صفحه‌ی باردار در حال حرکت جریان سطحی و نیز میدان مغناطیسی تولید کرده است، می‌تواند با سرعت نور از $x = 0$ به بیرون انتشار پیدا کند. بنابراین، برای $|x| > cT$ هنوز هم میدان مغناطیسی صفر است($\mathbf{B}_1 = 0$). توجه کنید که میدان $\mathbf{B}_1$ که در اثر حرکت صفحه‌ی باردار تولید شده است بر میدان $\mathbf{E}_1$ عمود است و اندازه‌اش برابر است با $B_1 = E_1/c$. این از ویژگی های موج عرضی الکترومغناطیسی است.
انرژی که این میدان‌های اختلالی حمل می‌کنند چقدر است؟



شکل ۳۱- میدان مغناطیسی در زمان $t = cT$

شار انرژی میدان های الکترومغناطیسی با بردار پویینتینگ $\mathbf{S}$ داده می‌شود. پس، داریم

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{v\sigma}{2\varepsilon_0 c}\hat{\mathbf{j}}\right)\times\left(\frac{\mu_0 \sigma v}{2}\hat{\mathbf{k}}\right) = \left(\frac{v^2\sigma^2}{4\varepsilon_0 c}\right)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱۷۳)$$

این ، البته نصف مقدار کاری است که برای به پایین کشیدن صفحه‌ی باردار هزینه کردیم (رابطه‌ی (۱۷۱) را ببینید.) اما میدان‌های سمت چپ صفحه همان مقدار شارانرژی به *سمت چپ* حمل می‌کنند که میدان‌های سمت راست به سوی راست حمل می کنند (توجه کنید که جهت میدان مغناطیسی $\mathbf{B}_1$ در عبور از صفحه در $x = 0$ تغییر می‌کند اما جهت میدان $\mathbf{E}_1$ تغییر نمی‌کند و بنابراین، بردار پوییتینگ هم در گذار از $x = 0$ جهتش عوض می‌شود) . بنابراین، شارکل انرژی الکترومغناطیسی که میدان‌های اختلالی با خود حمل می‌کنند *درست برابر* با مقدار کار در واحد سطحی است که برای حرکت دادن صفحه‌ی باردار هزینه شده است تا به کشش در میدان الکتریکی چیره شویم. پس، ما توانستیم میدان‌های الکترومغناطیسی اختلالی تولید کنیم که آهنگ حمل انرژی توسط این میدان ها با آهنگ تولید انرژی در آنها برابر است.

مقدار انرژی که موج الکترومغناطیسی با خود حمل می‌کند از کجا فراهم می‌شود؟ پاسخ این پرسش روشن است. عامل خارجی یا کسی که بار را تکان می‌دهد و موج الکترومغناطیسی تولید می‌کند باید برای چیره شدن به میدان الکتریکی اختلالی کار انجام دهد. این عامل خارجی چشمه‌ی تولید انرژی است؛ درست همان گونه که برای تولید موج در ریسمان، کسی که ریسمان را تگان می‌دهد، برای چیره شدن به نیروی کشش بازگرداننده‌ی در ریسمان باید کار انجام دهد.

۲-۹ تولید موج الکترومغناطیسی سینوسی

برای این که موج سینوسی با بسامد زاویه‌ای ω تولید کنیم، به جای این که صقحه‌ی باردار را با سرعت

ثابت به سوی پایین به حرکت در آوریم، آن را با بسامد ω در جهت بالا- پایین حرکت می دهیم. به بیان دیگر، با سرعت $\mathbf{v}=-v_0 \cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}}$ به حرکت وامی‌داریم. صفحه‌ی بار نوسان کننده میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تولید خواهد کرد که برای $x>0$ عبارت اند از

$$\mathbf{E}_1=\frac{c\mu_0\sigma v_0}{2}\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\hat{\mathbf{j}}\,,\qquad \mathbf{B}_1=\frac{\mu_0\sigma v_0}{2}\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۷٤}$$

و برای $x<0$ داریم

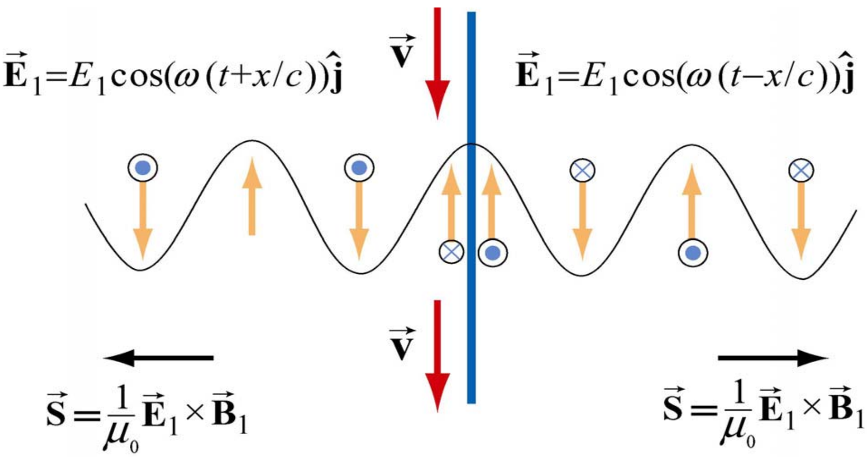
$$\mathbf{E}_1=\frac{c\mu_0\sigma v_0}{2}\cos\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)\hat{\mathbf{j}}\,,\qquad \mathbf{B}_1=\frac{\mu_0\sigma v_0}{2}\cos\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۷۵}$$

در این دو رابطه دامنه‌ها چنان انتخاب شده اند که با دامنه‌ی تابی که در بالا برای حرکت با سرعت ثابت صفحه‌ی باردار ایجاد کردیم، برابر و $E_1/B_1=c$ باشد. اما اینک، سرعت با بسامد ω با زمان تغییر می‌کند. اما چرا شناسه‌های این توابع کسینوسی را به صورت $(t-x/c)$ و $(t+x/c)$ نوشتیم؟

نخست وضعیت $x>0$ را در نظر بگیرید. فرض کنید در زمان t در جایی با $x>0$ نشته اید و میدان الکتریکی را در آن نقطه اندازه می‌گیرید. میدانی را که در آن لحظه و در آن نقطه مشاهده می‌کنید، نباید به این که در آن لحظه‌ی t صفحه‌ی باردار چه می کند بستگی داشته باشد. اطلاعات مربوط به صفحه‌ی باردار به زمان x/c نیاز دارد تا به نقطه‌ی مشاهده در $x>0$ برسد. بنابراین، آنچه را که مشاهده کننده در زمان t در نقطه‌ی $x>0$ اندازه می‌گیرد مربوط به رفتار صفحه‌ی باردار در زمانی **پیش‌تر** $t-x/c$ است. میدان الکتریکی باید این زمان تاخیری را که به خاطر سرعت انتشار محدود آن است در خود بازتاب بدهد. به این خاطر است که در شناسه‌ی میدان ها در رابطه‌ی (۱۷٤) به جای t کمیت $t-x/c$ قرار گرفته است. همین بحث برای ناحیه‌ی $x<0$ هم درست است، در این ناحیه فقط به جای $t-x/c$ باید $t+x/c$ قرار دهیم. در ریسمان هم همین کار را می‌کنیم. اگر بخواهیم دامنه‌ی موج تولید شده در ریسمان را در فاصله‌ای از جشمه-ی آن اندازه بگیریم، نتیجه‌ی اندازه گیری ما در زمان t به رفتار چشمه‌ی تولید کننده موج (دستی که ریسمان را تکان می‌دهد) در زمانی پیش‌تر بستگی دارد. این زمانی است که برای رسیدن موج به مکان اندازه گیری آن نیاز است.

اگر توجه کنید که $\cos\omega\left(t-x/c\right)=\cos\left(\omega t-kx\right)$ است که در آن $k=\omega/c$ عدد موج است، آنگاه می بینید که رابطه‌های (۱۷٤) و (۱۷۵) شکل موج های تخت الکترومغناطیسی را دارند که پیش‌تر بررسی کردیم. توجه کنید که میدان‌های موج الکترومغناطیسی را که به این شکل تولید شدند، میدان‌های اختلالی اند. اما در چیدمان ما میدان استاتیک $\mathbf{E}_0$ هم وجود دارد که در معادله‌های موج ظاهر نمی‌شود. می‌توان این میدان استاتیک را با آرایش جدیدی حذف کرد: کافی است صفحه‌ی باردار دیگری با چگالی بار $-\sigma$ را در $x=0$ قرار دهیم و آن را ساکن نگه داریم. میدان این صفحه ، میدان استاتیک صفحه‌ی متحرک را حذف می‌کند، اما تغییری در میدان‌های اختلالی نخواهد داشت. در عمل با این روش موج الکترومغناطیسی تولید می‌کنند: در محیطی که از نظر باری خنثی است، بارهای با یک علامت (معمولا الکترون ها) را شتاب می‌دهند و به همان تعداد بارهای با علامت مخالف را ساکن نگه می‌دارند. به این ترتیب، مشاهده کننده فقط میدان های موج را مشاهده می‌کند. پس، به این ترتیب می‌توان $\mathbf{E}_0$ را صفر قرار دارد. شکل (۳۲) موج حاصل از نوسان

صفحه‌ی باردار را در لحظه‌ای که صفحه به *پایین* حرکت می‌کند و میدان الکتریکی به سوی *بالاست*، نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی موج هم که جهت آن به درون صفحه یا بیرون از صفحه است در شکل نشان داده شده است



شکل ۳۲- میدان الکتریکی و موجی که با نوسان صفحه‌ی جریان تولید می‌شود.

این دستاورد چشم‌گیری است: توانستیم موج الکترومغناطیسی را از دو فرض ساده بسازیم. این فرض ها عبارتند از این که (۱) یک سرخط‌های میدان الکتریکی به بار متصل است و با آن حرکت می‌کند. (۲) اطلاعات مربوط به میدان با سرعت نور، c ، انتشار می یابد. با این دو شرط موج سینوسی ساختیم. موجی که تولید کردیم میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی عمود برهم دارد که برجهت انتشار موج عمود اند. نسبت اندازه‌ی میدان الکتریکی به میدان مغناطیسی موج با سرعت نور برابر است. هم‌چنین، دیدیم که شار انرژی که موج حمل می‌کند، $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ ، از کجا می‌آید. عاملی که بارها را به تکان وامی‌دارد و میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج را تولید می‌کند، انرژی را هم در این میدان‌ها می‌کارد. اگر هندسه‌ی آرایه بارها پیچیده‌تر باشد، جزییات این بحث هم پیچیده‌تر می‌شود، اما تصویر کلی همان است که در اینجا و برای این هندسه‌ی ساده گفته شد.

سرانجام، بگذارید رابطه‌های (۱۷٤) و (۱۷٥) را برحسب چگالی جریان سطحی صفحه $\mathbf{K}(t) = \sigma v(t)\,\hat{\mathbf{j}}$ هم بنویسیم. چون $\mathbf{v}(t) = -v_0 \cos \omega t\ \hat{\mathbf{j}}$ است، بنابراین $\mathbf{K}(t) = -\sigma v_0 \cos \omega t\ \hat{\mathbf{j}}$ و در نتیجه

$$\mathbf{E}_1(x,t) = -\frac{c\mu_0}{2}\mathbf{K}(t - x/c)\,, \quad \mathbf{B}_1(x,t) = \hat{\mathbf{i}} \times \frac{\mathbf{E}_1(x,t)}{c} \quad ; \quad x > 0 \tag{۱۷٦}$$

$$\mathbf{E}_1(x,t) = -\frac{c\mu_0}{2}\mathbf{K}(t + x/c)\,, \quad \mathbf{B}_1(x,t) = -\hat{\mathbf{i}} \times \frac{\mathbf{E}_1(x,t)}{c} \quad ; \quad x < 0 \tag{۱۷۷}$$

توجه کنید که جهت $\mathbf{B}_1(x,t)$ با گذر از صفحه‌ی جریان وارون می‌شود. چیزی که بنا به قانون آمپر باید هم روی بدهد. هر صفحه‌ی جریان نوسان کننده باید موج های الکترومغناطیسی تخت تولید کند که با معادله‌های (۱۷٦) و (۱۷۷) توصیف می‌شوند.

نکته: برای جلوگیری از گمراهی ممکن در درس پیشرفته تر الکترومغناطیس، در این جا یادآوری می‌کنیم که در درس الکترودینامیک به بررسی میدان های تابشی پرداخته می‌شود که یک بار **تنهای** نوسان کننده تولید می‌کند. خواهید دید که این میدان‌ها با **شتاب** بار تولید کننده متناسب اند. این بسیار متفاوت از آنچه که در اینجا گفته شد، به نظر می‌رسد. در اینجا میدان‌های تابشی با **سرعت** بارها متناسب است . اما در واقعیت، بین این دو تناقضی وجود ندارد: اگر میدان های تابشی را که همه‌ی **تک بارها ی** صفحه تولید می‌کنند با هم جمع کنید، همان رابطه های (١٧٦) و (١٧٧) را دوباره به دست می‌آورید.